ORGANIZADORES
CELINA AMÉLIA DA SILVA
JOÃO COELHO SILVA FILHO
LELIA DE OLIVEIRA CRUZ

PROFMAT-UEMA: FORMANDO DOCENTES, CONSTRUINDO SABERES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
PROFMAT
Pascal Editora
2021

CELINA AMÉLIA DA SILVA
JOÃO COLEHO SILVA FILHO
LEILA DE OLIVEIRA CRUZ
(ORGANIZADORES)

PROFMAT UEMA
FORMANDO DOCENTES, CONSTRUINDO SABERES

VOLUME 1

EDITORA PASCAL
2021

Editor Chefe: Prof. Dr. Patrício Moreira de Araújo Filho

Edição e Diagramação: Eduardo Mendonça Pinheiro

Edição de Arte: Marcos Clyver dos Santos Oliveira

Bibliotecária: Rayssa Cristhália Viana da Silva – CRB-13/904

Revisão: Os autores

Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P964v1

PROFMAT UEMA: Formando docentes, construindo saberes. / Celina Amélia da Silva, João Coelho Silva Filho, Leila de Olivera Cruz, (Orgs.). — São Luís: Editora Pascal, 2021.

318 f.; il. – (PROFMAT UEMA; v. 1)

Formato: PDF
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN: 978-65-86707-74-8
D.O.I.: 10.29327/549013

1. Educação. 2. Formação docente. 3. Matemática. 4. Miscelânea. I. Silva, Celina Amélia da. II. Silva Filho, João Coelho. III. Cruz, Leila de Olivera. IV.Título.

CDU: 371.13:51(08)

2021

www.editorapascal.com.br

contato@editorapascal.com.br

APRESENTAÇÃO

Apresentamos a presente obra, uma coletânea de textos relativos à produção acadêmico científica resultante dos trabalhos de conclusão de curso de mestrandos, professores da Educação Básica que cursaram mestrado no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT/UEMA, coordenado pela SBM, com apoio do IMPA, vinculado à CAPES.

O programa visa prioritariamente, "aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência". Assim, por meio dos textos aqui relacionados, comunica à comunidade acadêmica, professores da Educação Básica e a comunidade em geral o resultado das pesquisas realizadas no âmbito do citado programa, oriundas dos trabalhos desenvolvidos com base em problemas, inquietações de seus autores, tendo como motivação a prática docente exercida, com o objetivo de qualificar suas ações profissionais e a melhoria do processo de ensino aprendizagem de matemática.

Portanto, a presente obra é composta por temas relacionados à formação docente e aprofundamento de conteúdos matemáticos, todos oriundos do ideário pedagógico de seus produtores.

- ARITMÉTICA MODULAR APLICADA AOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE MNEMÔNICOS E NÃO MNEMÔNICOS (Filliphe de Almeida e João Coelho Filho): Este trabalho aplica os restos da divisão Euclidiana aos critérios de divisibilidade. O objetivo é apresentar as justificativas para os critérios de divisibilidade fundamentados na definição e nas propriedades da aritmética modular.

- SALA DE AULA INVERTIDA: uma proposta para o ensino e aprendizagem matemática no ensino fundamental anos finais: (Alysson Rangel Sousa Brito e Celina Amélia da Silva) O presente trabalho faz uma breve análise sobre as mudanças advindas das evoluções tecnológicas e como elas influenciam diretamente o ambiente escolar.

- CONSTRUINDO OS SÓLIDOS DE PLATÃO POR MEIO DE DOBRADURAS (Iltilene Carvalho de Sousa e Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus): Este artigo é resultado de uma dissertação de metrado que trata sobre a construção dos sólidos de Platão por meio da dobradura realizada em uma escola estadual, do município de São Domingos do Maranhão - MA.

- A IMPORTÂNCIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DO PEDAGOGO: um estudo com discentes de pedagogia em uma instituição privada em Paço do Lumiar – MA (Darcio Pereira Damaceno Raimundo J. Barbosa Brandão): O presente artigo trata-se uma pesquisa de campo realizada no ano de 2017, como os discentes de pedagogia do Instituto Superior Franciscano (IESF), como objetivo de aferir a percepção dos mesmos referente a formação matemática recebida e os reflexos na vida profissional, o trabalho é uma compilação da dissertação apresentada para obtenção do grau de mestre.

- CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO (Weslley Jonh Barros Silva e Sandra Imaculada Moreira Neto): Nesse trabalho será exposto, por meio de uma proposta do uso de construções geométricas com régua e compasso, que é possível melhorar a compreensão e assimilação dos conteúdos de geometria. Para isso foi feito um minicurso com 20 alunos de 8º ano com uma análise qualitativa das resoluções das atividades propostas e dos questionários aplicados aos alunos e conclui-se que houve uma melhora na assimilação dos conteúdos propostos.

- CÁLCULO DE ÁREAS: uma abordagem através do geogebra no ensino médio (Vilson Morais de Sousa e Sandra Imaculada Moreira Neto): Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem de alguns tópicos do cálculo de áreas, por meio de atividades desenvolvidas através do software Geogebra. A proposta aborda conceitos que vão desde a noção intuitiva de área, passando pela área do triângulo, até o cálculo da área do círculo utilizando a noção do método de exaustão.

- METODOLOGIAS ATIVAS: o uso de videoaula como ferramenta didática no ensino de matemática com alunos de escolas pública (José Haito Filho e Raimundo J. Barbosa Brandão): Este estudo teve por objetivo avaliar a organização da prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental com relação ao uso de vídeo aulas. Procuramos analisar o uso das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem em matemática na

Educação Básica. Buscou-se analisar as políticas públicas de formação do professor para o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação/TICS.

- O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL, UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (Rafael Chaves da Luz; Raimundo J. Barbosa Brandão): Este estudo, aborda os registos de representação semiótica no ensino de Álgebra a partir da resolução de problemas, tem como objetivo discutir as contribuições desses registros no nono ano do ensino fundamental.

- A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO E COMPREENSÃO DA FÍSICA (Nathanael de Sousa Barreto e Sergio Nolêto Turibus): A presente pesquisa mostra por meio das funções afim e quadrática a relação existente entre Matemática e Física e o quanto a mesma é importante para crescimento e compreensão da Física. A metodologia da resolução de problemas foi a ponte pelo qual as expressões matemáticas ganharam vida nas aplicações, permitindo alcançar objetivos além do imaginado.

- TESTE DE PRIMALIDADE (Marlon Maiko Barros Martins e Raimundo José Barbosa Brandão: O estudo teve como finalidade apresentar alguns dos principais testes de primalidade desenvolvidos ao longo da história, com detalhamento de suas características gerais, custos computacionais, tempos de execução, dentre outros aspectos. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica e o objetivo geral consistiu em analisar o funcionamento dos testes de primalidade desde sua concepção mais simples até os modernos mecanismos de localização de números primos.

- MODELAGEM MATEMÁTICA: FUNÇÃO QUADRÁTICA E LANÇAMENTO DE GARRAFA PET (Giuliano Eduardo Batista Cutrim e Raimundo José Barbosa Brandão). O objetivo deste estudo é contribuir para a compreensão do conceito e aplicação de função quadrática no lançamento de foguete, por meio da modelagem matemática. Esta investigação é de natureza qualitativa com intervenção, utilizando como metodologia a modelagem matemática

- CONJUNTOS NUMÉRICOS E SUAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA (Antonio Washington dos Santos Silva e Lélia de Oliveira Cruz): O trabalho é parte de uma pesquisa que investigou a organização dos conjuntos numéricos e seus elementos, a partir da teoria dos conjuntos, mostrando sua importância e aplicação na Educação Básica, além de destacar os elementos que caracterizam cada conjunto.

- LABORATÓRIO DE GEOMETRIA: aplicação do geoplano no ensino do cálculo e nas demonstrações de fórmulas de áreas das figuras planas (Adriano Sousa de Farias e Sergio Nolêto Turibus): O presente trabalho vem trazer uma pesquisa que foi feita com uma turma de 3º ano do Ensino médio, onde através da utilização, na prática, do recurso didático geoplano foi feita uma pesquisa para avaliar se vale a pena ou não a utilização desse recurso em sala de aula.

- TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: uso da HP 12 C na resolução de problemas de Matemática financeira com alunos do 3º ano do ensino médio (Marcelo da Silva Penha; Raimundo J. Barbosa Brandão): O objetivo deste estudo é apresentar, de forma clara, os principais recursos disponíveis na calculadora HP 12 C, em especial operações algébricas, envolvendo porcentagem, juros, descontos, amortização e recursos aplicáveis à Matemática financeira. O estudo pretende, também, contribuir, com conhecimentos de Matemática financeira a partir da resolução de problemas, utilizando como ferramenta a calculadora HP 12 C.

- ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma abordagem reflexiva (Gedilson Pacheco Pereira e Lélia de Oliveira Cruz): Na pesquisa, foi investigado a importância da temática para o desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivo dos alunos, bem como, a abordagem dada ao conteúdo nas aulas. O trabalho pauta-se na pesquisa-ação e defende uma abordagem para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória sem o uso, meramente, de fórmulas matemáticas que na maioria das vezes são adotadas de forma mecânica, sem nenhuma ligação com a realidade do aluno, sem valorizar a capacidade de criação e produção.

- ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL A PARTIR DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVIES: apontamentos e reflexões (Valderlândio de Araújo Pontes; Lusitonia da Silva Leite e Celina Amélia da Silva): O artigo trata do recorte de uma pesquisa de mestrado. O objetivo é apresentar alguns apontamentos e reflexões sobre o ensino de geometria plana e espacial a partir da utilização de materiais manipuláveis. É uma pesquisa de abordagem qualitativa, exploratória discursiva.

Acreditando que esse conjunto de textos poderá contribuir com outros pesquisadores, como sugestões de referências para projetos em desenvolvimento ou para inserção em suas práticas docentes das propostas apresentadas. O material produzido, contempla tendências diversificadas das áreas da matemática, convidamos os leitores a serem interlocutores críticos e reflexivos das ideias aqui apresentadas.

Prof. Dr. João Coelho Filho

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

LABORATÓRIO DE GEOMETRIA: aplicação do geoplano no ensino do cálculo e nas demonstrações de fórmulas de áreas das figuras planas

Adriano Sousa de Farias[1]

Sergio Nolêto Turibus[2]

1 Mestre, Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
2 Doutor, Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

RESUMO

Existem muitos trabalhos acadêmicos que visam a utilização de recursos didáticos para uma melhor aprendizagem dos alunos em sala de aula, mas qual é o impacto desses recursos em sala? Será de esses materiais concretos realmente ajudam na aprendizagem dos alunos? O presente trabalho vem trazer uma pesquisa que foi feita com uma turma de 3º ano do Ensino médio, onde através da utilização, na prática, do recurso didático geoplano foi feita uma pesquisa para avaliar se vale a pena ou não a utilização desse recurso em sala de aula. A metodologia utilizada foi aula expositiva e logo após a aula aplicação de testes escritos. Os resultados colhidos foram positivos e satisfatórios.

Palavras-chave: Recurso Didático. Geoplano. Demonstrações. Área de Figuras.

1. INTRODUÇÃO

O ensino da geometria da forma que é feito hoje em dia, apenas escrevendo as fórmulas no quadro e ensinando como são aplicadas em questões, gera, muitas vezes, dificuldade de compreensão por parte dos alunos.

Poucos professores explicam porque a área de um quadrado é calculada pegando-se a medida do lado do quadrado e elevando ao quadrado ou porque a área do triângulo pega-se a medida base, multiplica-se pela medida da altura e dividido por 2.

Muitos alunos em sala de aula fazem esse tipo de questionamento, de onde surgiu determinada fórmula. E com isso foi buscada uma forma bem didática de explicar isso ao aluno com a utilização do geoplano.

Para isso será feito um laboratório com os alunos do 3º ano do ensino médio do C. E. Deborah Correia Lima – Anexo Mamorana, que fica localizado na cidade de São Bernardo – MA.

Outro fato interessante que ao se fazer uma pesquisa sobre uso de materiais didáticos no ensino da matemática encontramos muitas monografias, dissertações e artigos que falam sobre como usar esses materiais em sala de aula. Poucos são os trabalhos que aplicam essa teoria na prática.

Este é mais um motivo que levou a criação do laboratório. É sair da teoria e ir para a prática, pois na prática conseguimos avaliar os pontos positivos e negativos da aplicação de materiais didáticos nas aulas.

O objetivo geral desse trabalho é montar um laboratório de geometria para ensinar a geometria plana de forma lúdica aos alunos do 3º ano do ensino médio da escola C. E. Deborah Correia Lima - Anexo Mamorana com o auxílio do geoplano, para que os mesmos sejam participativos no processo de ensino e aprendizagem e desenvolvam o raciocínio lógico.

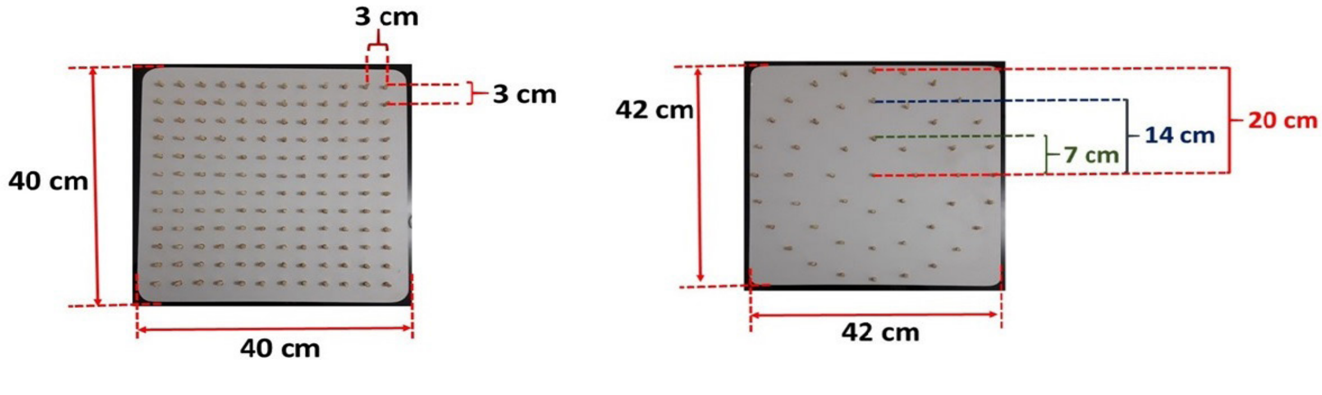
Os objetivos específicos são: Ensinar qual é a necessidade do dia a dia que levou o surgimento da geometria; Definir cada uma das figuras planas e aprender a diferenciá-las; Ensinar geometria plana através do contexto histórico explicando de onde surgiu cada fórmula de área de figuras planas; Usar o geoplano para mostrar as demonstrações das fórmulas de área de figuras; Usar o geoplano para resolver problemas envolvendo área de figuras; e Fazer uma análise do desempenho dos alunos para saber se o material didático ajuda ou dificulta o processo de ensino aprendizagem.

Lembrando que esse artigo é baseado na dissertação do próprio autor, ao curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede, pela Universidade Estadual do Maranhão. Defendida e aprovada em 25 de janeiro de 2019.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Antes de se iniciar as pesquisas foi pedido a um marceneiro profissional a construção de 7 geoplanos, sendo 5 de malha quadriculada e 2 de malha circular. Como mostra a figura 1.

Figura 1 - Geoplanos



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Para o desenvolvimento do laboratório de pesquisa também foram utilizados os seguintes materiais didáticos: ligas elásticas de escritórios, EVA, tesouras, régua, compasso e papel cartão.

A primeira etapa do projeto de pesquisa consistiu em separa a turma em quatro grupos, onde eles se juntaram por afinidade de amizade. A segunda etapa foi entregar um geoplano de malha quadriculada para cada equipe e ligas elásticas coloridas.

A intenção de entregar logo o recurso didático era instigar a curiosidade deles, com o objetivo de eles tentarem descobrir por conta própria qual era a utilidade do geoplano.

A terceira etapa foi apresentar oficialmente o geoplano, explicando como ele foi construído (e também como ele pode ser construído através de material reciclável) e qual era o assunto que íamos estudar através do geoplano.

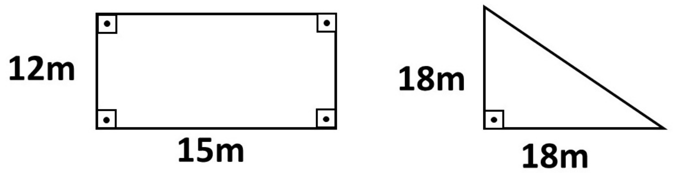
A quarta etapa foi definir matematicamente as figuras planas, para poder responder perguntas, como por exemplo: Todo quadrado é um losango? Todo losango é um quadrado? Ao fim desta etapa foi aplicada a primeira lista de exercícios para avaliar a aprendizagem.

A quinta etapa foi explicar (utilizando o geoplano) como surgiu as fórmulas que calculam as áreas das figuras planas. Nessa etapa foi falado sobre a história da matemática e criado uma situação problema para os alunos resolvessem utilizando essa história.

O problema foi descrito abaixo e o desafio para os alunos era resolve-lo sem utilizar fórmulas.

Pedro possui um terreno na forma de um retângulo de 12 metros de frente, por 15 metros de fundo, e João tem um terreno em forma de um triângulo que possui as medidas: 18 metros por 18 metros, como mostra a figura. Se a prefeitura da cidade que eles moram cobrassem um imposto proporcional ao tamanho do terreno, qual deles iria pagar menos imposto?

Figura 2 - Problema motivador



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Após a solução do problema foi mostrado aos alunos a demonstração das fórmulas das áreas do quadrado, triângulo, paralelogramo, trapézio, losango e círculo. Ao fim desta etapa foi aplicada uma lista uma segunda de exercícios para avaliar a aprendizagem.

A sexta etapa consistiu em resolver exercícios de matemática que envolviam área pintadas e exercícios onde era preciso dividir figuras para se chegar a um resultado.

A última etapa consistiu em analisar os dados obtidos com as listas de exercícios e com isso chegar a resposta se vale a pena ou não utilizar recursos didáticos em sala de aula.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Contexto Histórico da Geometria

Etimologicamente a palavra geometria deriva do termo geometrein, que quer dizer medida da terra (geo = terra e metrein = medida). Segundo o historiador grego Heródoto (século V a.C.) a sua origem se deu a partir da necessidade de se medir a terra.

No antigo Egito, por exemplo, existia a necessidade de se calcular o tamanho das terras para que se pudesse cobrar, de forma justa, o imposto a se pagar ao faraó. E ainda existia outro problema, pois existia épocas do ano que o rio Nilo tinha cheias e com isso o imposto a ser pago tinha que ser recalculado, para que a cobrança fosse justa.

Por esse motivo, o estudo de cálculo de áreas e volumes se mostrou muito importante na época e se pensarmos bem, ainda domina até os dias atuais, pois o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), que é cobrado dos cidadãos, leva em consideração o tamanho do terreno e tamanho da construção.

Entretanto, vale ressaltar que, estes povos precursores da geometria, não se preocupavam em fazer demonstrações para se chegar em uma fórmula. A eles eram pedidos que resolvessem algum problema (como o mencionado acima, cálculo de impostos) por isso esses matemáticos criaram regras específicas, para resolver o problema.

As primeiras demonstrações surgiram com Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C. onde este trabalho foi continuado pelos pitagóricos e também por Platão, até surgir Euclides (que era um discípulo da escola platónica). Ele organizou as ideias matemáticas, existentes até aquela época, nos seus livros 13 Livros conhecidos como Elementos de Euclides, publicado por volta do ano 300 a.C.

3.2 O Ensino da Geometria no Brasil

O Parâmetro Curricular Nacional (PCN) acrescenta que é de fundamental importância apresentar aos alunos o contexto histórico para que eles possam construir o conhecimento.

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possi-

> bilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (BRASIL, 1997, p. 19).

Por isso foi fundamental para este trabalho apresentar o contexto histórico que envolve o surgimento das fórmulas de área de figuras, para que o aluno possa entender que elas não botaram do nada, que existe uma demonstração.

Atualmente a discussão sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais ficou de lado e deu espaço para um documento chamado Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na qual na data de 20 de dezembro de 2017 foi aprovado a parte que trata do ensino fundamental e a que trata do ensino médio (até a data da realização da pesquisa) ainda está em processo de discussão para posteriormente ser aprovada.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que a matemática seja dividida em cinco unidades temática. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

A BNCC continua afirmando que o estudo da geometria não pode se resumir a simplesmente escrever fórmulas no quadro e ensinar como estas fórmulas são aplicadas em questões.

> A geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de áreas e de volumes e nem aplicações imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixe de retas paralelas cortadas por retas secantes ou teorema de Pitágoras (BRASIL, 2017 p. 270).

Este é mais um motivo para a criação do laboratório. Levar o aluno a manipular materiais didáticos de forma a ajudá-lo a compreender de forma mais fácil o que está sendo ensinado.

3.3 Laboratório de Matemática e Materiais Didáticos

Muitos educadores ao logo da história defenderam a ideia de que os materiais manipuláveis devem ser usados como um meio no processo de ensino e aprendizagem do discente, como forma de facilitar a sua aprendizagem.

Podemos citar Comenius (1650), que escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto para o abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos. Já Lorenzato (2012) afirma que os materiais concretos são recursos didáticos que interferem fortemente no processo de ensino e aprendizagem.

Os profissionais precisam de um local apropriado e ferramentas de trabalho apropriadas para que possam exercer um bom trabalho, por exemplo: um cozinheiro precisa de um local apropriado e excelentes ferramentas para realizar um bom trabalho. Um professor também precisa. O local chamamos de laboratório e as ferramentas chamamos de materiais didáticos. Para o pesquisador Sergio Lorenzato:

> O laboratório de ensino é uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino da matemática se apresenta com necessidades especiais e o Laboratório de Ensino da Matemática pode e deve prover a escola para atender essas necessidades (LORENZATO, 2012, P. 06).

O Laboratório de matemática não deve ser visto com um depósito trancado e de difícil acesso. O laboratório é o local onde professores e alunos devem se reunir e através dos materiais manipuláveis produzir conhecimento.

Para os pesquisadores Rômulo Rêgo e Rogéria Rêgo o laboratório de matemática é uma oportunidade de os alunos se sentirem desafiados a enfrentar situações-problemas e resolvê-las.

Uma situação que se deve ter cuidado é que para cada faixa etária se deve aplicar um tipo de laboratório. Por exemplo: para a educação infantil pode-se trabalhar com materiais de encaixar, já para os alunos do ensino fundamental e médio serão necessários materiais mais desafiadores, como o geoplano, geoespaço, tangram, entre outros.

O professor é a principal figura, e ele precisa acreditar no potencial dos materiais didáticos e o que esse material vai lhe ajudar no processo de ensino e aprendizagem e para isso vai ser exigido do professor um excelente planejamento para poder orientar os alunos.

Segundo Lorenzato (2012) o professor é determinante para o sucesso ou fracasso do laboratório. Para que os alunos aprendam significativamente, não basta que o professor disponha de um laboratório. Tão importante quanto a escola possuir um laboratório é o professor saber utilizar corretamente os materiais didáticos disponíveis nesse ambiente.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

O projeto se iniciou no dia 9 de outubro de 2018 e teve uma duração de 10 horas aulas. Também utilizados um notebook e um data show para fazer a apresentação e explicações de conteúdo necessárias ao laboratório.

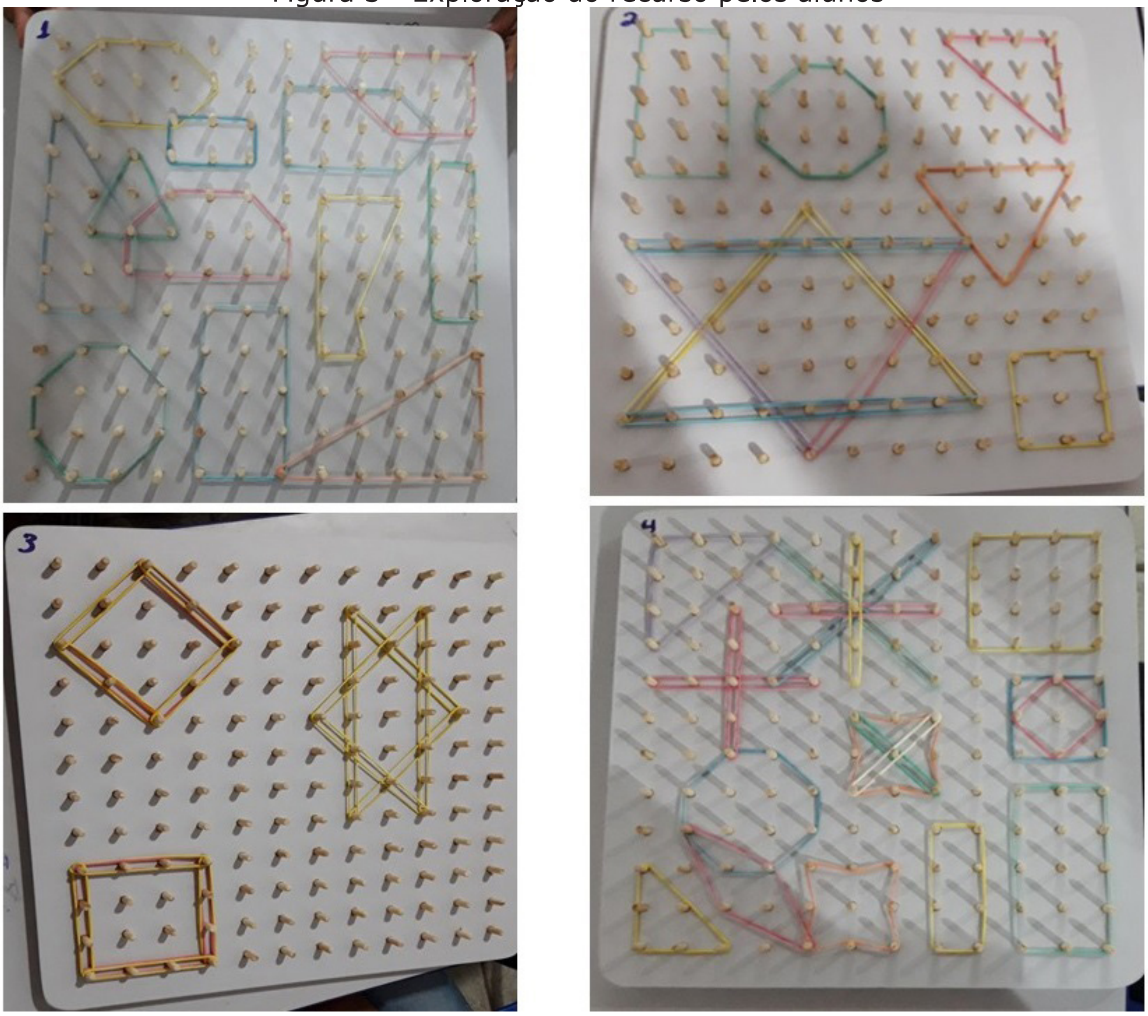
Cada equipe recebeu um geoplano numerado para poder identificar de forma mais fácil os resultados.

4.1 Primeiro Dia do Projeto

Neste dia foram realizadas as etapas de 1 a 4 descritas no capítulo 2.

A segunda etapa do projeto teve o seguinte resultado está descrito na imagem a seguir. Vale ressaltar que o pesquisador deixou a criação livre, em nenhum momento interferiu, dando liberdade para os alunos explorarem. O resultado está descrito na figura 3.

Figura 3 - Exploração do recurso pelos alunos



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

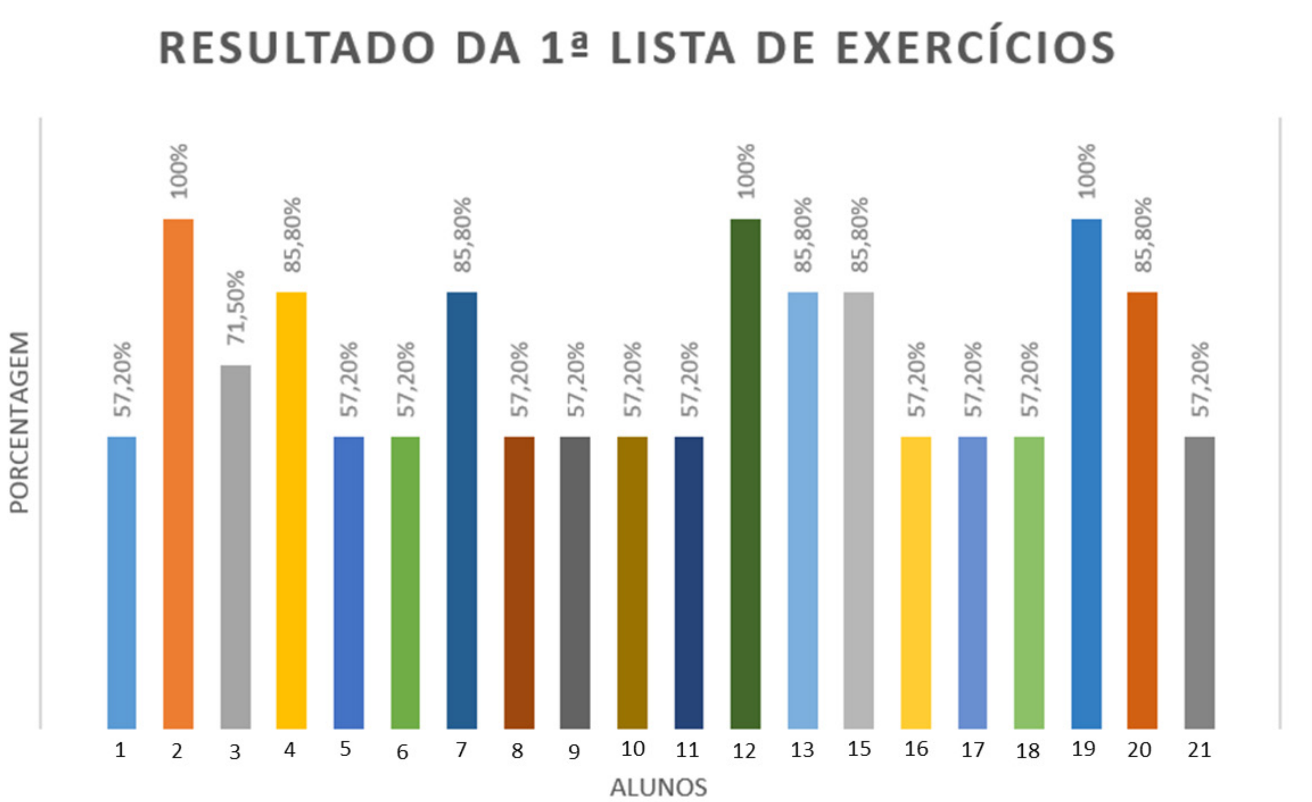
Quando eles finalizaram esse exercício, foi perguntado a eles se alguma vez, na vida de estudante deles, já haviam tido uma aula de matemática assim, com material para manipular, e a resposta foi unanime, nunca.

Ao observar o resultado feito pelos alunos pudemos comprovar a teoria do professor Dr. Sergio Lorenzato, na qual ele diz que o aluno pode olhar o material com certa estranheza e apresentar ideias incompletas.

E foi o que aconteceu nessa primeira atividade dos alunos. Muitos alunos viram o geoplano com desconfiança, não sabendo muito o que fazer e como explorar. Por exemplo, os grupos 1, 2 e 4 exploraram bastante, já o grupo 3 explorou menos.

Após essa exploração inicial foi feita a definição de todas as figuras planas e logo em seguida foi aplicado a primeira lista de exercícios, onde obtemos os seguintes resultados, descrito na figura 4.

Figura 4 - Gráfico representando o resultado da primeira lista de exercícios



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

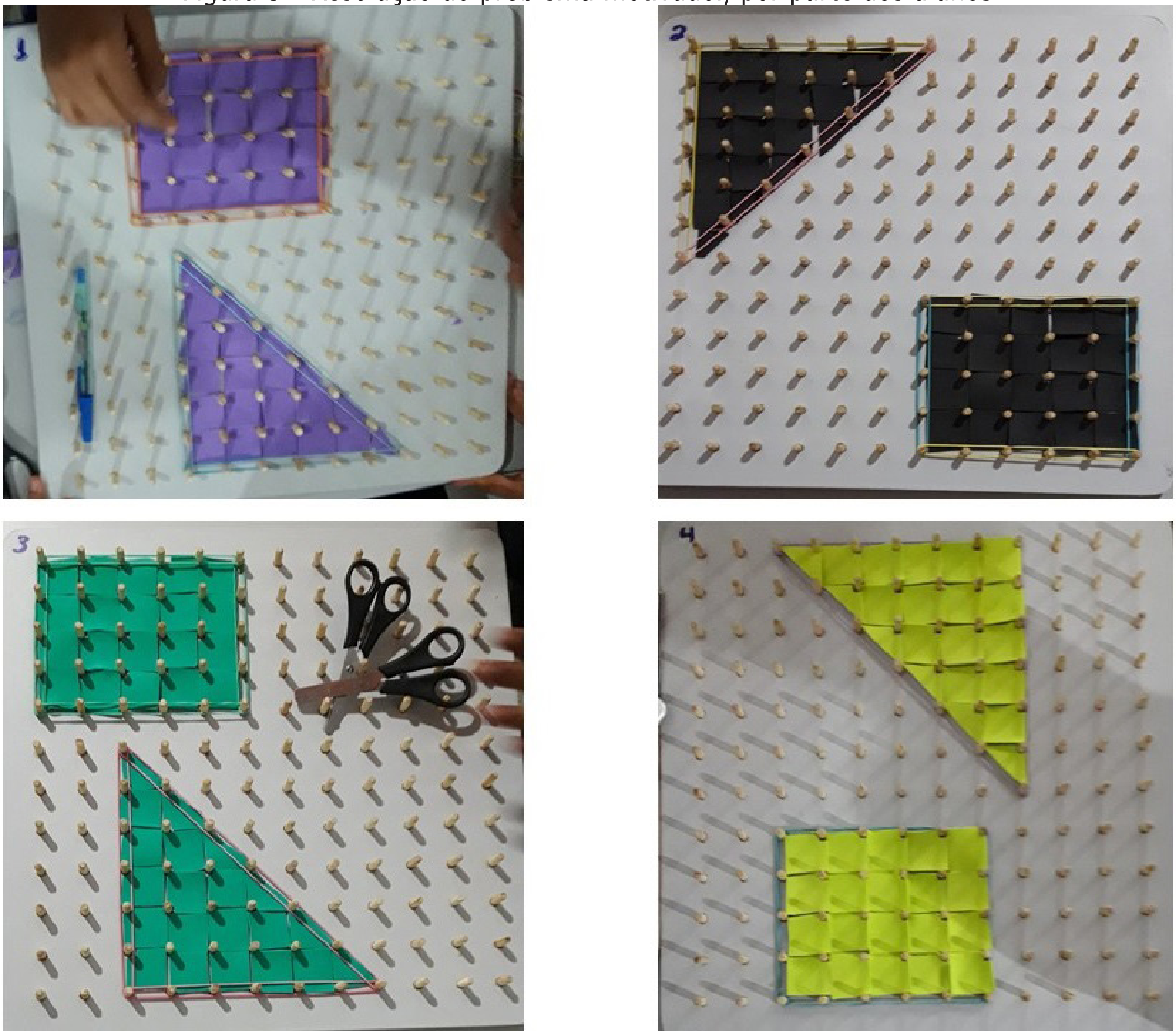
Esse resultado é satisfatório, pois 9 alunos ficaram acima da média, 11 alunos ficaram próximos da média e nenhum deles ficou abaixo de 50%. Lembrando que a média para o aluno ser aprovado no Estado do Maranhão é 6 (seis).

4.2 Segundo Dia do Projeto

No segundo dia de projeto foi desenvolvida a quinta etapa do projeto apresentado a eles a história da matemática e explicando aos alunos como os antigos faziam para resolver problemas de matemática sem utilizar fórmulas prontas.

Nesse dia foi pedido a eles que resolvessem a situação problema descrita no capítulo 2. A imagem abaixo os mostra resolvendo o problema.

Figura 5 - Resolução do problema motivador, por parte dos alunos



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Ao questionar individualmente cada grupo sobre a solução final do problema os grupos 2, 3 e 4 responderam o problema de forma correta, dizendo que o retângulo possuía 20 quadradinhos e o triângulo possuía 18 quadradinhos e, por isso, o retângulo tinha maior área e o triângulo menor área.

Já o grupo 1, não apresentou a solução correta, disseram que o triângulo tinha maior área, pois eles contaram os pequenos triângulos de EVA como um quadradinho, não juntaram 2 triângulos de EVA para formar um quadrado. Na solução inicial disseram que o triângulo tinha 21 quadradinhos contra 20 do retângulo.

Mas foi falado a eles haviam errado a solução que repensassem na solução, pois o erro não deve ser visto como punição e sim como uma dica ou pista para chegar à solução correta e na segunda tentativa eles acertaram.

Muitos alunos têm medo de errar na matemática por medo de serem punidos imediatamente, sem ser dada a chance de repensar na sua resposta. Nós professores, devemos mudar essa mentalidade, avaliar o que o aluno desenvolveu, onde ele errou e incentivá-lo a achar o erro, para poder concluir de forma correta a questão.

Nenhum grupo separou os pedaços de EVA para fazer a comparação, mas conseguiram fazer a contagem de forma correta e apresentar a solução de forma verbal.

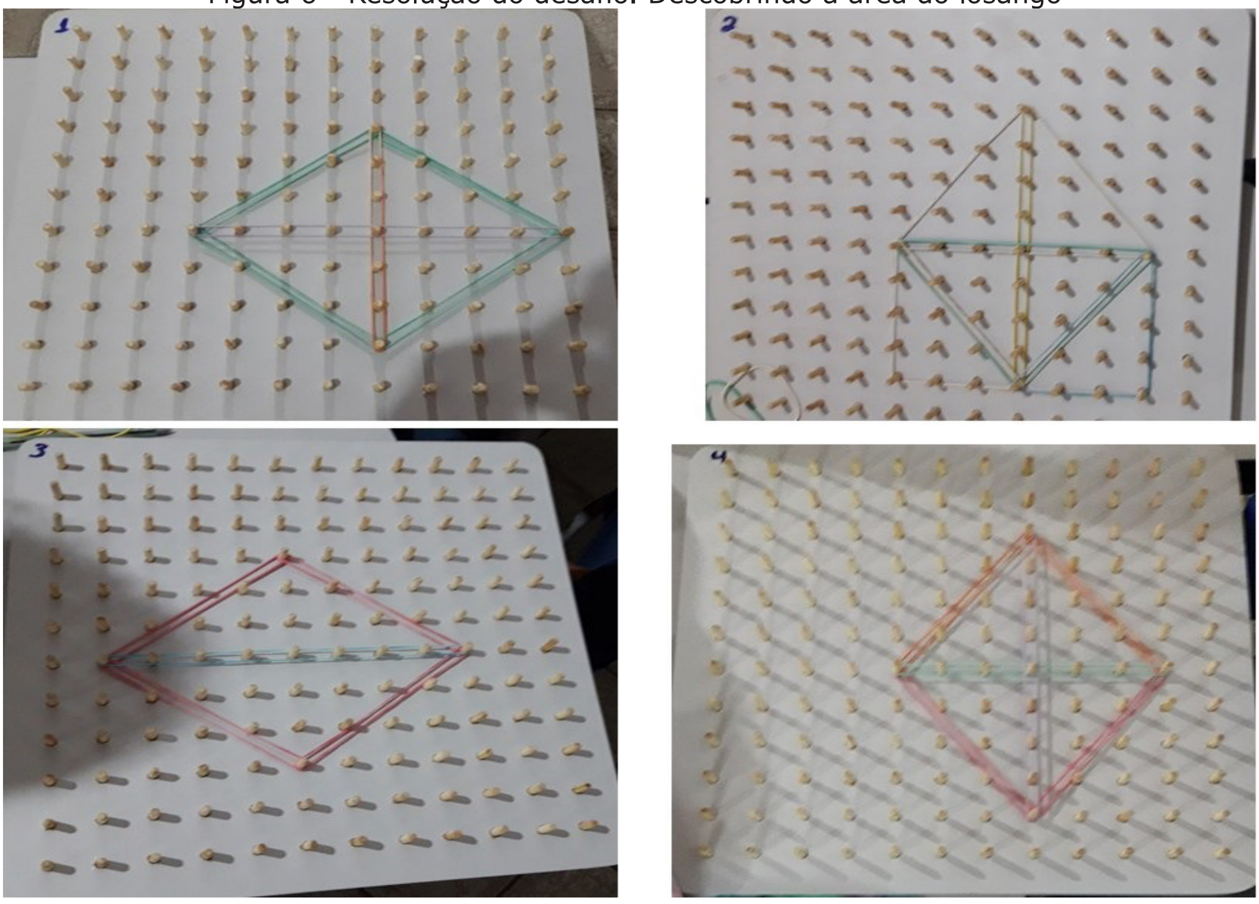
Mais uma vez foi obtido um alto índice de acerto. Três dos quatro grupos apresentaram a solução correta na primeira tentativa. Somente um grupo precisou de 2 tentativas para apresentar a solução correta.

4.3 Terceiro Dia do Projeto

Esse dia foi dedicado a mostrar as demonstrações das fórmulas do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango. Com a utilização do geoplano.

A figura abaixo é um exemplo do que aconteceu nesse dia. Foi sugerido a eles que tentassem descobrir por conta própria a área do losango.

Figura 6 - Resolução do desafio. Descobrindo a área do losango



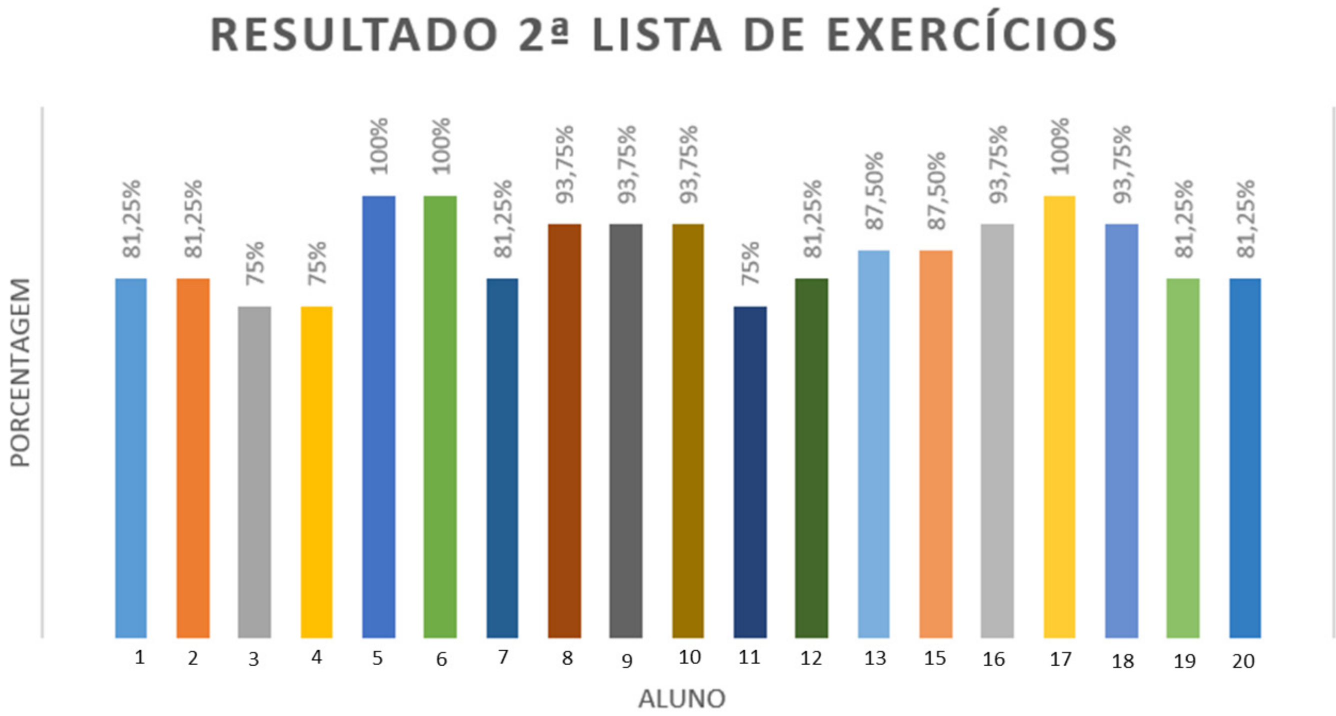
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

A equipe 1 recortou o losango em 4 triângulos, equipe 2 recortou dois triângulos para formar um retângulo, a equipe 3 recortou a figura em dois triângulos e a equipe 4 utilizou o mesmo método da equipe 1, como mostra a figura 6.

4.4 Quarto Dia do Projeto

Esse dia foi para finalizar as demonstrações de área de figuras planas, especificadamente a área do círculo e também a aplicação da segunda lista de exercícios. Onde foram obtidos os seguintes resultados.

Figura 7 - Gráfico representando o resultado da segunda lista de exercícios



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Pode-se observar que os alunos se saíram melhor nessa segunda atividade, todos conseguiram ficar acima da média. Mais uma vez o uso do recurso influenciou de forma positiva o aprendizado.

O que levou a turma ter uma média de acerto de aproximadamente 87,17\%.

Foi observado que os alunos apresentaram maior dificuldade na parte de calcular a área do trapézio e do losango nas demais figuras não tiveram dificuldades.

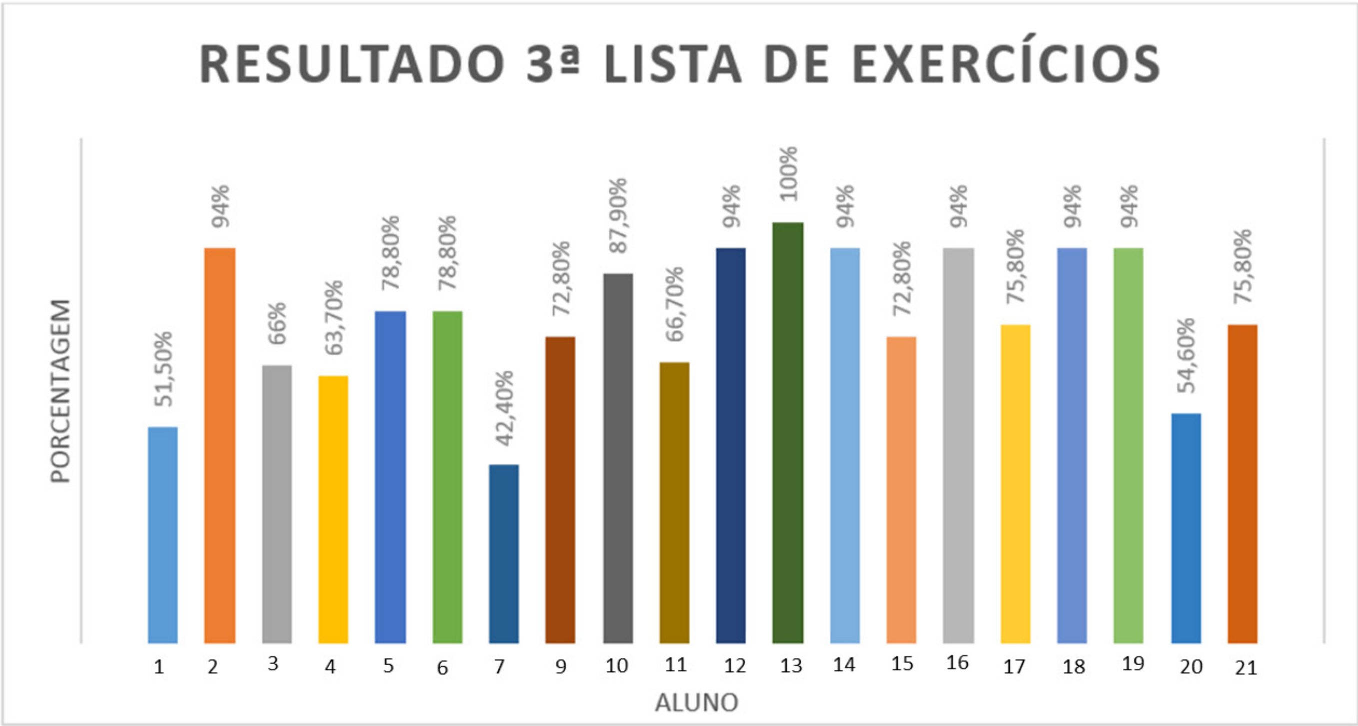
Como esses alunos apresentaram dificuldade, a correção foi realizada em sala e pedimos que eles copiassem essas questões no caderno.

4.5 Quinto Dia do Projeto

O último dia de projeto consistiu em resolver exercícios de matemática que envolviam área pintadas e exercícios onde era preciso dividir figuras para se chegar a um resultado.

Após a explicação por parte do pesquisador aos alunos foi dado a eles uma lista de exercícios para resolverem, obtendo o seguinte resultado.

Figura 8 - Gráfico representando o resultado da terceira lista de exercícios



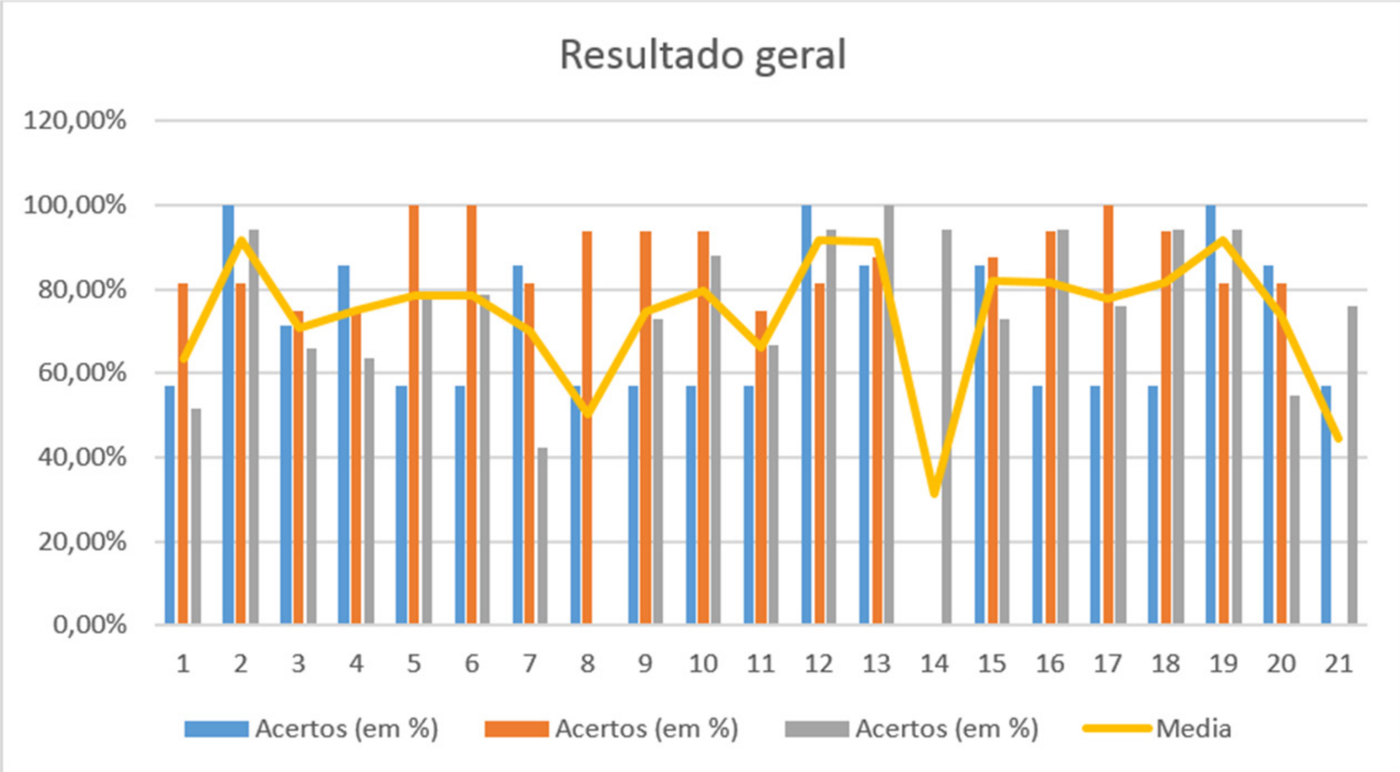
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Observa-se que apenas 3 alunos ficaram abaixo da média nessa atividade os outros 17 alunos ficaram acima da média.

Dessa forma, a média de acerto da turma é de 77,58\% e, com isso, podemos considerar o resultado satisfatório.

O gráfico a seguir mostra a média dos alunos nas 3 atividades, nos levando a percepção de que os alunos que ficaram abaixo da média foram os que faltaram a atividade.

Figura 9 - Média geral dos alunos



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117

Pode-se observar que apenas os alunos 8, 14 e 21 ficaram abaixo da média (60\%) pois os mesmos faltaram alguma das atividades, se não fosse por isso, talvez não tivessem ficado abaixo da média.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral, o laboratório teve resultados positivos, pois conseguimos sair da teoria e aplicar o conhecimento na prática.

No início os alunos demoraram um pouco para se adaptar ao material didático, mas a partir da segunda aula pegaram um excelente ritmo, pois conseguiram assimilar a ideia que era proposta a eles.

Encontramos algumas dificuldades no caminho. Eles tiveram dificuldade de entender a demonstração da área do trapézio, losango e círculo, por conta da álgebra que envolve a demonstração. E fica aqui uma sugestão para trabalhos futuros, escrever um trabalho que ensine de forma lúdica a álgebra.

Os alunos relataram que ficaram mais confiantes para a prova do ENEM e teve um deles que conseguiu usar os conhecimentos adquiridos na pratica do dia a dia. Isso foi gratificante.

Outro aluno disse que agora tem o sonho de cursar matemática e ser um professor. É muito satisfatório saber que plantamos a semente do conhecimento em cada aluno, saber que não foi apenas uma aula para ensinar geometria plana e sim uma aula que os motivou a continuar os estudos.

Não pretendemos parar nesse trabalho, pois foi uma experiência prazerosa esta pesquisa. Essa é uma lição para a vida. Outros trabalhos virão nessa mesma linha de pesquisa, apenas mudando o assunto, por exemplo: geometria espacial, funções, análise combinatória e probabilidade.

A ideia é montar um laboratório para cada série do ensino médio e depois ampliar para o ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

BRASIL**. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, livro 3/ Secretaria de Educação Fundamental: Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental: Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Matemática, Secretaria de Educação Fundamental, Parte III: Brasília: MEC/SEF, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricula**r: Matemática, Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

BRASIL. **Decreto Nº 19.890 de 18 de abril de 1931. Dispõe sobre a organização do ensino secundário** Rio de Janeiro, RJ, 18 abril de 1931.Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html. Acesso em: 11 de agosto de 2018.

BRASIL. **Lei Nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências.** Brasília, DF, 11 de agosto de 1971. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. Acesso em: 11 de agosto de 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar 9**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FARIAS, A. S. **Laboratório de geometria: aplicação do geoplano no ensino do cálculo e nas demonstrações de fórmulas de áreas das figuras planas.**: PROFMAT Dissertações, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171040117. Acesso em: 1 de outubro de 2020.

FERREIRA, P.S. M. **O uso do Geoplano Digital em sala de aula como proposta para cálculo de áreas dos Quadriláteros**: PROFMAT Dissertações, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=29084. Acesso em: 11 de agosto de 2018.

História da Geometria.: Disponível em: \https://www.somatematica.com.br/geometria.php. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores** 3. ed. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática** 3. ed. Campinas, SP: Autores associados, 2010.

MOURA, M. 0. **Materiais Pedagógicos para o Ensino de Matemática**: Disponível em: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/geoplano.htm. Acesso em: 11 de agosto de 2018.

PINHEIRO, R. P. **Aplicações do Geoplano no Ensino Básico**: PROFMAT Dissertações, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1353. Acesso em: 11 de agosto de 2018.

Sistema Ari de Sá: **Raio X ENEM**.: Disponível em: http://portalsas.com.br/raiox/download/raiox_2017.pdf. Acesso em: 12 de agosto de 2018.

TIGGEMANN, I. S.; COUTO, K. B.; MARQUES, M. C. B.; BARBOSA, R. M.; ALMEIDA, S. T. **Geoplano e redes de pontos** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

ZUIN, E. de S. L.: **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações**: Disponível em: http://www.25reuniao.anped.org.br/excedentes25/elenicezuint19.rtf. Acesso em: 20 de agosto de 2018.

CAPÍTULO 2

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL A PARTIR DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVIES: apontamentos e reflexões

Valderlândio de Araújo Pontes[1]

Lusitonia da Silva Leite[2]

Celina Amélia da Silva[3]

1 Mestre, Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) - valderlandiopontes@gmail.com
2 Doutora, Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) – lusitonialeite@professor.br
3 Doutora, Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) - celina_amelia@yahoo.com.br

RESUMO

O artigo trata do recorte de uma pesquisa de mestrado. O objetivo é apresentar alguns apontamentos e reflexões sobre o ensino de geometria plana e espacial a partir da utilização de materiais manipuláveis. É uma pesquisa de abordagem qualitativa, exploratória discursiva. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de duas turmas do 1ª ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual. Os dados foram produzidos em minicurso, ministrados pelo pesquisador, considerando descritores matemáticos contemplados no simulado mais IDEB. Considera-se na análise dados o desempenho dos alunos em testes aplicados antes e após realização do minicurso, em que, com uma turma utilizaram-se objetos concretos manipuláveis como recurso de ensino, com a outra turma não. Os resultados confirmam que a utilização de materiais concretos como recurso de ensino favorece a aprendizagem matemática dos alunos e contribuir com a prática pedagógica do professore, com reflexos positivo para o ensino e aprendizagem de ambos.

Palavras-chave: Material concreto. Ensino aprendizagem. Geometria Plana e Espacial. Ensino Médio.

1. INTRODUÇÃO

O pano de fundo que inspirou o delineamento da pesquisa baseou-se em inquietações docentes, que ao longo de suas práticas docentes têm constatado aprendizagens deficitárias dos alunos da educação básica, principalmente em matemática. Este fato se evidenciou nos resultados das avaliações externas, em que os alunos não conseguiram atingir as metas estipuladas pelo INEP.

Segundo levantamento do Sistema Ari de Sá, publicado pelo Guia do Estudante no dia 17 de fevereiro de 2017, a maioria das questões das avaliações externas e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) são baseadas em conteúdos ensinados no Ensino Fundamental e entre os quatro mais exigidos nas provas de Matemática no período de 2009 a 2016 estão Geometria (26,3%), Aritmética (12,8%), Escala, razão e proporção (12,1%) e Funções (9%).

Em vista destas informações e das metas não alcançadas nas avaliações do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), em 2015, a Secretaria de Estado da Educação (SEDUC) do Maranhão realizou no final do primeiro período de 2017, simulados diagnósticos em Matemática e Língua Portuguesa, nos três anos do Ensino Médio, tendo em vista a aplicação de avaliação externa que ocorreria em 2019, constatando que as questões que envolveu Geometria e Funções estão entre as que os alunos menos dominavam.

A partir destes dados emergiu os Simulados Diagnósticos Mais IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), realizados pelo governo do Estado do Maranhão nas três séries do Ensino Médio, o qual faz parte do plano de iniciativas do governo do Estado do Maranhão para implementar ações estratégicas, a fim de elevar os índices das avaliações externas do estado, especialmente em Matemática e Língua Portuguesa.

O Simulado acima referenciado revelou baixo rendimento dos alunos do ensino médio em várias habilidades dessas áreas de conhecimento, principalmente em geometria. A partir destes dados, considerando os recorrentes baixos índices de desempenho de alunos das escolas públicas brasileiras na Prova Brasil, exame preparado pelo Ministério da Educação e aplicado às escolas da rede pública estadual, municipal e federal, para verificar a qualidade de ensino no ano inicial e final do Ensino Fundamental II, 5º e 9º ano e do ensino médio; as elevadas taxas de evasão, de reprovação e desinteresse dos alunos pela matemática, advieram inquietações que motivaram realizar a investigação, da qual este *Popper* é recorte.

O desafio para empreender a investigação partiu da análise do Simulado Mais IDEB, conteúdo específico Geometria Plana e Espacial, realizado pela SEDUC, a partir da qual se verificou que, neste conteúdo o índice de não assertividade foi 26% (ARI de Sá, 2017). Desta constata, emerge o interesse de, além de realizara a pesquisa, contribuir com a aprendizagem dos alunos do 1º ano do ensino médio.

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) Ensino Médio (BRASIL, 1999) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC, 2017), encontram-se indicativos de que a proposta de ensino para os conteúdos matemáticos, no Ensino Médio, deve primar por um tratamento didático específico, contextualizado e prático, que respondam ao desenvolvimento de competências e habilidades amplos.

Estas indicações, expressas nos documentos diretivos, apontaram para o seguinte questionamento: A utilização de materiais didáticos manipuláveis como recurso de ensino, pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de 1ª ano do ensino médio, tendo em vista o conteúdo Geometria Plana e Espacial? Ou ainda: seria possível despertar o interesse e melhorar o rendimento dos alunos da 1ª ano do Ensino Médio, em Geometria Plana e Espacial, através da utilização de materiais manipuláveis, para ensinar este conteúdo?

Partindo destas indagações objetivou-se investigar as contribuições da utilização de materiais didáticos manipuláveis como estratégia de ensino e aprendizagem de Geometria Plana e Espacial, a partir do respaldo teórico de Lorenzato (2006), Fiorentini e Miorim (1990), para os quais, os recurso didáticos manipuláveis são importantes subsídios para o ensino, por tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, aproximação entre teoria e prática, o que pode implicar para a abstração da matemática. Em função da impossibilidade de trazer os resultados da pesquisa na integra, optou-se por apresentar alguns apontamentos e reflexões sobre o ensino de geometria plana e espacial a partir da utilização de materiais manipuláveis.

Os dados da pesquisa foram produzidos a partir de minicursos ministrados pelo pesquisador, tendo como diretrizes de ensino nos aspectos conceituais, descritores (D) matemáticos contemplados no Simulado Mais IDEB, aplicado aos alunos da escola, pela SEDUC (Secretaria de Estado da Educação). Os sujeitos da pesquisa foram 28 alunos de duas turmas (A e B) do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública estadual de São Luís Maranhão.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa foi elaborada, desenvolvida e discutida sob a perspectiva qualitativa, identificada como pesquisa-ação. Bogdan e Biklen (1994), com os quais comungamos com as suas ideias, destacam que na investigação qualitativa [...] "a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p.47), ou seja, o investigador insere- se no ambiente a ser pesquisado e obtém os dados, no contato direto com sua fonte de pesquisa, sendo que "os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto estudado" (p.48). Também, porque "a investigação qualitativa é descritiva" (p.48). "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p.49). O que implica inferir que os dados não são recolhidos com o objetivo de confirmar ou não alguma hipótese, ao contrário, "as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (p.50). Os investigadores estão interessados nas percepções particulares dos sujeitos, "no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas" (p.50). E Tripp (2005, p. 445), afirma que a pesquisa qualitativa na perspectiva da "[...] pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos", o que se coaduna com o motivo pelo qual esta pesquisa foi idealizada e realizada.

2.1 O contexto da pesquisa

O contexto de realização da pesquisa teve o seguinte panorama: O IDEB, Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), foi instituído para medir, entre outros índices, a qualidade do aprendizado dos alunos, em nível nacional e estipular metas a serem alcançadas por todos os níveis de ensino em todos os estados brasileiros.

Para o ensino médio, no estado do Maranhão, a meta do IDEB, em 2015, foi 4,3 e a meta alcançada pelo estado ficou em 3,8. Vale ressaltar que em 2015, o IDEB da escola onde a pesquisa foi realização ficou em 3,3, distanciando-se ainda mais da meta estipulada pelo IDEB do estado naquele ano (BRASIL, 2017).

Em função desta problemática, foram pensados e estruturados, a partir de um plano de iniciativa do governo do Estado do Maranhão, os Simulados Diagnósticos, Mais IDEB, ações estratégicas governamentais, a fim de medir e implementar ações estratégicas para elevar os índices da qualidade da aprendizagem dos alunos em Matemática e Português.

Partindo deste contexto, um minicurso e, no interior deste, três oficinas, foram elaborados, com a proposta de desenvolver atividades de ensino, tendo com referência os Descritores (D) matemáticos propostos nas Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2013) e na BNCC (2017), os quais indicam as Competências e Habilidades de ensino e aprendizagem matemática, que os alunos devem desenvolver.

Assim, a pesquisa foi arquitetada, e realizada com 28 alunos de duas turmas (A e B), do 1º ano do Ensino Médio, turno vespertino de uma escola pública estadual de São Luís Maranhão.

O desenvolvimento das atividades de pesquisa teve como proposta a realização de minicurso de 12 horas aulas em cada turma (A e B), 24 horas aulas no total. Cada momento aula teve duração de 4 horas aulas, denominadas oficinas, totalizando três oficinas em cada turma, isto é, 12 horas aulas, em cada turma (A e B).

As oficinas tiveram como objetivo desenvolver a aprendizagem dos alunos, sob a perspectiva das competências e habilidades requeridas em cinco descritores matemáticos, em dois eixos, quais sejam: **(eixo) I – Espaço e Forma –** descritor **(D3)** – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas; descritor **(D4)** – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema; **(eixo) II – Grandezas e Medidas –** descritor **(D11)** – resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas; descritor **(D12)** – resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas (quadrado, quadriláteros, retângulos, triângulo equiláteros, isóscele e escaleno) e **(D13)** – resolver problema envolvendo a área total e volumes sólidos (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

2.2 Estratégias de ensino

Nas duas primeiras oficinas, 6 horas, turma “A”, as estratégias de ensino envolveram problematização a partir de explanação oral com projetor de imagem, e utilização dos materiais concretos manipuláveis para possibilitar a interação dos alunos uns com os outros, a produção, manipulação e mensuração de materiais manipuláveis com fita métrica.

Os recursos didáticos utilizados nestas duas oficinas foram o Geoplano, Blocos lógicos planificados em cartolina e material emborrachado, elaborados e manipulados juntamente com os alunos. Os conteúdos trabalhados foram figuras planas, e os objetivos foram identificar os elementos fundamentais das figuras planas (face, lados, vértices); medir e anotar as dimensões as dimensões para cálculo posterior mediante atividades propostas para atingir estes objetivos, contemplando, assim, os descritores (D4), (D11) e (D12).

Nas duas primeiras oficinas, 6 horas, turma "B", as estratégias de ensino envolveram problematização a partir de explanação oral com projetor de imagem, e realização de atividades orais e escritas, ou seja, não se utilizou recursos manipuláveis em nenhum momento no decorrer da realização das atividades, nesta turma.

Nas duas turmas (A e B), as estratégias e a lógica de medição foram problematizadas tanto nas explicações orais, quando nas atividades e testes, objetivando o cálculo de perímetros e áreas, isto é, identificação de cada figura plana, seus vértices, faces, arestas e cálculos envolvendo as suas possíveis algebrizações.

Partindo da identificação das figuras planas e de seus elementos e algebrizações, em uma oficina de 4 horas, apresentou-se aos alunos da turma "A" a geometria envolvida nos sólidos geométricos, utilizando-se os materiais manipuláveis - kit de áreas e volumes, poliedros de palitos de bambu, sólidos geométricos rígidos e planificáveis – os quais possibilitaram visualização, identificação e medição das suas dimensões e cálculo de suas áreas e volumes, contemplando, assim os descritores (D3) e (D13). A resolução de problemas esteve explicita, principalmente nos enunciados de cada atividade, possibilitando a leitura, interpretação e tomada de decisão mediante cada atividade, fossem orais ou impressas.

Na turma "B", a estratégia de desenvolvimento do ensino abordou problematização, aula expositiva e dialogada com a apresentação utilizando projetor de imagem e material impresso para resolução de atividades. Por fim, na última oficina de 4 horas, para cada turma, foi realizada a última atividade teste, sem a utilização dos materiais manipuláveis, em nenhuma das turmas, os dados, em que, alguns deles são apresentados e discutidos nos resultados e discussões deste texto.

3. O ENSINO DA GEOMETRIA POR MEIO DE MATERIARIS MANIPULÁVIS

Geometria é uma palavra de origem grega, em que *geo* provém de *gaia*/terra e *metria* de *métron*/medida. Esta definição advém do fato de que a Geometria faz parte da vida do ser humano desde a antiguidade, sendo uma das primeiras áreas da ciência a serem estudada por conta das suas características extremamente presentes nas práticas sociais dos povos antigos.

De fato, os primeiros registros apontam que a Geometria surgiu da necessidade de medir terras e delimitar espaços geográficos a partir de medições e demarcações com cordas, o que implica compreender que este conhecimento está intrinsecamente ligado às necessidades contextuais dos seres humanos (STEWART, 2005).

Contudo, note-se que o conhecimento da geometria, como da matemática de modo geral, embora reconfigurado aos modos dos tempos hodiernos, a lógica das suas representações e resultados delas advindas, nunca se tornaram obsoletas. Assim, "o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento do conhecimento mais amplo e abstrato, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo" (BRASIL, 2008, p.17), fazem parte dos objetivos de aprendizagem que alunos do ensino médio devem desenvolver, ao longo dos três anos deste nível de ensino.

Em contraposição às diretrizes apontadas acima, Lorenzato (2006) denuncia a displicência com que a Geometria é tratada pelas escolas, nos seguintes termos:

> A geometria está ausente e deficiente na educação brasileira devido à inúmeras causas, das quais, destacam-se dois fatores que estão diretamente ligados à sala de aula: muitos professores não possuem os devidos conhecimentos exigidos para lecionar tal disciplina e a supervalorização do livro didático. Tais fatores acabam refletindo uma educação voltada à memorização de fórmulas e conceitos, com exercícios voltados apenas a resolução de exercícios, sem atividades práticas que facilitem o aprendizado do conteúdo.

Dito isto, vale lembrar que quando Lorenzato chamou a atenção para esta deficiência do ensino em relação á geometria, pouco ou nada se falava em avaliações externas, menos ainda era destacada a pertinência da presença de modos de se ensinar que levassem os alunos a compreenderem a geometria como um conhecimento articulado com as representações que fazem parte do cotidiano, como se podem observar nos objetos dos mais variados tipos e modelos, como o é a Geometria Plana e Espacial.

Nesse sentido, a proposta de ensino apresentada na metodologia deste trabalho, visa contemplar o ensino e a aprendizagem de conteúdo matemático Geometria Plana e Espacial, com alunos do 1º ano do ensino médio, tendo em mente que esse é um assunto de reconhecida importância, claramente expresso em diretrizes curriculares nacionais (BRASIL, 2008), portanto deve ser tratado com atenção e regularidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2008) destacam que a capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vistas, são condições necessárias à coordenação espacial e esse processo está intimamente relacionado à construção do pensamento geométrico, o qual se torna mais fortemente assimilado, se o for apresentado por meio de representação, que se possam manipulá-las, montá-las e desmontá-las, mensurá-las e sistematizá-las algebricamente.

Ampliando e indicando possíveis direcionamentos para o delineamento de ações que corrobore e respalde o tratamento que deve ser dado aos recursos de ensino e aprendizagem da matemática, Santos (2015, p. 29) esclarece o seguinte:

> Faz-se necessário pensar sobre os métodos e materiais concretos a serem utilizados, pois, no ensino e aprendizagem da matemática é a atividade mental a ser desenvolvida, ou seja, em cada aplicação deve haver um planejamento coerente, visando instigar a percepção de conceitos abstratos. Os professores também devem estar atentos de que noções matemáticas são formuladas na cabeça do educando e não está no próprio material; o material favorece o aprendizado, desde que seja bem utilizado.

A compreensão expressa acima evidencia a importância de se utilizarem recursos didáticos para trabalhar os conteúdos matemáticos visando atingir os conceitos abstratos desta ciência, mas com a ressalva de que o material didático é um meio e não o fim. Ou seja, fica evidente que a inserção de materiais concretos no ensino de matemática, especificamente de Geometria, desde os primeiros anos escolares contribui para a compreensão dos conteúdos e para o desenvolvimento do raciocínio lógico, desde que essas ferramentas sejam utilizadas juntamente com atividades que visem contemplar os objetivos de aprendizagem relativos ao do conteúdo específico.

4. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO

A proposta de se utilizarem recursos didáticos manipuláveis nas aulas de matemática não é recente. Desde que Jan Amos Komenský, conhecido no Brasil por Comenius (1592-1670), publicou sua Didática Magna, recomendando que fossem utilizados os mais diversos tipos de recursos didáticos nas aulas para ensinar, que os recursos didáticos manipuláveis, nas mais diversas configurações, foram tomando forma e concretude, com o argumento de que a partir de tais recursos seria possível “desenvolver uma melhor e maior aprendizagem”.

Daí surgiu a ideia de utilização dos recursos manipuláveis nas aulas de matemática, inclusive, “Comenius, defensor de uma escola aberta a todos, acreditava que a aprendizagem deveria ser concebida por meio do lúdico e da manipulação de objetos, indo do concreto ao abstrato” (LORENZATO, 2006, p. 3). Ideias estas que se cumtrapunha à educação elitista, defendida pela Igreja Católica, implantada e desenvolvida no Brasil por muito tempo, pelos padres Jesuítas, de tal modo que até hoje há fortes requícios deste pensamento impregnado nas práticas de muitos professores (LORENZATO, 2006).

Nos séculos seguintes, entre outros, surgiram educadores como Pestalozzi

(1746-1827) e Froëbel (1782-1852) e, mais a frente, final XIX até metade do século XX, muitos pensadores defendiam o ensino pelos concretos manipuláveis.

De acordo com esses autores, Locke (1632-1704) já defendia que só se aprendia pela experiência, pela tentativa de erro e acertos. Rousseau (1712-1778) via nos objetos fortes aliados para desenvolver a aprendizagem. Fröebel (1782-1852) considerava a fase infantil um período importante, criou os jardins da infância e alguns materiais manipuláveis para o ensino, inclusive jogos e brincadeiras para desenvolverem habilidades matemática. Dewey (1859-1952) defendia a união da teoria e prática, por meio de questionamentos e reflexão, partindo sempre do concreto. Montessori (1870-1952) desenvolveu uma série de materiais pedagógicos manipuláveis, pois defendia que a aprendizagem dava-se a partir do vê, do toque. Cuisenaire (1891-1976), a partir das dificuldades de seus alunos em aprender Matemática, criou um material para trabalhar frações entre outros assuntos, conhecido por Barra Cuisenaire, depois, batizado de Material Cuisenaire (). O matemático húngaro Dienes (1916) elaborou, na década de 1950, material de madeira para trabalhar o raciocínio lógico, conhecido por Blocos Lógicos.

Lorenzato (2006), Gaertner e Backes (2007) revelam que muitos educadores acreditam e defendem o uso de materiais manipuláveis para mediar e facilitar o processo de ensino e de aprendizagem, em especial, ciências e matemática, e o usam até então.

Assim, basicamente, as propostas de ensino pelo concreto se baseavam na lógica de que a atividade de crianças, jovens adultos, sobre os objetos manipuláveis, seria o principal passo para uma “educação ativa”. Deste modo, “[...] na concepção destes educadores, as descrições deveriam preceder as definições e os conceitos nasceriam da experiência direta e das operações que o aprendiz realizava sobre as coisas que observasse ou manipulasse” (LEITE, 2009, p. 89).

O movimento da Escola Nova, ou Escolanovista, teve início no Brasil em 1882, a partir das ideias de Rui Barbosa (1849-1923), movimento que surgiu na Europa, inspirado nas ideias de John Dewey. A Matemática, nesse período era ensinada por definições, axiomas e postulados, de forma desligada da realidade, fechada e pronta, ensino denominado, hoje, de tradicional.

Assim, a partir das contribuições deste e muitos outros pensadores, principalmente de John Dewey (1859-1952), seguido de Jean Piaget (1896–1980), entre outros, dentre idas e voltas nos embates ideológicos e práticos, as discussões resultaram no desenvolvimento e sistematização do movimento da Escola Nova; a questão dos métodos de ensino emergiu como pauta de discussão; o pensar em como se aprende, tomou relevância; os métodos ativos de ensino despontaram como possíveis soluções para os problemas de ensino e aprendizagem.

Na década de 1920, a Escolanovista ganha mais adeptos, destacando-se a participação de Anísio Teixeira, Everardo Backheuser e Euclides Roxo, movimento firmado em 1932, com a publicação do Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova (LORENZATO, 2006.).

Outros fatores que contribuíram para a implantação e ampliação do uso dos materiais manipuláveis no ensino foram os primeiros cursos de formação de professores, na década de 1930, à época, por meio de disciplinas pedagógicas, no caso, Didática e Metodologia do Ensino de Matemática.

Em 1942, por meio da Reforma Capanema, institui-se o ensino secundário, denominado ginásio, com duração de quatro anos, e colegial com duração de três anos, hoje denominado ensino médio.

Nas décadas seguintes, anos 50, é criada a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES) com a finalidade de capacitar professores para lecionarem nesses níveis de ensino. Para isso, foram contratados educadores para ministrarem os cursos, destacando-se Júlio Cesar de Mello e Souza (Malba Tahan), Irene Albuquerque, Manoel Jairo Bezerra, João Gabriel Chaves, Ceres Marques de Moraes, Maria Edmee de Andrade Jacques da Silva e António Hildebrand. Esses educadores estudaram, criaram e usaram diversos materiais, escritos e manipuláveis, com o objetivo de tornar o ensino da matemática mais concreto, e a finalidade era sempre estimular os alunos às descobertas por meio da experimentação (GAERTNER e BACKES, 2007).

Impulsionando as discussões sobre métodos de ensino, se pode identificar a realização dos cinco Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática, em variadas cidades brasileiras - Salvador: Universidade da Bahia, 1957; Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1959a; Rio de Janeiro: CADES-MEC, 1959b; Belém: CBEM, 1962; São José dos Campos, SP: CBEM, 1966 (FIORENTINI, 2006).

Vale ressaltar que de 1964 a 1970, há um período obscuro em que prevaleceram mais retrocessos que avanços no desenvolvimento de todos os aspectos sócio culturais, científicos, com o Regime Militar, quando vigorava o Governo Ditatorial, que se estendeu entre 1964 e 1985. As discussões retrocederam, mas nos anos 70, iniciam-se novos rumos para a educação, que culmina com a promulgação de legislação educacional, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 5.692/71, promulgada em 1971, e o Plano Setorial de Educação e Cultura (PSEC), que passaram a vigorar; também os projetos federais Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio (PREMEM) e Programa de Expansão e Melhoria de Ensino (PREMEN), momentos em que se iniciam novas tentativas de avanços nas discussões sobre os modos de ensinar (FIORENTINI, 2006).

No início da década de oitenta, no auge do desenvolvimento do PREMEN/MEC/IMECCUNICAMP7, iniciado em 1972, nasce o Movimento da Educação Matemática (MEM), o qual resulta da preocupação de se buscar novas alternativas para a melhoria e qualidade do ensino, após o fracasso Movimento da Matemática Moderna (MMM), Tendência Construtivista que culminou nos anos 60 (FIORENTINI, 2006).

Este autor revela que os construtivistas, substituem a prática mecânica e associacionista "[...] por uma prática pedagógica que visa, com o auxílio de materiais concretos, à construção das estruturas do pensamento lógico-matemático e/ou à construção do conceito de número e dos conceitos relativos às quatro operações" (p. 19).

Neste contexto, a partir de análises crítica da maneira que se ensinavam Matemática, novas abordagens para trabalhar esta ciência em sala de aula, novos métodos e recursos para melhorar a relação ensino-aprendizagem, se configuram, surgindo uma tendência conhecida por Empírico-Ativista. Para Fiorentini (2006), é nessa tendência pedagógica que emerge a preocupação e diferenciação entre o que ensinar e de que forma ensinar, desviando as atenções centradas no professor e voltando-se o olhar para o aluno, o afastamento da concepção puramente tradicional do ensino, toma forma de mudança de papeis, o professor não sendo mais dono do saber.

> Por intermédio deste modo de pensar, o professor deixa de ser o elemento fundamental do ensino, tornando-se orientador ou facilitador da aprendizagem e o aluno passa a ser considerado o centro da aprendizagem – um ser "ativo". "Os métodos de ensino consistem nas "atividades" desenvolvidas em pequenos grupos, com rico material didático e em ambiente estimulante que permitia a realização de jogos e experimentos ou contato – visual e tátil – com materiais manipuláveis". (FIORENTINI, 2006, p. 9).

Neste âmbito, as ideias interacionistas de Jean Piaget ganham força e as práticas pedagógicas a partir do uso de recursos didáticos manipuláveis no auge das discussões, emerge o movimento da Educação Matemática e, com ele, cinco tendências de ensino: Jogos Matemáticos, Resolução de Problemas, Modelagem, Etnomatemática, História da Matemática, as quais apontam o uso de computadores, como inovação para o ensino.

Com a disseminação dessas tendências, ampliam-se o uso e a diversificação de materiais manipuláveis no ensino, com a proposição de mediarem a relação professor-aluno-saber e, como consequência, diversos nomenclaturas aparecem para designá-los: materiais manipuláveis, materiais concretos, recursos didáticos, são alguns deles (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Perante tais nomenclaturas, argumentos e recomendações, para o uso dos recursos didáticos manipuláveis ou materiais manipuláveis, tomaram dimensões de estudos e experimentações na prática, atraindo a atenção de pesquisadores e professores, de modo que, no Brasil, essa tendência de ensino se constitui até hoje, como uma prática recorrete (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Para fins didáticos pedagógicos, há diversas indicações e ressalvas sobre a sua utilização, mas sem exceção, relatos de experiências e as orientações das mais variadas pesquisas apontam que "[...] cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem, mas o material em si mesmo, tem pouca ou nenhuma valia" (LORENZATO, 2006, p. 4).

Sob esta ótica, de o material didático em si mesmo, não gerar resultados diferenciados no ensino por parte do professor e na aprendizagem dos alunos, o é ressaltado é que são os objetivos e finalidades de ensino e aprendizagem idealizados e praticados pelo professor e por seus alunos que fazem a diferença, e não o material em si.

De qualquer modo, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCN, 2013), em relação a conceber o conhecimento e modos de apreendê-lo, aponta para o seguinte entendimento:

> [...] compreende-se o conhecimento como uma produção do pensamento pela qual se apreende e se representam as relações que constituem e estruturam a realidade. Apreender e determinar essas relações exige um método, **que parte do concreto empírico** – forma como a realidade se manifesta – e, mediante uma determinação mais precisa através da análise, chega a relações gerais que são determinantes do fenômeno estudado (grifo nosso) (BRASIL, 2013, p. 161).

A Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017), ao reconhecer que por si só em nada vai mudar o ensino, evidencia proposições de produções de materiais didáticos, no concernente à formação inicial e continuada dos educadores, o que implica considerar que estes professores irão utilizar-se destes ensinamentos para implementarem as suas práticas.

> A BNCC por si só não alterará o quadro de desigualdade ainda presente na Educação Básica do Brasil, mas é essencial para que a mudança tenha início porque, além dos currículos, influenciará a formação inicial e continuada dos educadores, **a produção de materiais didáticos**, **as matrizes de avaliações e os exames nacionais** (grifo nosso) que serão revistos à luz do texto homologado da Base (BNCC, 2017, p. 5).

De qualquer modo, os conhecimentos matemáticos, como criação do homem é preciso ser concebido como construções sociais, históricas e culturais desenvolvidos por métodos específicos, que envolvem planejamento, ação e reflexões sobre as práticas pedagógicas executadas por cada professor, de acordo com as necessidades concernentes a cada conteúdo especifico. Porém, vale ressaltar que, como toda ciência, a Matemática tem um processo de constituição que é histórico, fruto da construção e desenvolvimento do próprio ser humano. Assim, ela foi se constituindo pelas necessidades humanas, sócio histórico culturalmente, para atender as mais diversificadas demandas da sociedade, por isso precisa ser um saber acessível a todos e todas.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para iniciar este tópico evidencia-se um relato da aluna MEP, turma "A", em que após a realização da primeira atividade. O conteúdo trabalhado foi Geometria Plana e os objetivos foram identificar os elementos fundamentais das figuras planas (face, lados, vértices) e medir e anotar as dimensões das figuras geométricas planas, a partir da circundação das figuras planas com fio de náilon e medição deste com fita métrica, para o cálculo de seus perímetros e áreas, contemplando, os descritores (D4), (D11) e (D12), citados na introdução.

Os recursos didáticos utilizados nesta oficina foram o Geoplano e Blocos lógicos planificados em cartolina e material emborrachado, e a fita métrica. Os objetos geométricos foram elaborados, manipulados e mensurados pelos próprios alunos. Após realizar a atividade, apresentá-la e pensar sobre o que tinha realizado, como se fosse uma realização nunca antes acontecida, MEP, turma "A", diz:

> Professor! Após a nossa apresentação e realização do teste inicial, quando fui para o intervalo, confesso que pensei em ir embora, pois tenho muita dificuldade com a Matemática e achava que não iria acompanhar, mas agora que estou percebendo que estava enganada. Quase eu perdia este momento (MEP, 2017).

O teste inicial a que MEP, se refere, foi realizado no início da primeira oficina, foi um teste de sondagem, com dez questões considerando os cinco descritores matemática, referenciados na introdução deste texto. Entretanto, após 30 minutos, a maioria dos alunos já haviam devolvido o teste e o restante não passou dos 40 minutos, fato que ocorreu nas duas turmas (A e B). Chamou atenção, no decorrer da realização do teste, ouvir, de alguns alunos, indagações e/ou comentários, por exemplo: "O que é mesmo perímetro?", "É para fazer o que nesta questão?", "Nunca tinha visto essa figura", "Não sei nada de matemática".

Não resta dúvida que os comentários dos alunos revelam dificuldades referentes à falta de habilidade deles em relação ao conteúdo de geometria e interpretação dos enunciados apresentados nas questões. Tanto que MEP diz: "pensei em ir embora".

Para Leite (2019), o relato da aluna revela muito mais que isso,

> [...] revela que há algo que precisa ser repensado e corrigido, porque se de fato eles não ouviram falar do assunto, há falha no ensino, na utilização do livro didático e na análise que se faz do contexto; se ouviram e não lembram, houve falha nas estratégias de ensino, em especial na contextualização do conteúdo, porque geometria plana e espacial são conteúdos que, em grande medida, se configuram em representações de imagens e formas presentes corriqueiramente no contexto social (LEITE, 2019, p.144).

No decorrer da socialização das atividades, realizadas no decorrer da primeira oficina, a própria aluna fez questão de ir à frente representar seu grupo e sua expressão facial demonstrou satisfação e felicidade ao apresentar a produção de sua equipe aos demais colegas de turma. Eles haviam produzidos triângulos, a partir dos quais deveriam identificar seus elementos, explicar e demonstrar no Geoplano as suas características e dimensões, as apresentando por meio das figuras produzida por eles com material emborrachado.

Nesse sentido, vale ressaltar o seguinte:

> É importante descobrir no ensino sua função essencial de socialização criadora e re-criadora de conhecimento e cultura, tornando-se este um processo que propicia a aquisição de conhecimento dos conteúdos das diferentes ciências, transformados em "conteúdos escolares", porque mescla, entre outros, operações de raciocínio, de abstração, e sentimentos e atitudes de curiosidade, sensibilidade, criticidade e criatividade (LEITE, PEDROSA, ARAGÃO, 2012, p.166).

Contudo, também é preciso refletir sobre o que ainda é rotineiro acontecer com o ensino da matemática, em que os alunos e também professores, por diversos motivos, não encontram possibilidades de conviver com o ensino e aprendizagem da matemática salutarmente. Sobre este aspecto pejorativo em relação à matemática, pesquisas recentes, manifesta esta constatação, a de que:

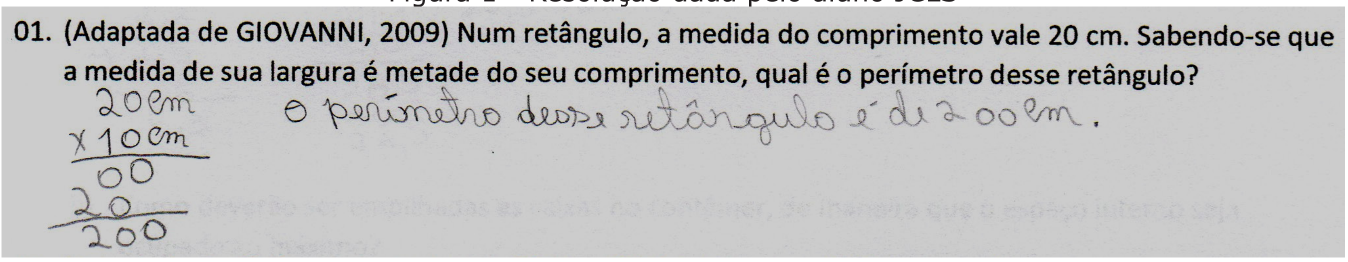
> O baixo rendimento na aprendizagem da Matemática e o desinteresse dos educandos são questões que, para muitos, se prolongam por toda uma vida acadêmica, essencialmente, na construção de barreiras no que diz respeito ao conhecimento dos conceitos matemáticos e na rejeição aos seus métodos de ensino (ANJOS E OLIVEIRA, 2021, p. 371)

Esta perspectiva colocada na citação acima reverbera os resultados de acerto médio nos dois testes, inicial e final, em que se pôde constatar em percentuais que, no teste inicial, as turmas apresentaram o mesmo percentual de acerto, ou seja, 16%. Entretanto, no teste final, depois da intervenção no decorrer das oficinas, a turma "A" apresentou índice de aprendizagem de 39%, enquanto a turma "B" não passou de 29%, dados que demonstram que a metodologia utilizada na turma "A", em se utilizou recursos manipuláveis para desenvolver a oficinas, foi mais eficiente que a da turma "B", em que não se utilizou tais recursos.

Comparando o desempenho apresentado pelas turmas nos dois testes, percebe-se que a turma "A" teve um crescimento de 23% entre o teste inicial e o final, enquanto B cresceu apenas 13%, ou seja, a turma "A" cresceu 10% a mais que a turma "B", o que se configura como alternativa viável de se trabalhar a geometria através de materiais concretos, de forma lúdica e diferenciada daquela praticada corriqueiramente.

Contudo, cabe ressaltar que todos os aspectos deficitários em relação aos conhecimentos matemáticos dos alunos puderam ser sanados. As atividades que segue apresentam dificuldades matemáticas dos alunos em níveis primários, o que, para saná-las caberia outras intervenções, senão vejamos, a atividade realizada pelo aluno JCLS.

Figura 1 - Resolução dada pelo aluno JCLS


01. (Adaptada de GIOVANNI, 2009) Num retângulo, a medida do comprimento vale 20 cm. Sabendo-se que a medida de sua largura é metade do seu comprimento, qual é o perímetro desse retângulo?

20cm
x10cm
00
20
200

o perímetro desse retângulo é de 200cm.

Fonte: Ponte, 2017

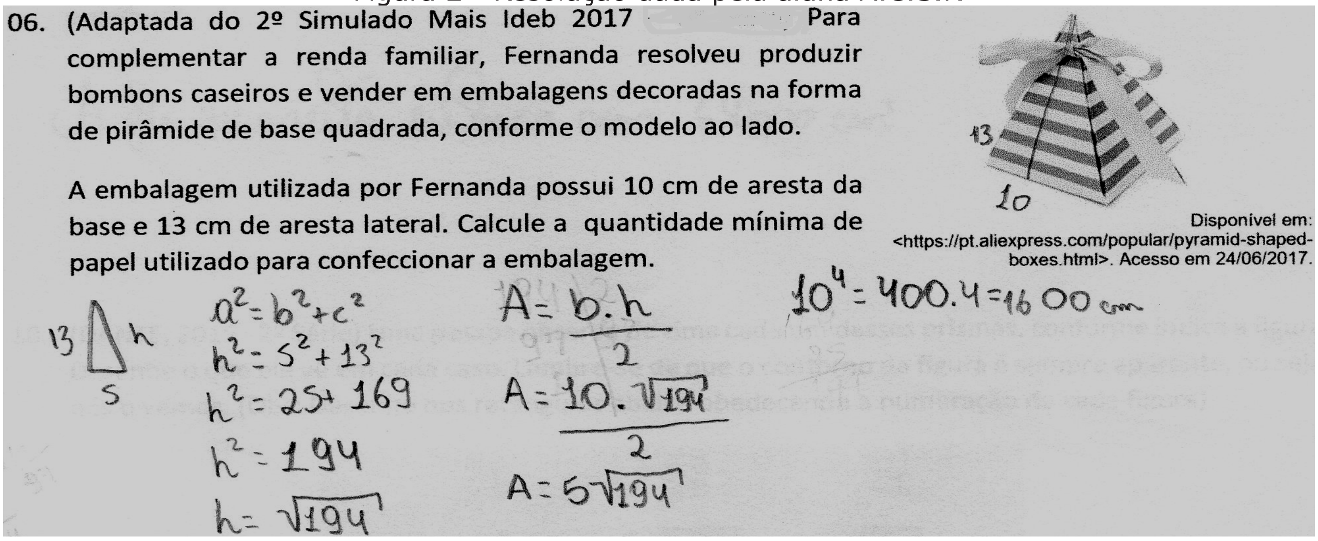
Nesta questão, percebem-se claramente nos cálculos, algumas dificuldades conceituais que o aluno ainda não conseguiu assimilar. Primeiro, de interpretação, a questão pedia perímetro e ele calculou a área; segundo, ele calculou a área e deu como resultado, como se estivesse calculado o perímetro. Ou seja, para o raciocínio que usou, efetuou corretamente os cálculos, mas os conceitos de área e perímetro ainda não estão claros para o aluno, porque ele encontra a área corretamente, mas a identifica como perímetro. Então, a diferença conceitual entre perímetro de área, portanto, é um ponto a ser trabalhado, mesmo tendo encontrado a medida correta da largura, que não estava explicita na questão.

Mediante esta resposta é possível identificar uma possível intervenção pedagógica, no sentido de que se trabalhem as diferenciações entre os conceitos de área e perímetro. Ou seja, “faz-se necessário proporcionar um ensino partindo do momento em que o aluno está, precisamente, considerar os pré-requisitos cognitivos matemáticos referentes ao assunto a ser aprendido pelo aluno” (LORENZADO, 2006, p.27).

A questão 6 tratou sobre o descritor D13, resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido, os alunos de ambas as turmas apresentaram dificuldades, inclusive dos alunos da turma “B”, nenhum acertou a questão. Um dos conceitos implícitoS na questão diz respeito a aresta da base que, sendo dado no problema, como foi o caso desta questão, exige que se tenha competência e habilidade com os conceitos relacionados ao triângulo retângulo, relativo à altura, para que este conceito se reverta em uma mudança na arquitetura da face do sólido, que no caso é uma pirâmide. Ou seja, a face da pirâmide precisa ser dividida em dois triângulos retângulos, em que a medida da base, necessariamente deve ser dividida na sua metade.

Após esta articulação de saberes intrínsecos à questão, para resolvê-la há uma trajetória considerável, nada que logicamente não possa está à altura de “qualquer aluno” que tenha concluído o ensino fundamental, como é o caso dos alunos sujeitos desta pesquisa, como teorema de Pitágoras, conceito de hipotenusa e catetos, entre outras articulações pertinentes aos conteúdos do ensino fundamental, especialmente trabalhados no 8º e 9º anos, vejamos a questão.

Figura 2 - Resolução dada pela aluna A.C.S.P.



06. (Adaptada do 2º Simulado Mais Ideb 2017) Para complementar a renda familiar, Fernanda resolveu produzir bombons caseiros e vender em embalagens decoradas na forma de pirâmide de base quadrada, conforme o modelo ao lado.

A embalagem utilizada por Fernanda possui 10 cm de aresta da base e 13 cm de aresta lateral. Calcule a quantidade mínima de papel utilizado para confeccionar a embalagem.

Disponível em: <https://pt.aliexpress.com/popular/pyramid-shaped-boxes.html>. Acesso em 24/06/2017.

Fonte: Ponte, 2017

Na resolução apresentada pela aluna traz alguns aspectos que demonstra o seu conhecimento sobre conceitos pertinentes à solução da questão, como a aplicação correta do teorema de Pitágoras, a fórmula do cálculo da área de um triângulo. Contudo, apesar de ela representar as arestas da figura e traçar a altura da face do triângulo corretamente, ao montar o triângulo retângulo, trocou a altura que passa a ser um cateto pela hipotenusa e, na sequência, errou o restante do cálculo, lógico.

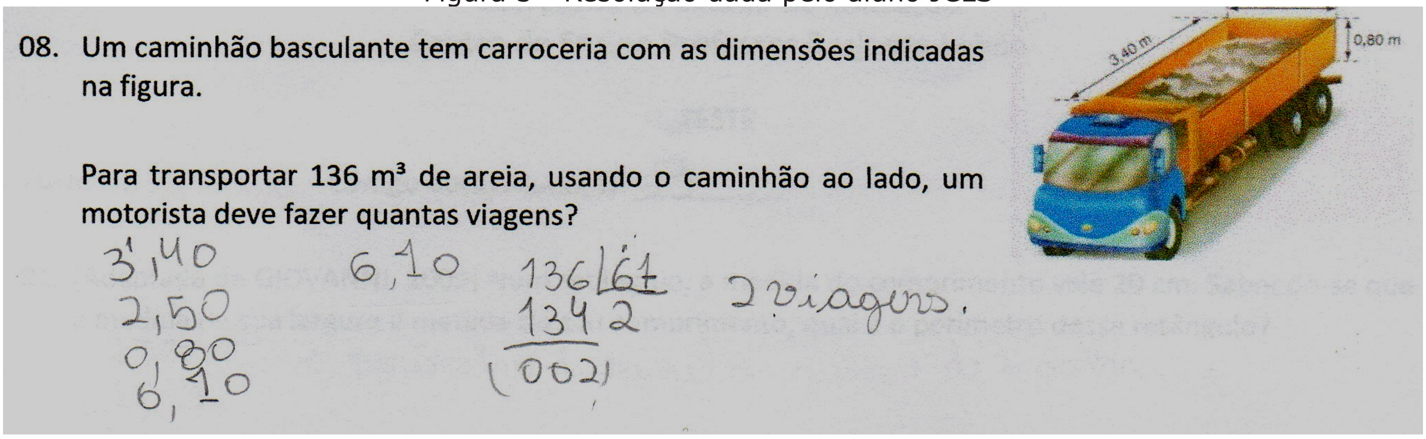
Destaca-se aqui, a pertinência da intervenção pedagógica, partindo da análise do erro cometido pela aluna. Nesta perspectiva, Cury (2015) defende que é necessário discutir os erros detectados em testes e ou atividades dos alunos, embora a tarefa exija tempo e determinação por parte dos professores, analisar as produções dos alunos permite entender, de forma clara, como os estudantes apropriam-se do conhecimento, o que sabem, os que não assimilaram ainda, e onde se podem intervir para propiciar a apropriação de novos conhecimentos. E mais ainda, além sugerir que está análise deve seja feita, porque o aluno não consegue esconder o seu erro, numa atividade que ele tenha de dissertar descritivamente a resposta, a autora chama atenção para a ineficiência de questões objetivas, porque neste caso que termina valendo são somente os erros, uma vez que os erros dos alunos em questões objetivas, nada dizem para uma intervenção pedagógica (CURY, 2015).

Neste sentido, a autora ressalta que o erro constitui ou deveria constituir um ponto de partida para a construção de novos conhecimentos, para o professor por conhecer as deficiências dos seus alunos, e para o aluno que teria novas aprendizagens em função de intervenções assertivas do professor.

Nesta mesma direção, Correia (2010) enfatiza que o erro não é, e não deve ser considerado um indicador do fracasso, mas uma alternativa para que o aluno construa o saber, a partir da intervenção pedagógica dos seus professores.

Paias (2009, p. 28) aponta como possíveis causas para o erro a "falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimento da língua materna ou de conceitos matemáticos". Ainda assim, diz o autor, para propor uma intervenção pedagógica coerente com as necessidades dos discentes, é preciso identificar, primeiramente, a causa do erro, e nada mais autêntico que as atividades realizadas por eles.

Figura 3 - Resolução dada pelo aluno JCLS



08. Um caminhão basculante tem carroceria com as dimensões indicadas na figura.

Para transportar 136 m³ de areia, usando o caminhão ao lado, um motorista deve fazer quantas viagens?

Fonte: Ponte, 2017

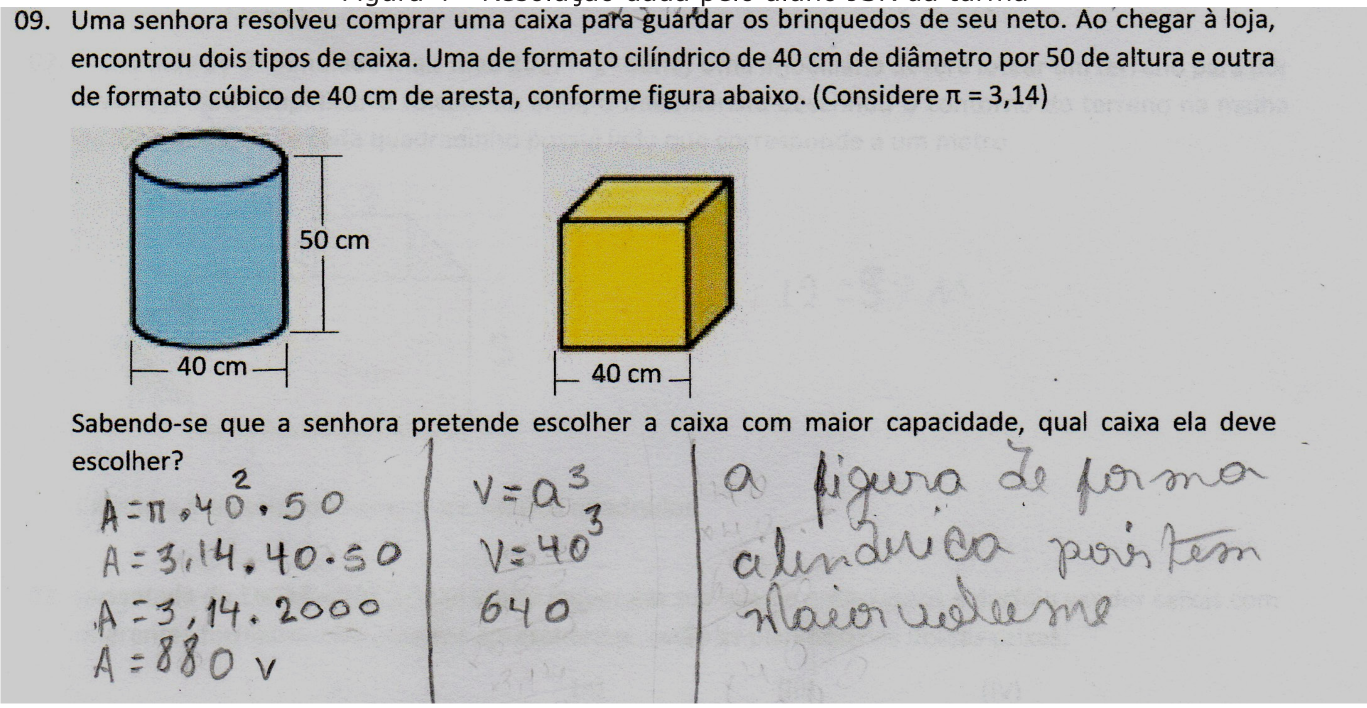
A Questão 8 da atividade final, exigia que os alunos tivessem habilidade com o cálculo de volume de um paralelepípedo retangular regular, habilidades requeridas pelo D13. As suas dimensões da caçamba são dadas na mesma unidade de medida, 3,40m de comprimento, largura 2,5m e altura 0,8m, o que a simplifica bastante, como mostra a figura acima. Então, a competência requerida implica em saber o conceito do cálculo de volume de um paralelepípedo retângulo regular, que nada mais é, senão multiplicar as três dimensões dadas, no caso totalizaria 6,8m^3. A resposta apresenta 6,7. O que ocorreu? Os valores foram somados ao invés de multiplicados, este foi o erro, que implica perceber que o conceito relativo a volume não foi assimilado pela aluna ACSP turma "A".

Importa observar ainda que, se a questão fosse objetiva, ela tinha acertado a resposta. A resposta, de fato, são duas viagens. Contudo, analisando os cálculos descritos é possível afirmar que a questão foi resolvida erroneamente.

Novamente, o erro aparece como elo, entre o ensino e aprendizagem, pois é possível identificar com clareza de detalhes, os pontos de desencontros entre o que pede a atividade e o que os alunos precisam aprender para dar conta dos conceitos nela envolvidos. Em Cury (2015), no livro – Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos – apresenta diversas possibilidades de intervenção. A leitura deste livro, por certo, auxiliará na fundamentação de atividades de ensino as quais valorizam as respostas dos alunos como ponto de partida para a compreensão e construção de práticas de ensino que revertam concepções de ensino de matemática como um conhecimento pronto e acabado.

Para a autora, a análise da produção dos discentes é uma metodologia de ensino, e não uma simples averiguação de erros e acertos. Considerando esta perspectiva de ensino, analisar os erros matemáticos cometidos pelos discentes, é uma atividade focada na relação entre o conhecimento matemático, o professor e o aluno, o reverbera positivamente na construção de saberes, tanto do professor em relação aos seus alunos, quanto destes em relação às competências e habilidades que têm de desenvolver em cada conteúdo matemático.

Figura 4 - Resolução dada pelo aluno JSR da turma


09. Uma senhora resolveu comprar uma caixa para guardar os brinquedos de seu neto. Ao chegar à loja, encontrou dois tipos de caixa. Uma de formato cilíndrico de 40 cm de diâmetro por 50 de altura e outra de formato cúbico de 40 cm de aresta, conforme figura abaixo. (Considere π = 3,14)

Sabendo-se que a senhora pretende escolher a caixa com maior capacidade, qual caixa ela deve escolher?

$A = \pi \cdot 40^2 \cdot 50$
$A = 3{,}14 \cdot 40 \cdot 50$
$A = 3{,}14 \cdot 2000$
$A = 880$ v

$V = a^3$
$V = 40^3$
640

a figura de forma cilindrica por ter Maior volume

Fonte: Ponte, 2017

Para conseguir o volume destes prismas, no caso do cubo, multiplica-se a sua aresta, 40 cm por ele mesmo, três vezes, ou seja, 40^3 cm. O cilindro, como tem o formato redondo, se tem que trabalhar com o conceito de Pi, que normalmente é fixo 3,14, e uma fórmula, volume = PI vezes raio^2 vezes a altura, ambos os conceitos o aluno demonstrou saber, porque todos estão demonstrados corretamente.

A resolução apresentada, contudo, mostra que a dificuldade maior está nas operações básicas, além de haver falta de atenção, pois apesar de as fórmulas estarem corretas, o volume do cilindro foi representado por “A” de área e não por “V” de volume. No cálculo do volume do cubo, ele elevou apenas o 4 ao cubo, depois acrescentou o zero, o que seria 64.000, virou 640, demonstrando, assim, dificuldades com o conceito de potenciação. Mais uma vez, emergem a necessidade de intervenção no sentido de potencializar esse aspecto errôneo cometido pelo aluno.

Perante as dificuldades de alunos, apresentadas nas atividades realizadas por eles, não há muito que tentar avançar no conteúdo sem que se trabalhem estes conceitos, que apesar de primários em relação à matemática, é preciso intervir para fazê-los avançar, uma possibilidade para uma intervenção prática, é inserir os materiais manipuláveis como recursos de ensino, mostrando na prática a diferença que há entre os resultados de cada operação.

> Uma forma de pensar o ensino, assumindo postura de fazer com que o aluno aprenda conceitos primários fundamentais para que possam evoluir, é colocar o conhecimento matemático como um fazer em construção, apresentando-o aos alunos, especialmente àqueles que sentem dificuldades, com modos diferenciados de ocupação nesse fazer, cujas atividades se constituam na ação de refletir, de fazer, de falar, vê e de construir, concluir e generalizar. Esta é a liberdade que as atividades pareceram com materiais manipuláveis pode permitir a cada participante desta pesquisa: favorecer o uso de suas próprias estratégias, de sua maneira de pensar, sentir e agir (LEITE, 2009, p. 172).

Em relação a materiais manipuláveis, 55% dos alunos já haviam tido experiência com alguns, como jogo da velha, dos quais 100% disseram que eles ajudam na visualização e compreensão dos conteúdos e tornam as aulas mais atrativas.

Na avaliação do minicurso, realizada depois do teste final, quanto aos critérios conceitos implícitos aos conteúdos, metodologia, recursos, didática do professor e tempo, sujeitos da pesquisa disseram o seguinte "O conteúdo estava muito bom. Eu nunca tinha feito um curso assim" (D.J.S); "Muito interessante, me fez abrir mais a mente para o assunto" (L.B.J.C); Usou materiais concretos, explicou cada um, formou grupos para trocarmos experiências, excelente metodologia" (S.S.A); "Foi interessante porque nunca tive um projeto igual a esse" (L.B.J.C.); "Foi bom, pois assim aprendemos mais e a aula se torna mais atraente" (ACSP); "Eu gostei muito, eu queria para ser assim sempre, eu aprendi muito" (LV); "Bem legal, paciente, ótimo professor. Queria que fosse meu professor de Matemática" (SCSA); "É bem legal. Seu método de ensino é bem eficaz. É paciente e tem bom humor" (ROR); "Pouco tempo. Gostei muito do ensino e acho que deveria ter mais tempo, porque isso é muito importante" (SSA); "Muito curto. Eu queria para durar mais. Eu gostei muito. O professor é muito bom. Ele explica muito bem"(LV).

Percebe-se que a aceitação dos minicursos foi bastante positiva, havendo uma ressalva apenas quanto ao tempo em ambas as turmas, o qual deveria ter sido maior. Na turma "A" mais da metade (55%) dos alunos afirmaram ter sido pouco tempo e na turma "B" (44%) disseram ter sido pouco ou razoável. De fato, a utilização de materiais concretos, por exigir construção das peças e montagem e desmontagem dos sólidos (sólidos planificados), manipulação e medição dos objetos geométricos, requer maior tempo para que os alunos durante as atividades, especialmente as que envolvem o manuseio de um mesmo objeto por diversas vezes. Isso porque, os alunos, primeiro precisam identificar as características de cada um, entender o objeto nas suas formas e que grandezas podem ser retiradas de cada um. Depois de longas discussões entre eles, se voltam para as finalidades da proposta de utilização do material e, somente depois dessas duas etapas, eles iniciam a realização das atividades propostas.

Quanto aos dados empíricos analisados, é possível concordar que eles são significativos. Primeiro, para fazer os alunos entenderem os conteúdos percebendo as suas formas nos objetos do cotidiano. As figuras apresentadas nas atividades, têm características idênticas às que foram exploradas nos recursos de ensino utilizados nas oficinas. Segundo, porque as atividades dos alunos são ponto de partida para planejamento pedagógico do professore e intervenção pedagógica e, terceiro, por levar o aluno a compreender a relação do fazer matemático com a articulação lógica entre o conteúdo novo que está sendo trabalhado e os saberes os saberes inerentes a cada conteúdo que ele já deveria dominar. Com essa concepção, entendemos, então, que o sentido da Matemática não pode ser transmitido, mas experienciado pela intencionalidade de cada aluno diante dos desafios que se propõe vencer. Se não a compreendemos assim, seu sentido se desvanece, e se esvai, e saímos na contramão, esquecendo-nos de que este conhecimento vem se organizando ao longo do tempo histórico-social e culturalmente, como modo de o homem expressar o que compreende no meio em que vive, utilizando-se desses conhecimentos em função de suas necessidades (LEITE, 2009).

6. ÚLTIMAS CONSIDERAÇÕES

Após análise dos resultados apresentados neste texto, os quais evidenciam as competências e habilidades que os alunos já dominam e as que ainda estão carentes de intervenção para que avancem no aprendizado dos conteúdos, explorados na pesquisa pelos alunos que participaram do minicurso, pôde-se perceber que as atividades desenvolvidas possibilitaram o trabalho em grupo, a participação efetiva dos alunos e a socialização do conhecimento adquirido. O resultado deste processo foi percebido quando os alunos apresentaram seus trabalhos demonstrando que, realmente, conseguiram amenizar, significativamente, a defasagem em conceitos básicos em relação aos conteúdos trabalhados, além de manifestarem interesse e envolvimento como a suas aprendizagens.

Essa metodologia ainda é pouco utilizada pelos professores do ensino médio, frequentemente por ser associada apenas à dimensão lúdica, mas não se pode negligenciar sua dimensão educativa, uma vez que pode propiciar aprendizagem aos alunos.

Ao ingressarem no ensino médio, muitos deles já estão completamente desmotivados, com falta de interesse pela Matemática, apresentando grandes dificuldades, principalmente em relação à Matemática básica, o que foi constatado nos excertos dos professores, sujeitos desta pesquisa.

A utilização de materiais concretos apresentou-se como possibilide, para que se atinja a finalidade de melhorar o interesse e o desempenho dos alunos nessa área do conhecimento. Uma questão que fica bastante claro nos recortes utilizados neste texto, é que há falta de intervenção pedagógica em vários aspectos, mas que os erros cometidos pelos alunos apontam direcionamentos de intervenção pedagógica que, sem uma análises acurada, os mesmos se tornariam só mais um erro. , os professores de matemática do ensino médio deveriam estar mais atentos às inúmeras possibilidades que o erro pode favorecer à aprendizagem, e que o uso de materiais manipuláveis no ensino permite avanços significativos, especialmente, contextualizar o ensino desta ciência.

Assim, a pesquisa mostrou também, que é importante perceber que os alunos concebem o aprendizado em tempo e espaço diferentes, e que, as intervenções devem ocorrer, em muitos momentos, mediante possibilidades individuais e coletivas. Não concebemos esta afirmação como sendo fácil de praticar, no entanto, diante dos modos como se portaram os alunos, não há como não reconhecer e afirmar que cabe ao professor potencializar e mediar o fazer do aluno, muitas vezes individualmente. É o aluno que tem de fazer e só poderá iniciar a fazer do ponto em que está, ou seja, pelo por o que domina. Mas, contudo, o mediador tem de perceber o que o aluno já sabe, em precisa avançar e possibilitar-lhes modos de sanar as dificuldades.

REFERÊNCIAS

ARI DE SÁ. **RAIO X do ENEM**: Os conteúdos que mais caem na prova desde 2009. Disponível em: < https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/raio-x-do-enem-os-conteudos-que-mais-caem-na-prova-desde-2009/>. Acesso em: 10 set. 2017.

AZEVEDO, D. S. Análise de Erros Matemáticos: interpretação das respostas dos alunos. Trabalho de conclusão de curso em Licenciatura em Matemática. Porto Alegre, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2017.

______. Secretaria de Educação Básica. **Formação de professores do ensino médio**, Etapa I - Caderno IV: Área de conhecimento e integração curricular / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [autores: Marise Nogueira Ramos et al.] - Curitiba: UFPR / Setor de Educação, 2013.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação; SAEB: ensino médio: matriz de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB, INEP, 2008.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CORREIA, Carlos Eduardo Felix. Matemática, análise de erro e formação continuada de professores polivalentes. São Paulo: Porto de Ideias, 2010.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática.** Campinas: Autores associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM.** SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FRITSCHE, R. et al. **Taxas de rendimento do Maranhão,** 2016. Disponível em:<http://www.qedu.org.br/estado/110-maranhao/taxas-rendimento/rede estadual/rural-e-urbana?year=2016 >. Acesso em: 25 mar. 2018.

GAERTNER, R.; BACKES, T. Educação e memória: inventário das obras publicadas na área de matemática pela campanha de aperfeiçoamento e difusão do ensino secundário (CADES). Dynamis Revista Tecno-científica, Blumenau - SC, vol. 13, n.1, p.21-28, out-dez, 2007.

LEITE, L. S.; PEDROSA, E. P.; ARAGÃO, R. M. R. Formação Profissional do Professor de Matemática: saberes essenciais que emergem de relatos docentes. **AMAZÔNIA** - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas V.8 – nº 16 – jan- jul., 2012.

LEITE, L. S. A expressão da compreensão de alunos com dificuldades de aprendizagem em matemática ao trabalhar com o material Cuisenaire. **Dissertação** (Mestrado). Universidade Federal de Goiás. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2009.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

OLIVEIRA, M. S.; ANJOS, S. C. Aplicação de jogos: uma estratégia didática para a educação matemática. In: **Dialogar:** essência da educação. Ivanio Dickmann (org.). 1.ed. –Veranópolis: Diálogo Freiriano, 2021.

SANTOS, Antonio Manoel Alves dos. **Utilização de materiais concretos para o ensino de geometria plana e espacial:** Um estudo de caso.2015. 51f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2015. Disponível em: < http://www.univasf.edu.br/~tcc/000006/00000661.pdf> Acesso em: 15 de agosto 2017.

STEWART, I. **Mania de matemática:** diversão e jogos de lógica e matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed, 2005.

CAPÍTULO 3

O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL, UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Rafael Chaves da Luz[1]

Raimundo J. Barbosa Brandão[2]

1 Mestre em Matemática. Especialização em Matemática – formação de professores, professor da rede pública do Estado do Maranhão E-mail: chaves-luz@hotmail.com

2 Doutor em Educação Matemática, professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC. E-mail: raimundobrandao.brandao@professor.uema.br; professorbrandao.uema@yahoo.com.br

RESUMO

Este estudo, aborda os registos de representação semiótica no ensino de Álgebra a partir da resolução de problemas, tem como objetivo discutir as contribuições desses registros no nono ano do ensino fundamental. Destaca-se a importância do modo como os conceitos iniciais de Álgebra têm sido construídos e a necessidade de promover reflexões aos professores sobre a metodologia de ensino por resolução de problemas para alcançar resultados relevantes no desenvolvimento da capacidade de compreensão de conceitos matemáticos. A pesquisa apresenta natureza qualitativa com intervenção. Foi realizada em uma escola pública estadual no município de São Miguel, estado do Tocantins, com intuito de investigar a aprendizagem dos alunos no uso didático da conversão, ou seja, da mudança de um registro em outros registros e, tratamento, que consiste numa operação dentro do próprio registro. Apara analisar os dados levou-se em conta aspectos atitudinais dos alunos e sus desempenhos durante as atividades. O estudo permitiu verificar as dificuldades dos estudantes no aprendizado da Álgebra e de suas representações, bem como as da sua aplicação no dia a dia. Com isso, pôde-se levar adiante a reflexão quanto às metodologias utilizadas pelos professores, contribuindo para uma interlocução criativa que permitisse o avanço na direção dos objetivos que se propõe o ensino da Álgebra. Os dados foram analisados por tratamento estatístico.

Palavras-chave: Ensino da álgebra. Matemática. Semiótica.

1. INTRODUÇÃO

Os conceitos de objetos matemáticos passaram por um processo de evolução desde o princípio da humanidade até os dias atuais. Com a necessidade de representar quantidades, surgiu a álgebra simbólica. No tempo de Euclides, aproximadamente 3000 a.C., a álgebra simbólica estava distante de ser inventada, por isso os matemáticos da época usavam construções geométricas para estudar as equações.

Os conceitos algébricos aprendidos no Ensino Fundamental serão utilizados até o final do Ensino Médio do nível escolar básico e muitas vezes também no ensino superior em determinadas disciplinas. Assim, é importante e necessário que o aluno consiga apropriar-se desses conceitos para que possa aplicá-los nas mais diversas situações que surgirão ao longo de sua caminhada acadêmica e posterior estrada da vida.

Esta investigação se justifica pelo fato de nas últimas décadas o processo de ensino e aprendizagem de Matemática ter sido motivo de preocupação por parte dos governantes, professores e pesquisadores, em virtude de os estudantes, em geral de todos os níveis de escolaridade, demonstrarem dificuldade de compreensão dos conteúdos relacionados a esse componente curricular. Os alunos chegam ao Ensino Médio com dificuldade de compreensão de determinados conceitos geométricos e algébricos, em especial da álgebra, que é alvo deste estudo.

Além disso, esta pesquisa busca subsídios que poderão ser utilizados pelos docentes de Matemática, para que possam compreender quais as dificuldades observadas e quais os pontos relevantes que precisam de mais enfoque no momento de desenvolver determinados conceitos algébricos, podendo, assim, buscar suporte e formas diferenciadas de sanar e preencher tais lacunas, contribuindo para uma melhor construção do conhecimento.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação tem uma abordagem qualitativa, pois o pesquisador se constitui como sujeito principal e foca o seu trabalho na interpretação da realidade. Justifica-se a natureza qualitativa do estudo, por se trabalhar com valores, crenças, hábitos, atitudes, representações e opiniões. (BRANDÃO, 2020, p 50-51) Ainda segundo o autor acima citado (BRANDÃO, 2020) a abordagem qualitativa é empregada, portanto, para a compreensão de fenômenos caracterizados por muita complexidade interna, sendo desta forma considerada o subjetivismo.

A estratégia utilizada para realização deste estudo, quanto às atividades de ensino, é a resolução de problemas. Polya (1934) introduziu esta metodologia com a publicação do livro A arte de resolver problemas, empregada na construção do conhecimento matemático

Esta investigação analisou as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da álgebra à luz dos registros de representação semiótica, por meio de resolução de problemas. O estudo foi realizado com alunos do nono ano da escola Estadual Bela Vista, situada em São Miguel do Tocantins (TO).

Os sujeitos de pesquisa foram 35 alunos, selecionado de maneira aleatória, de um total de 70 de duas turmas regularmente matriculados. Para a coleta de dados utilizou-se a aplicação de questionário, análise das atividades do pré-teste e da intervenção, e ainda a observação dos alunos ao longo da realização das situações problemas. Após o diagnóstico e identificadas as dificuldades dos alunos em conteúdos básicos de álgebra iniciou-se o processo de intervenção.

3. ENSINO DA MATEMÁTICA: Algumas considerações

A Matemática tem um valor formativo, que interfere na sistematização do pensamento e agiliza o raciocínio dedutivo do aluno. Também é uma ferramenta que serve para a leitura e compreensão dos problemas da vida cotidiana, relacionando-

-se com outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, é preciso pensar na maneira mais conveniente de construir e de ensinar a Matemática, para que ela não se torne um instrumento meramente mecânico, mas sim um fazer matemático enquanto instrumento de transformação, educando para novas experiências, novas maneiras de ser e de contextualizar o tema em questão (FLORES; MORETTI, 2008).

O estudo da Matemática compreende a identificação e a descrição dos padrões da linguagem matemática por meio de notações, conceitos e procedimentos. A Matemática é usada de forma crescente, em uma relação com as mais diversas áreas da atividade humana, ao mesmo tempo em que é perceptível sua presença no cotidiano.

A matemática escolar sofre forte influência da comunidade acadêmica, cuja legitimidade social é dada muito mais pela matemática científica do que por aquela conquistada pela comunidade de professores, ou seja, na maioria das vezes os saberes escolares tratados e gerados pelos professores, na prática docente, são vistos como uma má compreensão do conhecimento científico ou uma falha na formação docente (FLORES; MORETTI, 2008).

Evidenciando que o Brasil está distante do letramento matemático, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), desenvolvido pela OCDE e que no Brasil, é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), é destinado a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória no Brasil. A avaliação visa buscar informações quanto à capacidade de cada indivíduo em três áreas-chave: ciências, matemática e leitura.

Figura 01 - Tendências de desempenho em matemática

Fonte: Inep (2019).

Segundo a OCDE, um jovem letrado em matemática é capaz de formular, empregar e interpretá-la em uma variedade de contextos e não simplesmente atingir um mínimo de conhecimentos técnicos ou habilidades. Os estudantes brasileiros, porém, estão muito abaixo da média, são capazes apenas de responder a questões simples, que envolvam contextos conhecidos, executando ações óbvias, dando continuidade imediata ao estímulo dado.

Conclui-se que é muito importante que professores e toda comunidade escolar reflitam quanto aos resultados de matemática apresentados nesse relatório, com vistas à melhoria da qualidade da educação dos jovens brasileiros.

3.1 Uso de Tecnologias na Formação do Professor de Matemática

As tecnologias, que estão cada vez mais presentes na escola e na sala de aula, devem ser instrumentos determinantes na formação de professores, pois se tornam, às vezes, até instrumentos pedagógicos no processo ensino aprendizagem, o que aponta muitos aspectos positivos no ambiente escolar. Destacam-se, nesse processo, as tecnologias de informação e comunicação, portanto, se faz necessária uma boa infraestrutura para emergência de uma cultura de formação continuada.

Estar inserido nessas tecnologias e buscar cada vez mais aprimoramentos em tecnologias educacionais contribuem na formação do professor para desempenhar seu papel dentro da sala de aula, pois a tecnologia não funciona sozinha. Para Moraes (2002):

> O simples acesso à tecnologia em si não é o mais importante. O computador por si só não provoca mudanças desejadas. O importante é saber usar essas ferramentas para a criação de novos ambientes de aprendizagem que estimulem a interatividade, que desenvolvam a capacidade de formular e resolver questões, a busca de informações contextualizadas associadas às novas dinâmicas sociais de aprendizagem (MORAES 2002, p. 8).

Em razão da inovação e do progresso tecnológico, a sociedade exigirá cada vez mais profissionais competentes e habilitados nos estudos e em sua formação continuada para melhor desempenharem sua função. Mesmo os professores mais conservadores não precisam resistir a essas mudanças, pois não se trata de uma opção exclusiva: não é preciso que a escola tecnológica destrua a escola tradicional. É possível ter um aproveitamento do que se tem de bom em uma e em outra e dar um salto para um novo patamar em qualidade de ensino (RODRIGUES, 2006).

Diante desse cenário, torna-se necessária a preparação de professores para atuar nessa nova realidade, portanto as novas tecnologias educacionais são fundamentais para que o professor se familiarize e possa agregá-las em sua metodologia de trabalho.

3.2 ÁLGEBRA: concepções

A representação de quantidades desconhecidas por meio de símbolos, fundamental na álgebra, evoluiu lentamente. Embora os antigos egípcios e os matemáticos sumérios tenham tratado de problemas que envolviam quantidades desconhecidas, eles não as expressavam na forma de equações, como se faz agora.

Sem dúvida, só depois do fim do século XVI evoluiu a forma familiar de equação. Para um estudante de hoje, a álgebra começa quando as quantidades desconhecidas passam a ser representadas por letras (ROONEY, 2012).

A álgebra é familiar para muitas pessoas na forma de equações que devem ser resolvidas, seja na forma de exercícios na escola ou na forma de equações para modelar problemas em economia, ciência ou alguma outra disciplina. A presença da matemática na escola é uma consequência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade (CHEVALLARD; BOSCH & GASCÓN, 2001 p. 45).

De acordo com Lins e Gimenez (1997), entende-se que a álgebra, a aritmética e a geometria constituem os alicerces da matemática escolar do ensino fundamental. Ensinar álgebra é possibilitar a formação do pensamento algébrico do indivíduo, mas na sala de aula a atividade algébrica se resume a um cálculo com letras que desenha uma sequência técnica e é encontrada na maioria dos livros didáticos. Essa técnica baseia-se no método de estudo tradicionalista e não em uma investigação ou reflexão, mostrando ser bastante ineficaz em termos de aprendizagem.

3.3 Importância do Estudo de Álgebra

Além de estimular o raciocínio lógico e dedutivo, o estudo da álgebra permite encontrar soluções de determinadas situações problemas do dia a dia.

Sabe-se que a Álgebra, em seu processo de construção e compreensão, torna-se muito complicada para os discentes devido ao seu grau de abstração. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, um dos grandes problemas encontrados na aprendizagem da Álgebra é a noção de variável. Nesse sentido, segundo Silva, Pereira e Resende (2013):

> De modo geral, os estudantes entendem que a letra usada em uma sentença algébrica serve apenas para indicar um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. Não é um conceito errado, mas representa apenas uma das concepções da Álgebra. Esse conceito é fundamental e imprescindível ao estudo algébrico. O documento propõe que o professor trabalhe na sala de aula com as diferentes concepções da Álgebra, para tentar desmistificar esse conceito, além de estimular a utilização da geometria como recurso para compreensão desses fatos, que pode ajudar na generalização de padrões (SILVA, PEREIRA E RESENDE, 2013, p. 3).

Como os princípios algébricos contribuem para a sistematização de conceitos, são fundamentais para a construção do conhecimento e amadurecimento das ideias, podendo ser tomados como base para sustentar um conhecimento mais abstrato. Se a base para todos os demais conceitos não for bem estruturada, podem ocorrer dificuldades posteriores que atrapalharão o desenvolvimento do discente.

Segundo (BRASIL, 1998), a Álgebra é um importante ramo da Matemática que deve ser trabalhada, tendo em vista que é um dos objetivos da matemática no Ensino Fundamental:

> [...] resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos. [...]. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a regras para resolução de uma equação. (BRASIL, 1998, pp.48-50).

Dessa forma, percebe-se o grau de importância da álgebra para os anos finais, e com isso enfatiza-se a necessidade de o docente conhecer as dificuldades de seus alunos para que sejam adotadas formas diferenciadas, alternativas e coerentes de ensino e aprendizagem, a fim de atingir uma compreensão mais significativa dos mesmos.

Quanto à estrutura no ensino de álgebra, pode-se dizer que os conteúdos são apresentados como uma rígida sequência de regras que evidenciam a dependência de cada um dos tópicos em relação ao anterior, assim pode-se dizer que o ensino apresenta-se de forma fragmentada.

Cabe ao professor pensar seriamente no papel da álgebra na escola e principalmente na formação do pensamento algébrico do aluno, pois esse pensamento relaciona-se, no processo de escolarização, com o pensamento aritmético e geométrico e não se pode deixar uma defasagem no aprendizado e na construção matemática do estudante.

3.4 Aplicações da Álgebra

Em relação à álgebra é preciso respeitar as propriedades entre os números de um contexto, compreendendo, aceitando e aplicando regras. De certa forma, ela está inserida no cotidiano, como nas empresas onde frequentemente surgem problemas relacionados a custos, produção e divisão de lucros, e também laçam mão da álgebra para fazerem suas análises. Na medicina, os médicos utilizam muitas fórmulas matemáticas em manipulação de medicamentos e, principalmente, para calcular a dose de remédio que deve ser dada aos pacientes.

Além disso, a álgebra remete à capacidade de resolver e elaborar problemas relacionados a um contexto próximo, que possa ser representado por sistemas de equações, interpretados e, talvez, permitir alguma intervenção no seu ambiente de convívio. Possibilita, também, o estudo da geometria e suas demonstrações, mas, a álgebra é apenas uma ferramenta, a habilidade de resolver problemas desenvolve-se aos poucos.

4. TEORIA DOS RGITROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS)

A partir de 1995 uma abordagem teórica vem ocupando muito espaço no meio das discussões do processo de ensino e aprendizagem em matemática. Este quadro teórico denominado Teoria dos Registos de Representação Semiótica, foi criado pelo Filosofo Francês Raymond Duval (1995) e trouxe contribuições significativas no campo educativo tanto no ensino quanto na pesquisa.

Representação semiótica segundo Henriques e Almouloud (2016 p. 467) é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado

Neste estudo essa teoria dos registros de representação semiótica será utilizada para fazer as análises com respeito ao ensino e aprendizagem de Álgebra no do ensino fundamental.

4.1 Registros de Representação Semiótica

Para Schoen (1995, p.138), lançar os alunos precipitadamente ao simbolismo algébrico é ignorar a necessidade de uma fundamentação verbal e de uma simbolização gradual sugeridas pela história e apoiadas por pesquisas do ensino e aprendizagem de álgebra. Diante das dificuldades da compreensão do conceito de objetos algébricos, esta pesquisa lança mão dos registros de representação semiótica como ferramenta didática no ensino de álgebra.

Segundo Neres (2010, p. 28), a passagem de um sistema de representação a outro, ou seja, a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso é usado em atividade matemática. Em geral, para a maioria dos alunos não se apresenta assim de forma tão evidente, visto que a passagem espontânea de uma representação semiótica a outra só acontece quando são congruentes. Essa passagem, segundo Duval (2009), só ocorre de forma espontânea, quando:

- Existe uma correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem;

- Há a mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações; e

- Há conversão de uma unidade significante da representação de saída em uma só unidade significante de chegada.

Para o autor, a conversão é uma atividade cognitiva diferente e não está sujeita às atividades de tratamento.

Passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é preciso também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Com essa teoria desenvolve-se toda a análise dos dados (RONCAGLIO e NEHRING, 2015. p. 200).

Conforme Santos (2009, p. 58), Duval (ano) assim define as representações semióticas:

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos (sinais) pertencentes a um sistema de representação que têm suas dificuldades próprias de significância e de funcionamento. Uma figura, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que salientam sistemas semióticos diferentes.

O estudo da álgebra, bem como de qualquer outro objeto matemático, dada a sua abstração é fundamental que as diversas formas de representação estejam presentes nas atividades de ensino para uma melhor compreensão do conceito e naturalmente sua apreensão.

5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas se inicia o aluno no modo de pensar matemático e nas aplicações da matemática no nível elementar. De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica, as etapas da resolução de problemas são:

- Compreensão do problema: o enunciado deve ser lido detalhadamente para identificar os dados e o que se deve obter: a incógnita x;

- Montagem da equação: consiste em traduzir o enunciado do problema em linguagem matemática, por meio de expressões algébricas, para obter uma equação.

- Resolução da equação obtida; e
- Comprovação e análise da solução: é necessário comprovar se a solução obtida é correta e, depois, analisar se tal solução tem sentido no contexto do problema.

Para que um aluno resolva um problema é fundamental que ele tenha: bom conhecimento dos termos matemáticos, interpretação e compreensão dos enunciados, e habilidade para enfrentar situações desafiadoras. Os alunos gostam de desafios, e as aulas de Matemática podem ser transformadas em momentos estimulantes, quando o estudante tem a oportunidade de aplicar os conhecimentos exigidos para a resolução de situações problema.

A utilização da metodologia de resolução de problemas nos últimos anos tem ocupado um espaço cada vez maior em sala de aula pelos professores de matemática. É um procedimento metodológico que contribui para estimular e desafiar os alunos em busca da resposta dos problemas envolvidos no estudo.

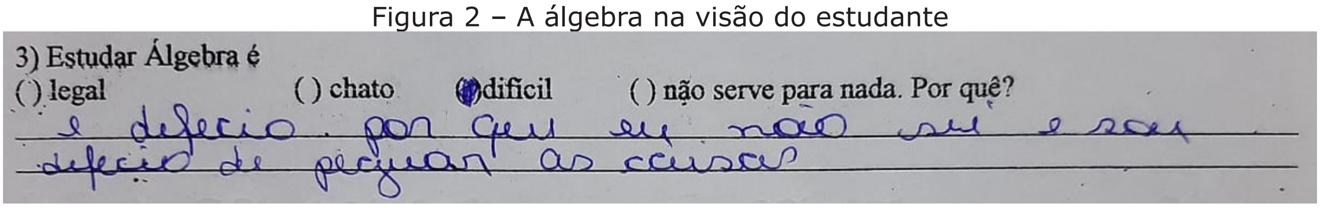
Para Dante (1998), a resolução de problemas tem por objetivo fazer o aluno enfrentar situações novas; oportunizar o envolvimento com aplicações da matemática, subsidiar os alunos com conhecimentos que permitam seu desenvolvimento para a resolução de problemas.

6. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste artigo apresentaremos algumas das questões trabalhadas em sala de aula durante o nosso experimento com os alunos. Os resultados mostraram dificuldade dos alunos em álgebra e apontam que os conceitos e princípios da álgebra não estão sendo compreendidos nem aplicados de maneira correta para dar subsídio às séries seguintes na vida escolar dos estudantes.

Na questão a seguir (figura 1) teve-se como objetivo analisar a visão que o estudante do 9º tem acerca da álgebra.

Figura 2 – A álgebra na visão do estudante


3) Estudar Álgebra é

( ) legal ( ) chato (●) difícil ( ) não serve para nada. Por quê?

e defecio. por qeu eu não sei e sou defecio de pegar as coisas

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Os alunos completaram que não gostam muito de estudar matemática por que o conteúdo é difícil e na maioria das vezes não entendem nada, como mostra o trecho seguinte: "*É difícil por que eu não sei. E sou difícil de pegar as coisas".* Note também o erro grosseiro na ortografia. Nesse contexto, os jovens, por falta de estímulo nos procedimentos didáticos, acabam por se afastarem da matemática e perdem o interesse pela álgebra. Conforme Maranhão *et al:*

> O ensino da álgebra tem sido objeto de estudo de inúmeros pesquisadores, identificando concepções algébricas e apontando implicações de natureza didático metodológica referentes ao desenvolvimento da educação algébrica elementar [...]. Os professores esquecem a importância do papel do aprendiz no processo de ensino aprendizagem, atrelado a sequência de conteúdos com distanciamento entre do contexto das atividades, não havendo desse modo aprendizagem significativa (MARANHÃO *et al,* 2009, p. 104).

Diante dessa realidade, os professores ficam ainda mais sobrecarregados para solucionar as dificuldades dos alunos, haja vista que o apoio em casa é mínimo. Por isso, devem sempre inovar suas práticas pedagógicas educativas. É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu cotidiano na escola ou fora dela (DANTE, 2002).

Uma outra situação apresentada aos alunos foi a seguinte:

O triplo do quadrado do número de filhos de Rafael é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Rafael tem?

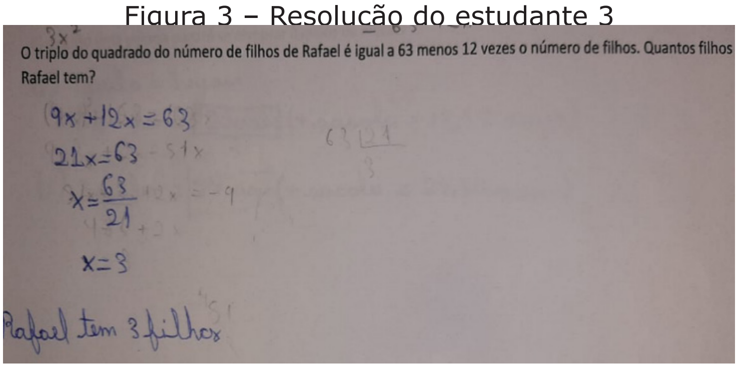
O problema, que recai em uma equação do 2º grau, busca desenvolver a capacidade de realizar uma conversão da linguagem natural para algébrica, bem como aplicá-la de forma pontual para chegar à solução do problema.

Nesse problema, a dúvida principal era como escrever uma equação que relaciona o número de filhos. Alguns alunos partiram para o método de tentativas e contagens e acabaram chegando à solução. É uma forma criativa de resolver o problema, contudo gastaram muito tempo e não utilizaram os conceitos algébricos abordados nas explicações. Ficou evidente a dificuldade dos alunos em utilizar a representação de registros semióticos para realizar uma conversão.

As intervenções foram trabalhadas de modo prioritário individual, ou em pequenos grupos, incentivando e orientando cada aluno para que chegasse à solução do problema, deixando o próprio aluno expor suas ideias e apenas melhorando com uma releitura do problema, principalmente solicitando um plano de ação para os estudantes.

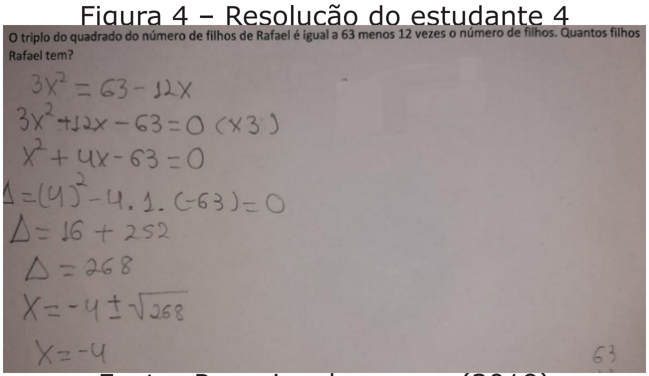
Abaixo estão as soluções dos estudantes:

Figura 3 – Resolução do estudante 3



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 4 – Resolução do estudante 4



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Os estudantes estavam confusos com a atividade, como equacionar a situação proposta formulando uma representação algébrica. Uma vez obtida a representação adequada, segue a resolução dos exercícios, que seria executar o plano elaborado verificando cada passo a ser dado. Exclui-se desse caso o método de tentativa e erro, pois o raciocínio algébrico deve prevalecer.

O domínio dos conceitos considerados básicos para a série é fundamental para conseguir manipular os dados, fazendo os cálculos e chegar à solução. Além disso, é necessário fazer uma verificação da resposta ou das respostas encontradas a fim de diagnosticar a verdadeira solução do problema.

Os alunos foram encorajados a fazer perguntas entre eles para esclarecer os pontos fundamentais, destacando as informações do problema para compreenderem melhor e adequarem os conceitos algébricos.

Trabalhar com conceitos básicos, como a fórmula de Báskara, foi necessário para que o aluno se apropriasse desse instrumento de resolução de equações. Assim, de modo conjunto, com a orientação do professor e a interação com outros alunos do grupo, foi possível resolver o problema.

Pela proposta de resolução de problemas, têm-se:

1) Compreender o problema:

b) O que o problema pede? Resolver o problema significa encontrar o número de filhos de Rafael.

c) Quais são os dados e as condições do problema? Os dados e condições estão descritos no texto que diz que o triplo do quadrado do número de filhos de Rafael é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos.

d) Perceber que se trata de um problema que recai em uma equação do segundo grau.

2) Elaborar um plano:

a) Fazer uma conexão entre os dados do problema e o que ele pede; fazer uma representação algébrica; e montar uma equação que satisfaça os dados. No caso a equação é:

$3x^2 = 63 - 12x \rightarrow 3x^2 + 12x - 63 = 0$

b) Utilizar a fórmula de Báskara

3) Executar o plano:

a) Executar o plano verificando cada passo a ser dado: Vamos resolver a equação dos exercícios

$3x^2 = 63 - 12x \rightarrow 3x^2 + 12x - 63 = 0$ (dividindo ambos os membros por 3), temos:

$x^2 + 4x - 21 = 0$

Recorrendo à fórmula de Báskara, Segue:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-21)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 10}{2} \rightarrow x = \begin{cases} x' = \dfrac{-4 + 10}{2} = +3 \\ x'' = \dfrac{-4 - 10}{2} = -7 \end{cases}$$

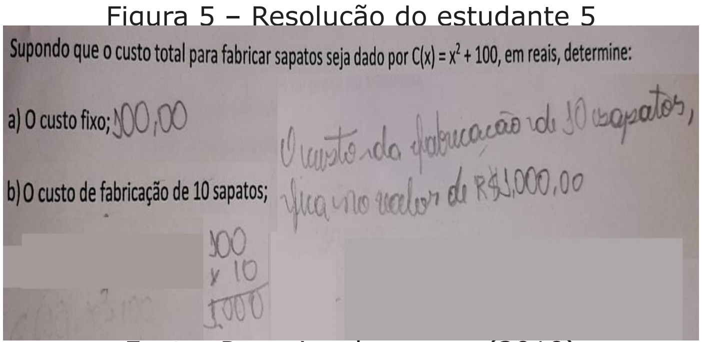
4) Fazer uma verificação: analisar o resultado obtido. O problema questiona o número de filhos de Rafael e, portanto, não há quantidade negativa de filhos, logo a resposta é 3. Rafael tem três filhos. Esse também é importante para detectar e corrigir possíveis erros.

No terceiro encontro, em 28 de setembro de 2019, foram trabalhadas três atividades problemas, com o objetivo de verificar a capacidade de os alunos fazerem um tratamento algébrico, das quais abordou-se uma para ilustrar. Apresenta-se um dos problemas trabalhados em sala de aula:

> O custo total para fabricar sapatos seja dado por $C(x) = x^2 + 100$, em reais, determine: a) O custo fixo; e b) o custo de fabricação de 10 sapatos.

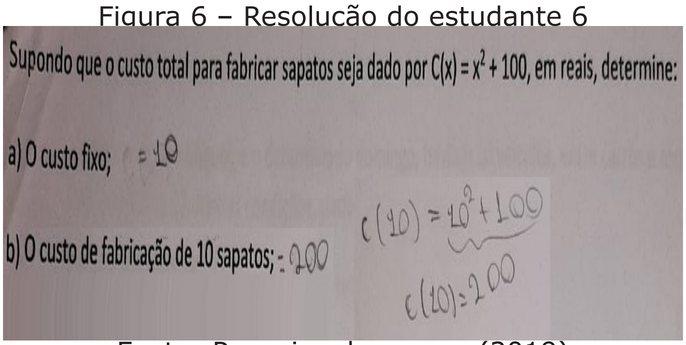
No início, ao se depararem com o exercício os estudantes ficaram um pouco perdidos, sem saber o que fazer. Não estava claro para eles o que buscar no exercício. De maneira tímida, com algumas perguntas foram esclarecidos os pontos fundamentais e destacadas as informações importantes. Assim, foram compreendendo melhor o problema, o que se pede e quais condições são dadas para resolvê-lo.

Figura 5 – Resolução do estudante 5



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 6 – Resolução do estudante 6



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

As imagens mostram os primeiros passos na construção das respostas. O problema foi entendido e os estudantes pensaram em um modo de resolvê-lo com poucas orientações, basicamente só foi feita uma releitura, mas demonstraram dificuldade em manipular os elementos algébricos.

Segue a solução esperada:

1) Compreender o problema:

a) O que o problema pede? Resolver o problema significa entender o significado de custo, e o que se quer saber é qual o custo fixo e qual o custo na produção de 10 sapatos.

b) Quais são os dados e as condições do problema? Esses elementos estão descritos em uma equação, da qual se pode retirar as informações necessárias para resolver o problema.

c) Perceber que se trata de um problema que recai em uma função do primeiro grau.

2) Elaborar um plano:

a) Fazer uma conexão entre os dados do problema e o que ele pede; fazer uma interpretação algébrica do problema. Usar manipulação algébrica para resolver o que é pedido no exercício com a equação.

b) Utilizar a técnicas de resolução de equação de primeiro grau.

No primeiro item deve-se achar o custo fixo. Isso é equivalente a dizer: qual o custo para produzir zero sapatos? Então tem-se que calcular C (0) na função.

No segundo item pede-se o custo para produzir 10 sapatos, ou seja, calcular C (10).

3) Executar o plano:

a) executar o plano verificando cada passo a ser dado: Vamos calcular o que se pede.

$C(x) = x^2 + 100 \rightarrow C(0) = 0^2 + 100 \rightarrow C(0) = 100$, dessa forma o custo fixo de produção é R$ 100,00.

Para produzir 10 sapatos:

$C(x) = x^2 + 100 \rightarrow C(10) = 10^2 + 100 \rightarrow C(10) = 100 + 100 \rightarrow C(10) = 200$, ou seja, para produzir 10 sapatos o custo será de R$ 200,00.

4) Fazer uma verificação: analisar o resultado obtido. O problema questiona o custo na produção de certas quantidades de sapatos e foi feita uma verificação nos cálculos. Os valores do custo são de fato R$ 100,00 e R$ 200,00 reais.

Observou ao logo do processo de intervenção que os alunos participantes do estudo têm muitas dificuldades de realizarem a conversão saindo da linguagem algébrica para o registro gráfico e a volta do registro gráfico para o algébrico o grau aumenta mais por isso, acredita-se na importância de se iniciar estudos relativos a esta área desde o início da aprendizagem formal de matemática.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das preocupações voltadas ao aluno e à aprendizagem da matemática, nesta pesquisa visou-se atender à seguinte questão: como a teoria dos registros de representação semiótica pode contribuir no processo de ensino aprendizagem da álgebra por meio da resolução de problemas?

Para responder a essa questão buscou-se realizar estudos voltados aos pressupostos teóricos de resolução de problemas de Polya (1977) e aos registros de representação semiótica de Duval (2011), proporcionando aporte teórico e metodológico para realizar o trabalho com os estudantes alvos da pesquisa. É preciso a colaboração de editoras e universidades para aumentar a produção de materiais que ofereçam alternativas de contextualização nos tempos atuais.

Considerado o problema, definiu-se como objetivo geral discutir as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. Com o intuito de atender aos objetivos, propôs-se aos alunos que participassem de um experimento para melhorar o aprendizado da matemática, especificamente da álgebra. O estudo com os alunos foi realizado em horário diferente do escolar e consiste na intervenção por meio da resolução de problemas,

Este estudo explorou conhecimentos básicos para apropriação dos significados algébricos como as equações, sentenças matemáticas aritméticas e algébricas, membros e termos algébricos, e representação gráfica. A proposta se deu por resolução de problemas e apontou dificuldades para os estudantes seguirem para a próxima série.

Diante dos resultados, certamente o estudo foi enriquecedor para a formação docente, pois permitiu verificar e elaborar outro método de ensino da álgebra, com resolução de problemas contextualizados. Espera-se que este estudo venha a servir de novos problemas de pesquisa futuros.

REFERÊNCIAS

BRANDÃO, R. J. B. Estatística e Probabilidade na Formação do Engenheiro Civil. In. **Engenharia 4.0:** a era da produção inteligente / Eduardo Mendonça Pinheiro, Glauber Tulio Fonseca Coelho, Patrício Moreira de Araújo Filho (Org.). São Luís: Editora Pascal Ltda, 2020.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GÁSCON, Josep. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto alegre: Aritmed, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2002.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Revemat: **R. Eletr. de Edu. Matem.** ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem Editora, 2011.

FELDMANN, M. G. Formação de professores e cotidiano escolar. In: FELDMANN, M. G. (Org.). **Formação de professores e escola na contemporaneidade.** São Paulo: Editora SENAC, 2009. p. 71-80.

FLORES, Claudia R.; MORETTI, Méricles Thadeu. **A articulação de registros semióticos para a aprendizagem:** analisando a noção de congruência semântica na matemática e na física. Perspectivas da Educação Matemática, v. 1, p. 25-39, 2008.

HENRIQUES Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

LINS, Rômulo Campos e GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

MARANHÃO, Cristina (Org.). PIRES, Célia Maria Carolina. Freitas, José Luiz Magalhães. ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho. GRANDO, Neiva Ignês. MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática nos anos fiais do ensino fundamental e ensino médio** – Pesquisas e perspectivas. São Paulo: Musa editora, 2009.

MORAES, Maria C. **O paradigma educacional emergente.** Campinas, SP: Papirus, 2002.

NERES, Raimundo Luna. **Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino aprendizagem da matemática:** um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental. Tese de doutorado. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro, Interciência, 1977.

RONCAGLIO, Viviane. **Registros de Representação Semiótica –** Atividades de Conversão e Tratamento em Vetores e suas Operações a partir da Argumentação de Estudantes de Engenharia. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – 2011

RONCAGLIO, Viviane.; NEHRING, Cátia Maria. Aprendizagem do Conceito de Vetor por Estudantes de Engenharia – Análise de Registro. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, ISSN 2178-034X. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo - SP, 13 a 16 de julho de 2016

ROONEY, Anne. **A História da Matemática:** desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda., 2012.

SILVA, J. T.; PEREIRA, D. G.; RESENDE, M. R. As Necessidades de Estudos sobre o Ensino Aprendizagem da Álgebra no Ensino Fundamental: Desafios e Perspectivas. **Revista Encontro de Pesquisa em Educação**, v. 1, nº1. Universidade de Uberaba, 2013.

SCHOEN, Harold L. **A resolução de problemas em álgebra**. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

Site do Livro aberto: https://www.umlivroaberto.com/fr/GE101-0B.html

CAPÍTULO 4

METODOLOGIAS ATIVAS: o uso de videoaula como ferramenta didática no ensino de matemática com alunos de escolas pública

José Haito Filho[1]

Raimundo J. Barbosa Brandão[2]

1 Mestre em Matemática pela Universidade estadual do Maranhão – PROFMAT. Especialização em Matemática. Professor da rede pública do Estado do Maranhão E-mail: haitofilho@yahoo.com.br

2 Doutor em Educação Matemática, professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC. E-mail: raimundobrandao.brandao@professor.uema.br; professorbrandao.uema@yahoo.com.br

RESUMO

Este estudo teve por objetivo avaliar a organização da prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental com relação ao uso de vídeo aulas. Procuramos analisar o uso das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem em matemática na Educação Básica. Buscou-se analisar as políticas públicas de formação do professor para o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação/TICS. contrapor as orientações previstas nos cursos de formação continuada com a prática docente e verificar de que modo o professor de matemática organiza a prática com o vídeo. Buscamos responder a seguinte pergunta investigativa: de que modo o professor de matemática da Educação Básica tem organizado a prática pedagógica com o vídeo como instrumento didático para o ensino da matemática em sala de aula? A investigação tem uma abordagem qualitativa com a utilização de metodologias ativas de cunho descritivo e interpretativo.

Palavras-chave: Metodologias Ativas. Tecnologias da Informação e Comunicação. Vídeoaulas. Ensino de Matemática

1. INTRODUÇÃO

O mundo passa por um período extremamente avançado em inovações tecnológicas e aumenta a necessidade de as escolas ministrarem um ensino que permita aos alunos desenvolver competências e habilidades para o efetivo exercício da cidadania e para o mundo do trabalho.

Nesta perspectiva, este estudo parte do pressuposto de que novos paradigmas precisam continuar sendo desenvolvidos e implementados em sala de aula para que se tenha uma educação de qualidade. Com essa preocupação pesquisadores, professores e gestores tem discutido intensamente o uso de novas metodologias onde o aluno seja o sujeito de processo e participe ativamente do mesmo.

As chamadas metodologias ativas têm ocupado mito espaço nas discussões educacionais em várias áreas do conhecimento como uma forma de contribuir com o aluno no gerenciamento de sua aprendizagem.

Atualmente em sala de aula, não há mais espaço para alunos passivos, que apenas ouve e reproduz informações do professor. O aluno precisa ter capacidade criativa e habilidade em lidar com conflitos, associar informações e trabalhar em grupo, pois o mercado de trabalho exige que o profissional saiba agir frente a imprevistos e seja capaz de adaptar-se rapidamente às mudanças.

O mundo tem passado por grandes e profundas mudanças nos últimos tempos e, é inegável que a ciência e a tecnologia foram determinantes para estas transformações. Na educação, as tecnologias também têm dado uma grande contribuição para o aprimoramento dos métodos de gestão e de ensino em todos os componentes curriculares.

A questão de pesquisa que norteia este estudo é: conhecer como as metodologias ativas, usando a videoaula como ferramenta didática contribui para o ensino de matemática?

O objetivo desta investigação é analisar as contribuições de videoaulas no ensino de matemática.

Este estudo tem uma abordagem qualitativa, pois (GODOY, 1995) tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador é considerado instrumento fundamental. Além disso, esta abordagem possui caráter descritivo e, apresenta um enfoque dedutivo.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo baseia-se em uma pesquisa experimental quantitativa. Este tipo de pesquisa é classificado como método científico onde são utilizadas diferentes técnicas para mensurar concepções e conhecimentos de um dado estudo, ou seja, é o ato de quantificar os dados coletados para solucionar um questionamento ou um problema de pesquisa, pois, de acordo com Silva (2005, p. 82):

> [...] a pesquisa quantitativa utiliza a descrição matemática como linguagem para descrever as características de um fenômeno [...]. A estatística faz a relação entre a teoria apresentada nos livros e os dados observados no ambiente em que estamos pesquisando.

Na experimentação utilizou-se a Sala de Aula Invertida, que é uma metodologia onde o aluno participa de maneira ativa, critica e reflexiva no processo de ensino e aprendizagem. Corroborando com esta ideia, Cunha (2000) afirma:

> Não podemos esquecer que o sujeito é ativo. A realidade também é. [...] O conhecimento é produzido através da utilização de procedimentos adequados. Estes procedimentos são definidos de acordo com o tipo de objeto em questão, com as possibilidades, inclusive subjetivas, do pesquisador e com os recursos metodológicos de cada época. (CUNHA, 2000, p. 86).

Para realizar o levantamento de informações junto aos alunos a respeito da sua familiaridade com as mídias em geral, utilizamos um questionário de múltipla escolha como instrumento de coleta dos dados, cujo propósito era de conhecer a familiaridade entre os educandos e as mídias em geral e o tempo de manuseio delas diariamente por eles, seja online ou off-line e, ainda; identificar os tipos de mídias que eles têm acesso no dia a dia.

Conhecendo a relação dos alunos com as mídias nos possibilitou a escolha da ferramenta adequada para ministrar as aulas e fazer gravações de vídeo para os alunos assistirem antecipando as aulas e tirarem dúvidas posteriormente. Os tipos de mídias utilizadas, pelos alunos, também, viabilizaram a criação e o envio de listas virtuais de atividades complementares e diagnósticas.

A pesquisa de campo foi realizada com 18 alunos do 9º ano matutino de uma escola pública estadual do município de Sítio Novo no estado do Tocantins. Além dos aparelhos midiáticos dos alunos, ainda foram utilizados notebooks existentes na escola.

As aulas aconteceram durante 6 encontros presenciais, no período de 04 a 13 de fevereiro do ano de 2018, com 6 horas/aula cada, num total de 12 horas/aula, trabalhamos os conteúdos sobre potência: contexto histórico, definição, observações importantes e potência de um número real com expoente inteiro.

Com antecedência, eram enviados aos alunos, as videosaulas através de links para download dos conteúdos a serem trabalhados, também, via whatsapp e blog. No quadro 9 a seguir, apresentamos os procedimentos metodológicos e as atividades aplicadas nesta pesquisa em cada encontro. Cabe salientar que, estas práticas se repetem a cada final de conteúdo e, início de um novo, é o feedback.

3. PAPEL DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO/ TICs NO ENSINO DA MATEMÁTICA

É inegável que a utilização de computadores é muito mais sedutora do que a caneta e o caderno, a que se está acostumado. Sendo assim, não há como negar que as novas tecnologias são instrumentos que podem transformar o processo de ensino aprendizagem.

> Estarmos alheios à utilização de tecnologias de informação e comunicação é deixar de levarmos em conta que estes recursos tecnológicos têm se desenvolvido rapidamente e estão presentes na vida cotidiana de todos nós, ficando simplesmente impossível ignorar a presença deles (CALIL, 2011, p. 21).

Segundo o autor, é necessário abrir-se as portas da escola para as novas tecnologias, pois já não cabe mais aquele ensino no qual o professor apresenta o conteúdo, resolvendo alguns exercícios, para, logo em seguida, aplicar uma lista infindável de atividades que nem todos os alunos realizam, achando que eles já se encontram aptos para a realização de um teste para avaliar sua aprendizagem.

> Portanto, há que se preocupar na formação dos professores com essas novas gerações e verificar o quanto essa formação capacita esses novos atores que encenarão nas salas de aulas uma história Matemática menos aterrorizante, como a que se tem apresentado até agora para a maioria dos alunos (CALIL, 2011, p. 22).

O mundo moderno exige cada vez mais preparo e o acesso às tecnologias é irrefutável, contudo, observa-se que um grande número de professores não se utiliza ou faz pouco uso dos ambientes virtuais como material didático, não somente na matemática, como nas demais disciplinas.

Neste contexto Sarti (2014) comenta que

> A tentativa de inserir tecnologias na educação ocorre, na maioria das vezes, pelas exigências econômicas e políticas do desenvolvimento industrial e tecnológico do mundo contemporâneo, formado por elementos como máquinas, ferramentas, trabalhadores especializados, produção em série, entre outros, voltados para uma produção de bens materiais no menor tempo possível, sem uma visão do professor em sala de aula (SARTI, 2014, p. 13).

O autor afirma que, o uso das TICs no ensino da matemática exige uma nova maneira de ensinar, revolucionando os meios tradicionais de aprendizagem. O papel do professor passou a de ser um "guia, facilitador" que utiliza novas fontes de informação, vislumbrando criar hábitos e habilidades para o processo seletivo de pesquisa e de processamento de informações.

Como exemplo do que os professores podem utilizar no ensino da matemática, França (2018, p. 1) destaca:

Livro digital: tecnologia que vem se tornando cada vez mais popular entre os jovens. Ele explora recursos que "vão muito além do que é apresentado no livro didático impresso".

> [...] o texto original pode ser complementado com vídeos, áudios, animações, simulações, mapas interativos, softwares, links e muitos outros materiais que visam a facilitar a aprendizagem. Esses recursos ajudam professores e alunos a contextualizarem e conectarem os conteúdos, tornando o conhecimento mais aprofundado (FRANÇA, 2018, p. 2).

Gameficação: estimula o aluno a aprender melhor e de um modo divertido. A autora explica que ao aplicar os conhecimentos nos jogos, fica mais fácil colocar o conhecimento em prática e fixar o conteúdo aprendido nas aulas.

Redes sociais: a criação de grupos propicia aos professores o envio de materiais diferentes e interessantes, atraindo a atenção do aluno, fugindo do formato padrão visto em sala de aula. Para a autora:

> Os grupos permitem que os alunos discutam os conteúdos entre si e tirem

> suas dúvidas com os colegas de maneira mais prática e rápida. O professor pode até mesmo propor debates a respeito de notícias e acontecimentos que se relacionem com o conteúdo trabalhado em aula (FRANÇA, 2018, p. 3).

Avaliação online: inova o jeito de avaliar-se. Tornando tudo mais prático, rápido e acessível. Segundo a autora:

> [...] as avaliações online têm muito a contribuir - tanto no que diz respeito ao tempo de correção quanto aos resultados dos alunos. Isso porque esse tipo de atividade é corrigido automaticamente e gera relatórios de desempenho que vão muito além do número de acerto (FRANÇA, 2018, p. 3)

Neste sentido, verifica-se que a tecnologia se encontra presente nos processos pedagógicos, facilitando o ensino da matemática, no sentido de melhorar a aprendizagem, atualizando os procedimentos didáticos.

4. METODOLOGIAS ATIVAS

Metodologias ativas da aprendizagem são ferramentas didáticas que servem para fortalecer a aquisição do conhecimento no processo de ensino aprendizagem, conforme Neves et al. (2018, p. 12) é o "fazer para aprofundar o saber".

Para o autor, o ensino tradicional encontra-se focado, quase sempre, no monólogo do professor e, em contrapartida, as metodologias ativas surgem para beneficiar este fato, uma vez que elas acabam por diversificar as características individuais da aprendizagem. Sendo assim, Neves et al. (2018, p. 12) afirmam que "as metodologias ativas aprofundam os conhecimentos, estimulam a comunicação, ampliam a capacidade de ouvir a outra pessoa falar, estimulam os trabalhos de equipes, desenvolvem a motivação individual e coletiva".

Neste contexto, as metodologias ativas só podem ter significância quando ocorrer uma adesão total, tanto dos professores quanto dos alunos em relação às atividades propostas. Assim, observa-se a importância de que as metodologias utilizadas venham a atender as várias singularidades presentes em uma sala de aula.

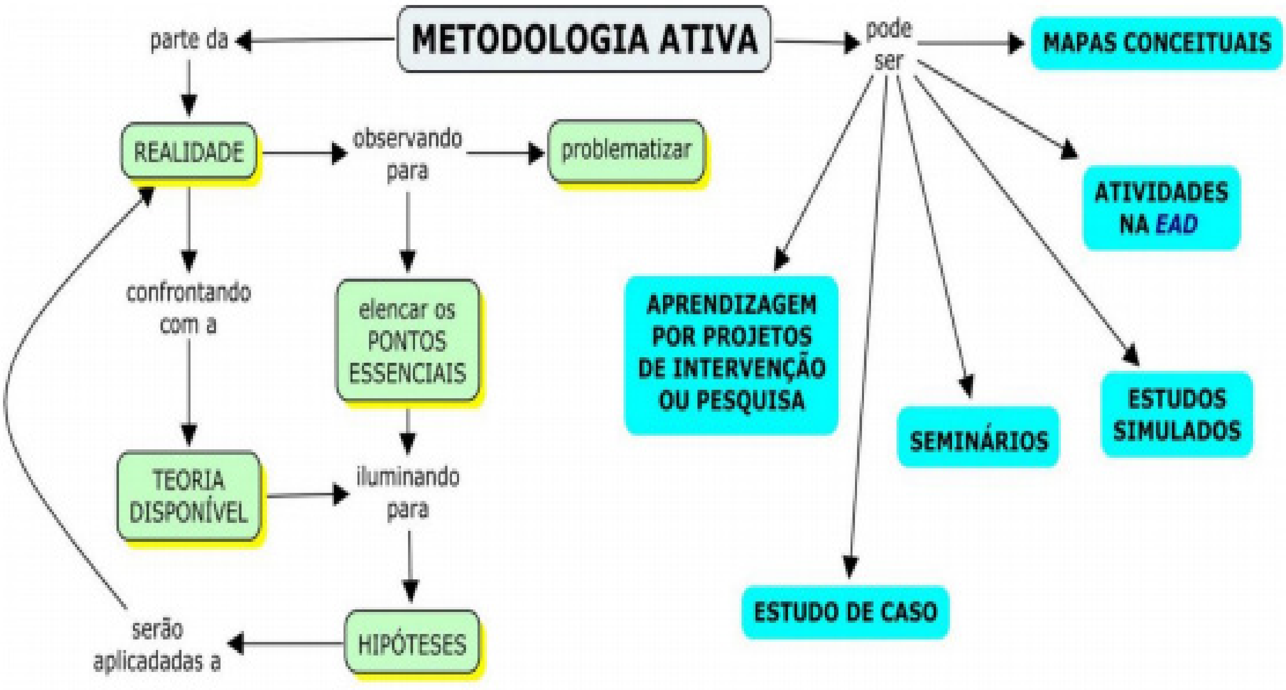
Para Bacich et al. (2018), a aprendizagem do aluno que se encontra inserido em uma instituição convencional de educação, demanda não somente habilidades, mas, também, conhecimentos didáticos e metodológicos que, muitos professores não se encontram preparados para tal.

Ainda de acordo com Bacich et al., (2018, p. 4), a formação pedagógica do professor deve estar focada por atividades que sejam criadoras, reflexivas, críticas e associadas a uma linguagem compartilhada, usando as mídias e as tecnologias como instrumentos da cultura, estruturantes do pensamento, do currículo, das metodologias e das relações pedagógicas.

> É preciso reinventar a educação, analisar as contribuições, os riscos e as mudanças advindas da interação com a cultura digital, da integração das TDIC, dos recursos, das interfaces e das linguagens midiáticas à prática pedagógica, explorar o potencial de integração entre espaços profissionais, culturais e educativos para a criação de contextos autênticos de aprendizagem midiatizados pelas tecnologias (BACICH et al., 2018, p. 4).

A seguir, a figura 1 apresenta de maneira resumida um organograma onde estão dispostas as metodologias ativas e suas finalidades.

Figura 1 – Metodologias ativas



Fonte: Gouvêa et al. (2016)

Com as novas formas de ensinar e aprender matemática, é fundamental valorizar os conhecimentos prévios do aluno, bem como criar uma atmosfera positiva em sala de aula para fluir a sua criatividade.

Figura 2 – Inovação e criatividade no processo de ensino aprendizagem

Fonte: Vosgerau (2014)

4.1 Sala de Aula Invertida

No ensino convencional, os professores procuram garantir que todos os alunos aprendam o mínimo esperado. Segundo Bacich et al. (2018), os conceitos básicos são explicados em aula e os alunos devem estudá-los e aprofundá-los através de leituras e atividades. Todavia, os autores afirmam que este processo pode ser invertido, a partir do momento em que o aluno tenha desenvolvido o domínio de ler e escrever.

> [...] as informações básicas sobre um tema ou problema podem ser pesquisadas pelo aluno para iniciar-se no assunto, partindo dos conhecimentos prévios e ampliando-os com referências dadas pelo professor (curadoria) e com as que o aluno descobre nas inúmeras oportunidades informativas de que dispõe (BACICH et al, 2018, p.27).

Segundo Valente (2014, p. 86), a sala de aula invertida é uma modalidade de e-*learning* onde os conteúdos e as instruções são estudados *online* antes mesmo que o estudante compareça à sala de aula. Desta forma, este espaço passa a ser um lugar onde os alunos trabalham os conteúdos já estudados, “realizando atividades práticas tais como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo e laboratórios”, dentre outros.

De acordo com o autor, a inversão ocorre uma vez que:

> [...] no ensino tradicional a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar alguma atividade de avaliação para mostrar que esse material foi assimilado. Na abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes da aula e a aula se torna o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina (VALENTE, 2014, p. 86).

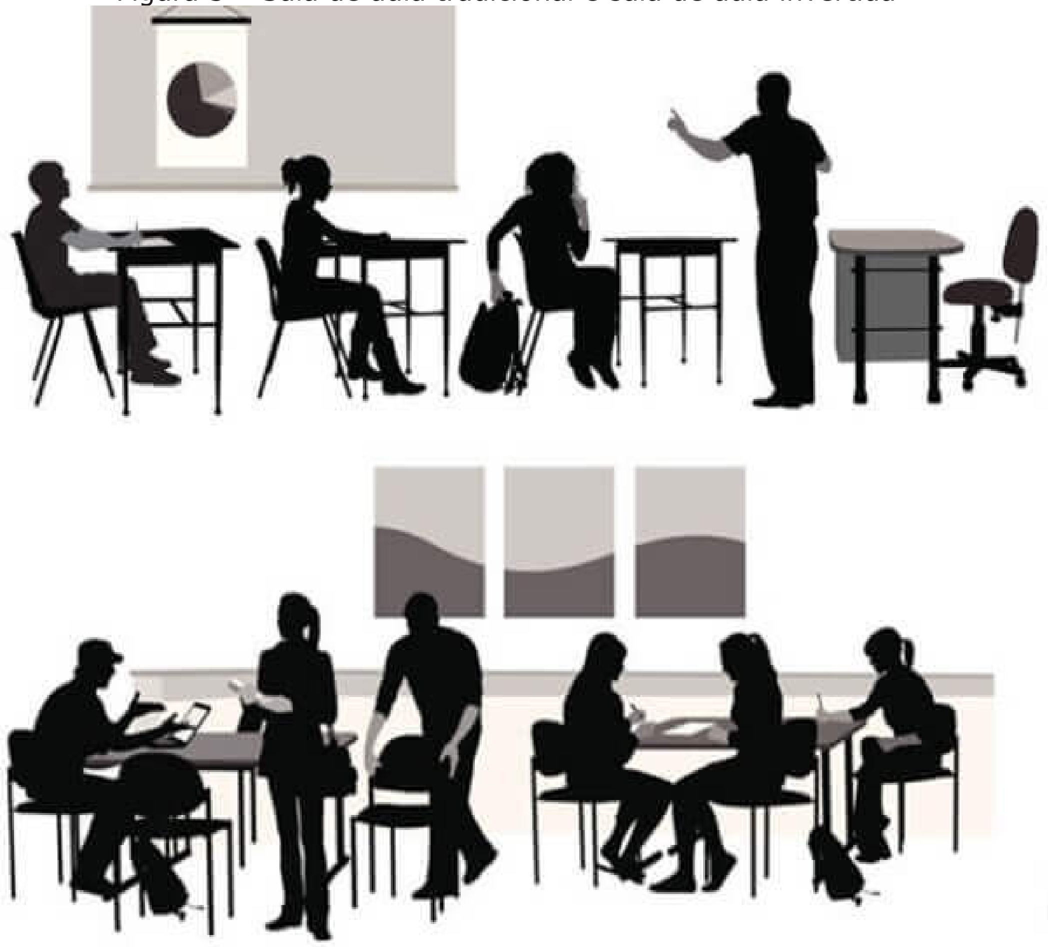
Neste contexto, a sala de aula invertida é uma metodologia de ensino que usa a inversão do processo tradicional de aprendizagem, pois nela, o aluno não aprende somente em sala de aula, mas também fora dela, com o auxílio de recursos tecnológicos.

Desta forma, o aluno pode aprimorar seu conhecimento antes mesmo de estar inserido na sala de aula e, o período em que está na escola, pode ser utilizado para o esclarecimento de dúvidas e a realização de exercícios. Bacich et al. (2018) explicam que a aula invertida é uma forma na qual o aluno parte, primeiramente para a parte de pesquisas, projetos e produções para depois realizar as atividades presenciais, aprofundando seus conhecimentos e competências através de atividades monitoradas pelo professor.

Para os autores, a sala de aula invertida possibilita que os alunos sejam responsáveis pela própria aquisição do conhecimento e aprendizagem. Com esta metodologia o atendimento junto ao aluno pode ser feito de modo individual ou em grupo.

A seguir, na figura 3 há uma comparação de uma sala de aula tradicional e uma sala de aula invertida.

Figura 3 – Sala de aula tradicional e sala de aula invertida



Fonte: Aquino (2017)

Conforme afirma Valente (2017, p. 86), a ideia de sala de aula invertida foi proposta pela primeira vez por Lage, Platt e Treglia. Foi denominada de *inverted classroom* e sua utilização data do ano de 1996 na disciplina de Microeconomia, na Miami University, em Ohio, nos Estados Unidos.

> Essa abordagem foi implantada por esses autores em resposta à observação de que o formato de aula tradicional era incompatível com alguns estilos de aprendizagem dos alunos. Com isso eles planejaram a disciplina na qual os alunos realizavam, antes da aula, leituras de livros didáticos, assistiam a vídeos com palestras e apresentações em PowerPoint com superposição de voz (VALENTE, 2017, p. 86).

A fim de assegurar que os alunos estudassem os conteúdos, Valente (2017, p. 86), afirma que a turma tinha que completar uma lista com exercícios avaliados regularmente e valendo nota. O autor explica que o tempo de duração das aulas era empregado em atividades que incentivavam o aluno a processar e a utilizar os princípios de economia "em mini palestras que os professores apresentavam em resposta às perguntas dos alunos, experiências sobre economia que um grupo de alunos tinha que resolver, ou discussão sobre resolução de problemas" (VALENTE, 2017, p. 86).

Neste contexto, Valente (2017) comenta que houve uma comparação entre a turma que utilizou a sala de aula invertida com outra turma que fez uso do ensino tradicional. Assim, observou-se que os alunos da sala de aula invertida apresentaram-se mais motivados do que os outros. A figura a seguir apresenta um resumo do funcionamento de uma aula invertida.

Figura 4 – Funcionamento de aula invertida

Fonte: Ed Tech (2017)

A ilustração acima mostra o funcionamento de uma aula invertida. No primeiro momento, o aluno lê o conteúdo e assiste aos vídeos. Durante a aula, ele utiliza os conceitos na aplicação de exercícios, tira suas dúvidas e realiza um feedback com o professor. No terceiro momento, o aluno verifica seu desempenho e pode realizar exercícios de reforço propostos pelo professor.

Segundo Valente (2017, p. 90), a implantação de uma sala de aula invertida pode ser iniciada, pelos professores, do básico e, à medida que eles forem ganhando experiência, podem começar a fazer uso de estratégias baseadas em projetos e na investigação, em oposição às aulas expositivas que tradicionalmente costumavam administrar.

4.2 Uso de Videoaulas em Sala de Aula

Analisando-se a utilização de vídeos na educação, Oechsler (2015) afirma que esta ferramenta se encontra presente nos mais variados setores da sociedade. Isto pode ser observado através do modo como as pessoas vêm se comunicando na atualidade. Dentre elas, destaca-se textos enviados via telefone e WhatsApp, assim como o compartilhamento de vídeos e textos encaminhados às redes sociais. Assim, a autora destaca que:

> Nas escolas, essa mudança de comunicação também é percebida. Em alguns casos podemos ver alunos utilizando seus smartphones para registrar momentos da aula, como a fotografia de um assunto passado pelo professor no quadro, a busca de vídeos para complementar seus estudos, mensagens para

> professores e colegas com o intuito de sanar dúvidas dos conteúdos, entre outras interações (OECHSLER, 2015, p. 2).

Neste contexto, a autora explica que a interação entre a tecnologia e a educação pode influenciar no processo de produção do conhecimento, já que o conhecimento é produzido por meio de uma interação entre seres humanos e mídia, seja ela oral, escrita ou tecnologias digitais multimídia (OECHSLER, 2015).

De acordo com Borba (2014), os vídeos digitais são apresentados por meio de narrativas ou textos multimodais que reúnem informações através de diversos modos de comunicação, como por exemplo, "oralidade, escrita, imagens dinâmicas, espaços, formas de gestualidade e movimentos" (BORBA et al. 2014, p. 30). Ainda, para os autores, estes instrumentos podem ser integrados à utilização de "diferentes tecnologias como giz e lousa, o Geogebra, câmera digital, notebooks, dentre outras" (BORBA et al. 2014, p. 30).

Assim sendo, Oechsler et al. (2015, p. 3) comenta que o uso de vídeos vem despertando o interesse entre alunos e professores, pois ele possui um "forte apelo educacional" que pode ser incorporado ao ensino de qualquer área, principalmente nas aulas de matemática.

Contudo, Domingues (2014, p.12), enfatiza que "existem várias falhas no uso de vídeos em aulas de matemática, uma vez que vários autores comentavam sobre sua utilização de um modo geral, mas é difícil encontrar pesquisas em Educação Matemática que trabalhem e discutam esse tipo de uso".

Para Oechsler (2015, p. 10) as falhas residem que nenhum trabalho realizado na área da educação matemática identificou como deve ser feita esta abordagem em sala de aula, tampouco quais as atividades em sala de aula devem ser utilizadas para instigar os alunos a criarem seus próprios vídeos.

4.3 Contribuições da TV Escola

Moretti (2017) explica que a TV Escola é um canal de televisão pertencente ao Ministério da Educação, surgido no ano de 1996 que tem por principal objetivo "a capacitação, aperfeiçoamento e atualização dos professores da rede pública na busca por uma escola de qualidade".

Orsi et al. (2003, p. 142) comenta que este canal pretende aperfeiçoar o trabalho dos professores, assim como servir como recurso didático para a aprendizagem. Os autores afirmam que "os filmes são transmitidos via satélite e captados pelas antenas parabólicas das escolas, todos os dias, para serem gravados e posteriormente assistidos pelos professores e alunos".

No entanto, eles observam que, “apesar da progressiva necessidade de novos recursos didáticos na educação, este canal não é muito usado pelos professores numa tentativa de amenizar os problemas relacionados com a precária qualidade educacional” (ORSI et al., 2003, p. 142).

4.4 Videoaula no Ensino de Matemática

Com o intuito de adequar o ensino da matemática à vida cotidiana dos alunos, minimizando o desinteresse que acomete a maioria dos estudantes, considera-se o uso das TICs. Dentre elas, pode-se destacar as vídeos aulas, vislumbrando uma maior integração com a presente disciplina, reduzindo-se, assim, as dificuldades encontradas nesta área científica.

De acordo com Santos et al. (2013, p. 2), é necessário que o aluno deixe de lado o ato de simples” aprender por aprender”, dando lugar ao sentimento de aprender para tornar-se um multiplicador destes conhecimentos, com maior responsabilidade pela sua participação em aula”.

Neste sentido, Michael (2012, p. 35) utilizou-se desta TIC em suas aulas de matemática, constatando que o resultado foi plenamente satisfatório, uma vez que a empolgação e a motivação reinaram entre os alunos, levando-os a compreenderem e desenvolverem os conteúdos propostos. No entanto, o autor enfrentou um grande obstáculo em sua experiência, que foi a língua, pois todo o material existente encontrado estava em inglês. Sendo assim, ele resolveu elaborar seu próprio material.

Assim, ele produziu vídeos e planejou “uma forma de suporte com o objetivo de suprir a falta de estrutura que na internet é oferecida. A empolgação e a motivação voltaram” (MICHAEL, 2012). Ainda para o autor, este método possui um grande potencial, embora seja somente uma questão de eficiência quando há uma conexão entre aluno e professor e não é o fator determinante da aprendizagem (MICHAEL, 2012).

De acordo com Silva (2011), a televisão e o vídeo são tecnologias que se encontram presentes na rotina das pessoas. No entanto, na área de ensino, estes instrumentos ainda não são utilizados em toda sua potencialidade pelos professores.

Ainda segundo a autora (SILVA, 2011) discorre que existem conteúdos gratuitos na internet que possuem uma vasta lista de conteúdos que podem ser acessados em qualquer hora e lugar. A seguir, apresenta-se alguns sites que oferecem conteúdos matemáticos: Calcule Mais, Youtube Edu, Eureka, Vestibulando Digital, Me salva, Grings, TV Escola, Isto é Matemática, Só Matemática, Canal do Ensino, Gênio da Matemática, Matemática muito fácil, dentre outros.

Por conseguinte, salienta-se da necessidade de o educador buscar atualizar-se, objetivando novas estratégias e instrumentos de ensino que enriqueçam suas aulas, deixando de lado o já ultrapassado ensino tradicional.

5. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos através da intervenção pedagógica desenvolvida numa amostra de 18 alunos do nono ano A, de uma escola estadual, localizada na cidade de Sítio Novo no Estado do Tocantins.

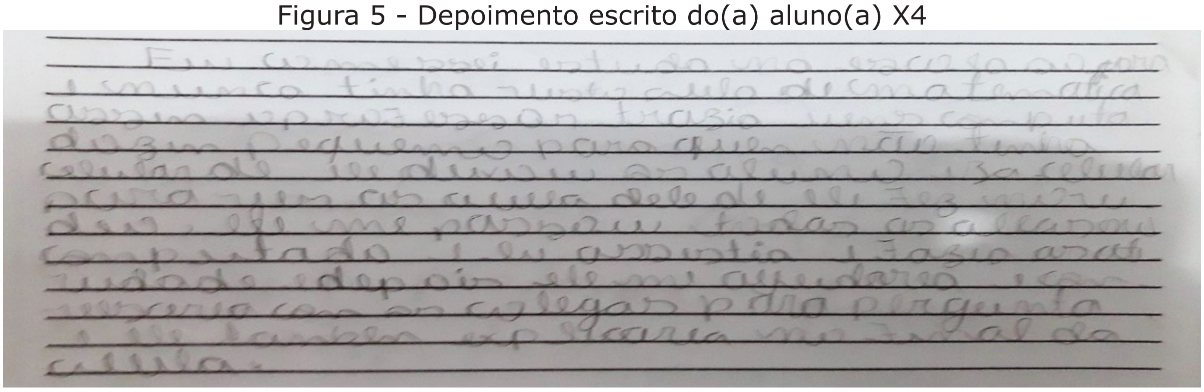
No desenvolvimento desta investigação aplicamos uma metodologia ativa diferenciada, a Sala de Aula Invertida, pois, atendia melhor à elucidação da problemática em questão neste trabalho. O professor utilizava vídeos em sala de aula para trabalhar os conteúdos. Os relatos dos alunos com relação a metodologia aplicada pelo pesquisador, até certo ponto foi surpreendente, pois com tanta inovação tecnológica, e busca por metodologias diferentes no ensino da matemática, esperava-se um encontro normal que eles já estivem acostumados com essa forma de assistirem aula.

As atividades realizadas em sala de aula eram gravadas para os alunos assistirem aos vídeos em casa. o professor complementava informações dos assuntos estudados em sala de aula, enviando novos vídeos aos alunos. Os estudantes também eram motivados a gravarem seus momentos de estudo e resolução de problemas e enviavam ao professor.

O aluno(a) X4 relata sobre a prática que:

> Eu comecei a estudar na escola agora, e nunca tinha visto aula de matemática assim. O professor trazia uns computadores pequenos para quem não tinha celular, ele deixava os alunos usar celular para ver as aulas dele que ele fez no vídeo, ele me passava todas as aulas no computador e eu assistia e fazia as atividades e depois ele mi ajudava, e eu conversava com os colegas para mi ajudar e ele também explicava no final da aula.

Figura 5 - Depoimento escrito do(a) aluno(a) X4

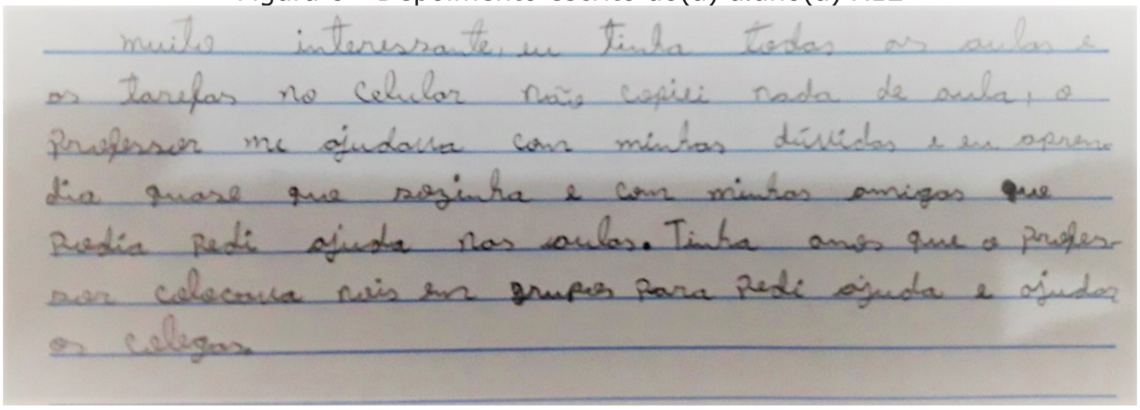


Fonte: Pesquisa (2019)

Para o(a) aluno(a) X12 as aulas foram

> Muito interessante, eu tinha todas as aulas e as tarefas no celular não copiei nada de aula, o professor me ajudava com minhas dúvidas e eu aprendia quase que sozinha e com minhas amigas, é que podia pedir ajuda nas aulas. Tinha horas que o professor colocava nós em grupos para pedir ajuda e ajudar as colegas.

Figura 6 - Depoimento escrito do(a) aluno(a) X12


muito interessante, eu tinha todas as aulas e
os tarefas no celular não copiei nada de aula, o
professor me ajudava com minhas dúvidas e eu apren-
dia quase que sozinha e com minhas amigas que
podia pedi ajuda nas aulas. Tinha amos que o profes-
sor colocava nóis em grupos para pedi ajuda e ajudar
os colegas.

Fonte: Pesquisa (2019)

A respeito do envolvimento e participação dos alunos nas aulas eu avalio como positivo, pois, a cada encontro notava-se que eles estavam mais motivados, pensantes e dedicados aos estudos.

A respeito disto, O(a) aluno(a) X1 relata que

> O professor quase não explicava muito, ele falava um pouco sobre a aula e deixava nós assistirmos os vídeos na aula e depois a gente fazia as atividades em casa, também eu assistia os vídeos e fazia as atividades anotando no caderno as minhas dúvidas que o professor pediu, depois eu pedia ajuda para os meus amigos e também para o professor, muito bom eu aprendia sozinho e o professor me ajudava com minhas dúvidas.

Percebeu-se que havia um encantamento deles diante das mídias, todos focados e concentrados assistindo as videoaulas nos seus aparelhos midiáticos ou nos disponibilizados pela escola.

Como podemos notar nas palavras do (a) aluno(a) X11:

> Eu gostei, eu não tinha celular e o professor trouce os Netbooks e eu pude assistir as aulas antes do professor explicar no quadro, entendi o conteúdo no vídeo fiz as atividades do vídeo e mais outras atividades e não copiei nada, era tudo no computador e depois eu podia ajudar os colegas da sala e depois o professor tirava minhas dúvidas e eu nem copiei nada, copiar é cansativo por isso gostei mais ainda.

Durante as aulas os alunos interagiam o tempo todo, nos debates, apresentando suas ideias ou tirando dúvidas dos colegas e, ainda, estavam sempre solicitando minha opinião sobre suas soluções e dúvidas acerca das atividades propostas. Segundo BACICH e MORAN (2018, p.11).

> As tecnologias facilitam a aprendizagem colaborativa, entre colegas próximos e distantes. É cada vez mais importante a comunicação entre pares, entre iguais, dos alunos entre si, trocando informações, participando de atividades em conjunto, resolvendo desafios, realizando projetos, avaliando-se mutuamente. Fora da escola acontece o mesmo, na comunicação entre grupos, nas redes sociais, que compartilham interesses, vivências, pesquisas, aprendizagens [...].

Foi trabalhado o conteúdo sobre potenciação simultaneamente em duas turmas de nono ano, uma no período matutino, turma A, com 18 alunos e, outra no vespertino, turma B com 10 alunos. E, para ter uma referência apliquei a metodologia a Sala de Aula Invertida somente na turma A, na turma B continuei com o método tradicional.

Os discentes da turma A, tinham acesso a vídeos explicativos que podiam levar para qualquer localidade para assistir e, os alunos sem esses recursos tecnológicos tinham disponíveis na escola os Netbooks para assistirem às videoaulas tanto em sala de aula quanto em sala reservada na escola no contra turno, pois, os Netbooks estavam reservados.

> [...] Espera-se que o estudante consiga, em casa realizar a leitura do assunto que compõe a aula que, no sistema usual, seria ministrada. As suas dúvidas e questionamentos surgem e, agora na sala de aula, serão colocados e resolvidos. Normalmente, em sala, os estudantes se reúnem em grupo para uma discussão preliminar e, ao final, o docente realiza um fechamento do assunto ou este é feito a partir de uma reunião geral, com todos os grupos [...]. (CORTELAZZO et al.,2018, p. 37)

Todos da desta turma assistiam uma, duas, três, ou quantas vezes houvesse necessidade, e, em qualquer ambiente, bastava um fone de ouvido que também providenciei para cada um deles que não tinha. Estes, ao contrário da turma B, levavam para a sala de aula questionamentos e dúvidas, além de participarem de debates sobre o conteúdo apontando sugestões de possíveis erros dos colegas.

O(a) aluno(a) X5 descreve essa situação da seguinte maneira:

> Muito bom eu gostei muito o professor deixava nós acessar o blog dele com a internet dele. (rsr) Legal. Ainda gostei de levar as aulas gravadas para assistir em casa e depois quando o professor ia explicar eu já sabia muitas das coisas que ele explicava, ele pedia pra gente assistir os vídeos em casa fazer as tarefas e escrever só as dúvidas para depois perguntar para a turma se alguém sabia resolver e depois ele resolvia também. Curti muito.

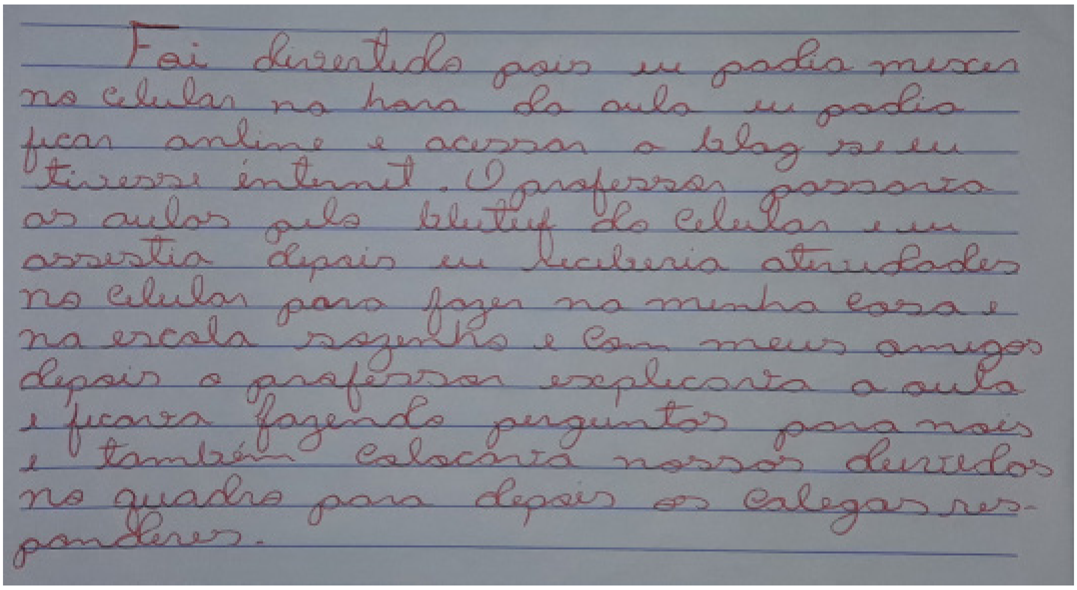
Durante a aplicação da atividade avaliativa observei que os educandos da turma A estavam centrados e cientes do que fazer, não pareciam ansiosos, nem preocupados e, nem inseguros. Até mesmo os alunos que faltaram neste período estavam tranquilos, pois tiveram acesso às aulas em casa. Para BACICH e MORAN

(2018, P. 12), “A chegada das tecnologias móveis à sala de aula traz novas possibilidades e grandes desafios. Elas são cada vez mais fáceis de usar, permitem a colaboração entre pessoas, integram alunos e professores”.

Este pensamento converge com os relatos do (a) aluno (a) X17:

> Foi divertido pois eu podia mexer no celular na hora da aula, eu podia ficar online e acessar o blog se eu tivesse internet. O professor passava as aulas pelo blutuf do celular e eu assistia, depois eu recebia atividades no celular para fazer em casa e na escola sozinho e com meus amigos, depois o professor explicava a aula e ficava fazendo perguntas para nós e também colocava nossas dúvidas no quadro para depois os colegas responderem.

Figura 7 - Relato escrito do(a) aluno(a) X17


Foi divertido pois eu podia mexer
no celular na hora da aula eu podia
ficar online e acessar o blog se eu
tivesse internet. O professor passava
as aulas pelo blutuf do celular e eu
assistia depois eu recebia atividades
no celular para fazer na minha casa e
na escola sozinho e com meus amigos
depois o professor explicava a aula
e ficava fazendo perguntas para nois
e também colocava nossas duvidas
no quadro para depois os colegas res-
ponderem.

Fonte: Pesquisa (2019)

No tocante à turma B, os educandos apresentavam insegurança e despreparo. Os resultados da atividade avaliativa que estão nos QUADROS 10 e 11 mostram exatamente isto, e abaixo seguem os cartões respostas dos discentes. Nelas, nomeei os alunos de X1, X2,..., X18, Y1, Y2,..., Y15, a fim de resguardar a identidade dos mesmos. As tabelas estão preenchidas com as letras C de certo e, E de errado, N de nula e, com hífen (-) aluno ausente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É imprescindível a adoção de práticas docentes que venham somar para uma melhor Educação Matemática capaz de ensinar para a atualidade. A prática antiquaria que coloca o professor como o único detentor do conhecimento e, que veem o aluno como um ser passivo e incapaz de aprender sozinho deve entrar em desuso para dar lugar às práticas modernas e atraentes aos olhos dos educandos e que seja compatível aos anseios dos mesmos. Modernizar o ensino e a aprendizagem matemática deve ser o pilar deste século.

Neste trabalho de conclusão de curso apresentamos a metodologia de ensino A Sala de Aula Invertida que é moderna e, cujo objetivo é inverter a situação do processo de ensino aprendizagem, colocando o aluno como ator principal do seu processo educativo. Agora, o aprendiz é ativo, tem responsabilidades e está conectado com o universo virtual que tanto o fascina. São metodologias como esta que devem ser disseminadas dentre os educadores de matemática, pois, para que possamos avançar cada vez mais na qualidade do ensino e da aprendizagem matemática das escolas públicas.

A respeito dos objetivos específicos visados neste projeto posso assegurar que foram atingidos. O primeiro objetivo que visava identificar estratégias de ação didáticas matemática como aporte à melhoria do ensino e aprendizagem do educando foi obtido e está foi a estratégia que encontrei para trabalhar com a metodologia da Sala de Aula Invertida.

As atividades síncronas e assincronas realizadas pelos alunos sob a orientação do professor pesquisador tinha como propósito oportunizar os alunos, desenvolverem suas habilidades em matemática básicas e em ferramentas tecnológicas, a partir da utilização das metodologias ativas.

REFERÊNCIAS

AQUINO, D. **Aula invertida não é modinha – é autonomia.** 2017. Disponível em: < https://www.entretantoeducacao.com.br/aula-invertida-nao-e-modinha-pedagogica-e-autonomia/>. Acesso em: 25 dez. 2018.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação**

CUNHA, M.D. Cotidiano e processo de formação de professores. In. CICILLINI, G. A. e NOGUEIRA, S. V. (ORGs) **Educação escolar: políticas, saberes e práticas pedagógicas.** Uberlândia, MG: EDUFU, 2000.

ED TECH. **Aula invertida.** 2017. Disponível em: < https://www.google.com/search?q=fotos+de+sala+-de+aula+invertida&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwiF6eqI677fAhVGhJAKHSzBCqEQsAR6BAgFEAE&biw=1024&bih=710#imgrc=UvZKmLs-k9oxiM:>. Acesso em: 25 dez. 2018.

FRANÇA, L. **Tecnologia na sala de aula: 5 novidades que já estão nas escolas.** 2018. Plataforma Educacional. Disponível em: https://www.somospar.com.br/tecnologia-na-sala-de-aula-5-novidades-que-ja-estao-nas-escolas/. Acesso em: 21 fev. 2019.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63. 1995.

GOULART, I. B. **Piaget: experiências básicas para utilização do professor.** Rio de Janeiro: Vozes Ltda., 1983.

GOUVÊA, E. P., ODAGIMA; A. M.; SHITSUKO, D. M.; SHITSUKO, R. Metodologias ativas: uma experiência com mapas conceituais**. Revista Educação, Gestão e Sociedade,** v. 6, n. 21, fev. 2016.

NEVES, V.; MERCANTI, L. B.; LIMA, M. T. **Metodologias ativas: perspectivas teóricas e práticas no ensino superior.** Campinas: Pontes Editores, 2018.

NOGUEIRA, J. C. **a Etnomatemática no ensino médio e a práxis do professor.** 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Universitário Salesiano de São Paulo, Americana, 2009.

OECHSLER, V. **Vídeos e educação matemática: um olhar para dissertações e teses.** Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro (SP), p. 1-12, 2015.

PONTES, Maria Gilvanise de Oliveira. **A Formação de Professores de Matemática no Brasil**. In: FARIAS, Isabel Maria Sabino. **Formação e Práticas Docentes**. Fortaleza: EDUECE, 2007.

SANTOS, C. R. BERNARDI, G**. Produção de vídeo aulas como apoio ao processo de ensino e aprendizagem de matemática: discentes em ação.** 2013. Disponível em: < https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/744/Santos_Cassandra_Rodrigues_dos.pdf?sequence=1>. Acesso em: 22 fev. 2019.

SARTI, L. R. **Uso de tic por professores em aulas do ensino médio e suas percepções sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos em física, química, biologia e matemática.** 93 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

SILVA, Mary Aparecida Ferreira. **Métodos e técnicas de pesquisa**. 2 ed. Curitiba: IBPEX, 2005.

SILVA, A. M. **O vídeo como recurso didático no ensino de matemática.** 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2011.

VALENTE, J. A. et al. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. **Revista Diálogo Educacional,** v.17, n. 52, p. 455-78, ou./dez. 2017.

VOSGERAU, D. S. A. R. **Utilização de metodologia ativas no ensino superior.** 2014. Disponível em: < https://slideplayer.com.br/slide/3247057/#>. Acesso em 11 dez. 2018.

CAPÍTULO 5

CONSTRUINDO OS SÓLIDOS DE PLATÃO POR MEIO DE DOBRADURAS

Iltilene Carvalho de Sousa[1]

Sergio Nolêto Turibus[2]

1 Ms., Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, iltilenecp@gmail.com
2 Dr.,Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, sergioturibus@professor.uema.br

RESUMO

A Geometria é de extrema importância para as pessoas no seu cotidiano, pois é através de seus conhecimentos que conseguimos fazer medições, analisar formas, tamanhos e grandezas. Este artigo é resultado de uma dissertação de metrado que trata sobre a construção dos sólidos de Platão por meio da dobradura realizada em uma escola estadual, do município de São Domingos do Maranhão - MA. O objetivo deste estudo foi usar uma alternativa metodológica de ensino de geometria espacial por meio de confecções de materiais concretos que possibilitassem aos alunos descobrirem as formas e as representações espaciais, com o propósito de compreender que a Matemática e a geometria estão em sua volta. Observou-se que os alunos tiveram melhor compreensão dos conteúdos estudados e que ao manusear esses materiais a clareza dos sólidos geométricos foram ampliados pelos alunos, visto que os mesmos estavam em contato direto com os objetos.

Palavras Chave: Construção de Sólidos de Platão, Geometria Espacial, Dobradura.

1. INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da Matemática que tem como objeto de estudo o espaço e as guras que a rodeia. Além de ser uma das mais antigas áreas de conhecimento, surgiu da necessidade do ser humano de medir terras, calcular áreas, construir templos, etc.

O saber geométrico do aluno é construído a partir do seu primeiro contato com o espaço e com os problemas propostos diante a este contato. Olhando para a natureza, percebe-se que há uma grande quantidade de recursos para os alunos estudarem geometria, por meio da observação pode-se reconhecer formas geométricas e também ser possível identi car conceitos e propriedades.

Atualmente, tenho observado que o ensino da geometria no municipio de São Domingos do Maranhão não está correspondendo à grande relevância de seu papel para o ensino da Matemática, sendo ministrada de forma descontextualizada da vivencia do aluno.

Nota-se que ao perguntar aos alunos o que eles entendem por geometria e como a vê em sua volta, a maioria responde simplesmente que são formas: triângulos, quadrados, círculos, retângulos, etc. e que não conseguem identi car como ela está a seu redor; ou como ela pode ser utilizada na realização de atividades de suas vidas; ou que não sabem como aplica-la no cotidiano.

Diante de tal realidade, muitos educadores, investigam novas estratégias de ensino ou inovações nas metodologias do ensino de Geometria, com o propósito de facili- tação na construção do conhecimento de seus alunos, pois a maior di culdade encontrada pelos professores, ao abordarem Geometria Espacial, trata-se da di culdade por parte dos alunos de desenvolverem uma visão tridimensional do mundo que os rodeia (BRASIL, 1997).

Dessa forma o ensino de matemática e de suas áreas precisam ser ensinadas usando materiais e estratégias que levem os alunos a compreender os conceitos matemáticos. Através do uso de materiais manipuláveis os alunos podem compreender a geometria de forma bem mais agradável e ao mesmo tempo conseguirão ter uma percepção espaço- temporal.

Com isso, essa dissertação tem como proposta apresentar as dobraduras (Origami) como recursos metodológicos no ensino dos sólidos geométricos, especificamente a Relação de Euler e os Poliedros de Platão. Por meio desse recurso os alunos serão capazes de identificar algumas formas geométricas planas e poderá entender melhor o conceito estudado.

Sobre essa associação, Nascimento (2013), ressalta que além dos alunos conhecerem os poliedros, figuras espaciais totalmente novas para eles, poderão também associar a geometria plana àquela, pois é impossível dissociar a primeira da segunda.

Portanto, o objetivo da presente proposta é levar pra dentro da sala de aula métodos didáticos que estimulem o interesse dos alunos pela matemática, que eles sejam capazes de percebe-la nas mais simples situações do cotidiano.

O trabalho está direcionado aos alunos do ensino médio na cidade de São Domingos do Maranhão MA, onde o mesmo irá mostrar que diferentes metodologias de ensino podem tornar as aulas mais atraentes, estimulará a participação do aluno e o induzirá a ser mais criativo.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O referido trabalho tem por base um estudo bibliográfico com contribuições teóricas de vários autores que realizaram trabalhos sobre as formas de utilizar a dobradura como um recurso didático para o ensino aprendizagem de Geometria e de pesquisa num ambiente direcionado. Conforme Martins (2000, pág. 28): trata-se, portanto, de um estudo para conhecer as contribuições científicas sobre o tema, tendo como objetivo recolher, selecionar, analisar e interpretar as contribuições teóricas existentes sobre o fenômeno pesquisado.

A pesquisa em si tem caráter exploratório, descritivo e explicativo, segundo

Martins (2000, pág. 30) se constitui na busca de maiores informações sobre o assunto com a finalidade de formular problemas e hipóteses. Entretanto a busca com base na coleta de dados dar-se-á de forma descritiva apresentando os resultados dos relatos dos alunos sobre a importância de trabalhar com materiais manipuláveis nas escolas.

Para a coleta de dados foi realizado a pesquisa de campo no C. E. Dep. Luiz Rocha, dos quais para obter os dados necessários à formulação do presente trabalho, observou a escola campo, como também houve aplicação da prática pedagógica, tais como planejamento, ensino dos conteúdos e atividades.

Após isso, buscando atender as necessidades encontradas por meio dos dados coletados, apresentou-se uma aula sobre elementos fundamentais da Geometria e Poliedros aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do Centro de Ensino Deputado Luiz Rocha (uma turma de 24 alunos), propondo-se a construção junto dos mesmos dos Poliedros de Platão por meio de dobradura de papel, além da aplicação e desenvolvimento de uma sequência de atividades, onde o material servirá para análise de dados.

No primeiro momento, com o intuito de conhecer a realidade do ensino da geometria dessa turma, aplicou-se a primeira atividade intitulada como Atividades de reconhecimento entre figuras planas e espaciais em busca de verificar os fatores que levam a impossibilidade de sua verdadeira aplicação. Conforme Ferreirra (2013, p.49) tais atividades tem o propósito de verificar se o aluno possui uma visão tridimensional das figuras apresentadas a ele, se o mesmo pode relacionar representações bidimensionais à sua respectiva forma espacial, conhecer a nomenclatura das figuras geométricas mais comuns e diferenciar corretamente a definição de figuras planas e espaciais.

Por meio dessa técnica, pode-se analisar de forma direta o comportamento dos envolvidos no processo aprendizado no que se refere ao ensino da Geometria. Com este propósito, buscou-se explorar as opiniões e as situações vivenciadas desses 24 alunos.

De acordo com Silva (2010, p.33) investigar a aprendizagem dos alunos antes de se aplicar o trabalho é fundamental para se obter o resultado esperado por tal com aplicação, e assim verificar quais condições será necessário para a melhoria do ensino dentro das salas.

No segundo momento, após a explanação de algumas noções de geometria e alguns conteúdos específicos deu-se continuidade com a proposta de utilizar o Origami (um recurso lúdico nas aulas de geometria) com a atividade Descobrindo os Poliedros de Platão utilizando dobradura modular. Tal atividade para Ferreira (2013, p.73) têm como objetivo principal propiciar ao aluno condições necessárias para que o mesmo conclua que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares.

Para a realização dessa atividade, a turma foi dividida em 4 grupos de 6 alunos, onde os mesmos foram solicitados a construir os poliedros de Platão por meio da confecção de módulos. Assim, sob a orientação do professor/pesquisador, os alunos puderam está produzindo os módulos individuais que serviram como faces para a montagem dos sólidos platônicos.

3 FUNDAMENTOS DO ENSINO DEGEOMETRIA

3.1 Geometria em Contexto Analítico

O homem desde os primórdios de sua existência, sempre teve como uma de suas características a busca frequente do saber, uma vez que procura constantemente adquirir novos conhecimentos e aperfeiçoar aqueles que já os tem.

Diante do exposto, sabe-se que o ser humano vislumbra compreender os objetos em sua volta, as diferentes formas com que eles se apresentam, como também busca modificá-los de acordo com as necessidades que surgem.

Com isso, em relação aos elementos naturais, ele procurava de alguma forma, utilizá-los a seu favor e ao mesmo tempo buscava representá-los de maneira que fosse explicada através de demonstrações e não apenas comprovada por um único meio, que seria o concreto.

> Assim, desde cedo nossos ancestrais foram aprendendo a escolher e produzir objetos adequados para caçar, pescar ou colher frutos. Também selecionaram materiais que permitiam cortar, preparar e carregar alimentos e água. Selecionaram materiais para a construção de abrigos, outros que serviam para enfeitar, e ainda outros para construir objetos sagrados. Como os povos se espalharam pelo planeta, materiais para funções semelhantes variavam de lugar para lugar (SOARES, 2009, p. 96).

Para adquirir o conhecimento acerca das formas geométricas, o homem o fazia observando o seu cotidiano, fazia comparações e relacionava tudo aquilo que estava a sua volta onde, um dos mais interessantes exemplos de conhecimento adquirido é constatado quando o homem percebeu que a Terra e o Sol tinham contornos semelhantes, e a essa capacidade de comparar e relacionar os objetos parecidos foi denominada de geometria do subconsciente.

> Esta geometria do subconsciente era empregada pelo homem primitivo para fazer ornamentos decorativos e desenhos, e provavelmente é correto dizer-se que a arte primitiva preparou em grande escala o caminho para o desenvolvimento geométrico posterior (EVES, 1992, p. 02 apud WAPPLER; GRANDO, 2014, p. 2).

A geometria é uma criação, sem sombra de dúvidas essencialmente humana, da qual mesmo não se tendo certeza de quando surgiu, sabe-se que ela nasceu muito antes de qualquer consideração teórica sobre ela mesma, logo, pode ter surgido juntamente com o próprio ser humano, quando esse sentiu a necessidade de aprender a adaptar coisas e espaços procurando satisfazer suas necessidades (SOARES, 2009).

O estudo de Soares (2009), é justificado nas palavras de Toledo e Toledo (2009), pois os autores informam que não se pode afirmar as verdadeiras origens da geometria, uma vez que a escrita que se incumbe de registrar a vida e costumes das civilizações surgiu apenas há 6 mil anos atrás, e por isso, o que se sabe a respeito de sua existência e suas contribuições para a humanidade que surgiram antes desse período, são os achados de objetos pertencentes a esses povos, mas que graças a tais vestígios é que hoje sabemos que as grandes civilizações antigas chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia já possuíam muitas informações de natureza geométrica (CARVALHO, 2010, p.135).

Diante dessa premissa e analisando-se o contexto da geometria, entende-se que o que culminou no seu surgimento, foi o fato de ela ser base para inúmeras necessidades que acometem o ser humano, desde fazer uma simples divisão de terras, saber a distância entre uma terra e outra, até construir moradias, monumentos, pirâmides, etc.

> As primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos foi a noção de distância (EVES, 1997 apud PIASESKI, 2010, p. 08).

Com o advento da geometria, essa passa a ser um conhecimento muito valorizado e consequentemente aprimorado na Grécia antiga por seus grandes matemáticos, dentre eles Tales de Mileto, Pitágoras, Aristóteles e Euclides, que procuravam expor suas teorias com uma certa convicção, e para isso realizavam constantes estudos sobre a relação entre os objetos, suas formas, medidas e cálculos.

3.2 A Utilização da Geometria nas Escolas Brasileiras

A geometria começou a surgir em algumas escolas através de finalidades militares, em 1648, mas por um certo tempo era vista apenas nos cursos superiores, e em relação ao ensino secundário, muitos queriam que ela fosse reduzida do currículo ou mesmo que ela não fizesse parte do ensino de matemática. Mas, a partir da década de 1980, vemos recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para que o trabalho com a Geometria desde dos anos iniciais de escolarização seja mais valorizado.

Com isso, mesmo inserindo-se esse conteúdo nos livros didáticos, percebe-se que o ensino da geometria no Brasil vive momentos difíceis, uma vez que tal conteúdo é desprezado por professores e alunos, ou muitas vezes tem seu conhecimento repassado de forma fragilizada, levando assim vários autores a buscarem discussões para melhorar o quadro, uma vez que esse conteúdo é de extrema importância como mostra os PCN's:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, através dele, os alunos desenvolvem um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p. 213-4).

Para que venha a acontecer o desenvolvimento da geometria nas escolas, é preciso que a mesma seja trabalhada com docentes atualizados para atender à demanda crescente pela busca do ensino em todas as séries.

> A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações- problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente, os trabalhos com noções geométricas contribuem para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, e identificar irregularidades e vice e versa (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p. 213- 4).

Andrade (2014), ainda salienta que, para o aluno:

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física (BRASIL, 2006, p. 44).

É notório as grandes dificuldades encontradas ao ensinar geometria no nível fundamental, e essas se retem em maiores complicações para os estudantes do Ensino Médio, em sua maioria adolescentes, e consequentemente se estende no nível superior. Santos (2016), salienta que um dos motivos é pelo fato de que as escolas sempre deixam esses conteúdos para serem estudados no fim do ano letivo e isso faz com que os professores não os aprofundem da forma que deveriam.

3.2.1 Os Poliedros

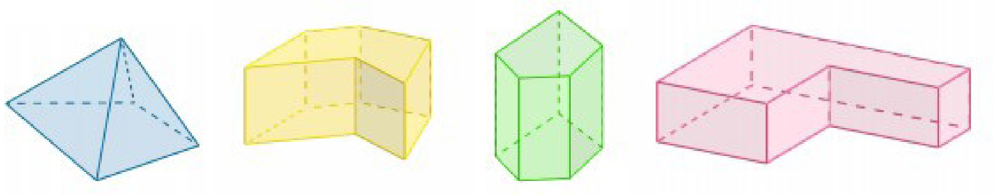
Alguns autores interpretam o conceito de poliedros de maneira bem sucinta, como apresentada por Machado (2000, p.16), trata-se de um objeto com muitas faces. A terminação edro provém da palavra hedra, que em grego que dizer face. Um poliedro tem bicos, que são ângulos poliédricos, e faces planas.

1. Nota-se que tal definição é expressa de forma bem simples e informal, diferente das encontradas em livros didáticos do ensino básico conforme Brinez (2013): Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos de modo que cada lado de um qualquer desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono (DANTE, 2005).

2. Poliedros são sólidos cuja superfície é formada por partes planas. Esses sólidos não têm formas arredondadas (DOMÊNICO, 2019).

3. Toda gura geométrica de três dimensões, formada por polígonos é chamada de poliedro (IMENES, 2006). Na figura 1, apresenta-se alguns poliedros.

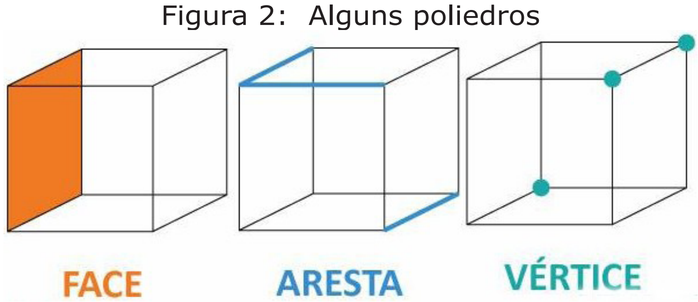
Figura 1: Alguns poliedros



Fonte: Tridapalli (2017)

Em poliedro podemos identificar três elementos básicos: faces (polígonos planos), arestas (lado de uma face do poliedro) e vértices (pontos de encontro das arestas). Observe a figura 2.

Figura 2: Alguns poliedros



Fonte: Educa mais Brasil (2019)

3.3 Poliedros de Platão

Considerado um grande filósofo e matemático, Platão nasceu em meados de 427 a.C. Teve uma boa educação, assim como todos os jovens aristocratas da sua época, recebendo aulas de retórica, música, matemática e ginástica. Viajou por várias partes do mundo grego, onde adquiriu grandes conhecimentos pitagóricos.

Ao voltar para sua cidade, fundou a famosa escola Academia, onde na sua fachada se encontrava a seguinte frase: Que ninguém que ignore a geometria entre. Muitos jovens da época foram a sua procura em busca de instruções, bem como nobres senhores com o propósito de debater suas concepções sobre a matemática e filosofia.

> A Academia em pouco tempo despertou o interesse de muitos jovens que gostariam de ter conselhos para que rumo seguir e ao mesmo tempo de vários homens importantes, dentre eles pode- mos citar: Leodamas de Thasos, Árquitas de Taranto, Teeteto de Atenas, Neocleides, Eudoxo de Cnido, Amyclas de Heracleia, Me- naechmus, Deinostratos, Athenaeus de Cyzicus, Hermotimus de Colofon, Felipe de Mende, Euclides, Asioteia de Filos, Lastênia de Mantineia, Aristóteles e muitos outros, que iam até a Academia para debater sobre várias ideias e assuntos. (Santos, 2015, p.15).

Por meio de suas observações, Platão, buscou compreender por meio do estudo geométrico a formação do Universo. Em seu tratado, Timeu, apresenta especulações sobre a natureza do mundo físico. Nesta obra Platão misticamente associou quatro dos cinco sólidos regulares a elementos da natureza: fogo, ar, água e terra e o quinto sólido ele associou ao universo. (BRIANEZ, 2013, p.51).

Sob o mesmo ponto de vista, Dante (2013) ressalta que:

> No diálogo Timeu (350 a.C.), Platão apresentou um estudo do Universo, que para ele consistia em formas; em objetos particulares; em Deus, o artesão; em espaço absoluto e em matéria bruta. Platão acreditava que tudo que era composto de terra, ar, fogo e água, e que a cada um desses elementos correspondia um poliedro regular que já era conhecido dos gregos. Platão associou à terra o hexaedro (mais especificamente, o cubo) por causa de sua estabilidade; ao fogo, o tetraedro, ao ar, o octaedro, e à água, o icosaedro, por serem sólidos constituídos de triângulos, para ele a unidade básica de todas as coisas. O dodecaedro representava o elemento do qual o Universo seria feito. (2013, p.214).

Esses sólidos ficaram conhecidos como poliedros de Platão, por ele ter chegado à conclusão de que só existiam cinco poliedros regulares, descrevendo cada um deles e ao mesmo tempo procurando mostrar como eram construídos.

Um poliedro de Platão pode ser identificado satisfazendo as seguintes condições:

1. Ser regular.

2. Todas as faces têm o mesmo número de arestas.

3. Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

4. Vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

3.4 O Uso de Origami no Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial

Atualmente foram desenvolvidas várias formas de se trabalhar a Geometria na escola, tudo isso para que o aluno tenha melhor entendimento sobre o estudo da mesma e vença as dificuldades que lhe faz não ter um bom aprendizado, pois o objetivo de explorar a Geometria, é mostrar exemplos com figuras geométricas, para que a aula se torne mais dinâmica e satisfatória.

> O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender. (LOREN- ZATO, 2006, p.7).

Assim, o mais importante de trabalhar materiais manipuláveis, como o Origami, é a coletividade que esse contexto proporciona, e, além disso, a utilização dos mesmos nas aulas de matemática oferece suporte para uma melhor aprendizagem, pois através dos exercícios propostos, busca-se o desenvolvimento da percepção. Girafa e Rancan (2012) armam essa possibilidade quando diz que:

> No processo de construção e de desconstrução de um Origami, são desenvolvidos aspectos como a observação, o raciocínio, a lógica, a visão espacial e artística, a perseverança, a paciência e a criatividade. (GIRAFA E RANCAN, 2012).

Acredita-se com isso, que o professor, além de dispor de materiais e saber usá-los, deve dar atenção especial à aprendizagem dos alunos, onde esses se sintam livres e integrados ao conteúdo, tornando-os participativos e produtivos.

O Origami vem sendo um material manipulável recorrido por educadores com a finalidade de proporcionar a realização de tarefas mais motivadoras. Além de fazer com que, a atenção, a imaginação, a criatividade, o poder de observação, a descoberta seja despertada no aprendiz. Toda essa discussão pode, também, promover e facilitar no desenvolvimento de atividades para o ensino-aprendizagem de conceitos geométricos. Assim sendo, ao fazer dobraduras observa-se que:

> Ao analisar os passos de construção de um Origami, percebe-se que diversas dobraduras foram utilizadas para se chegar ao resultado. Quando se observa mais atentamente os passos utilizados e suas combinações, verifica-se que novos padrões foram gerados. Definições como plano, ponto, retas paralelas, retas concorrentes, bissetriz, diagonal, etc. podem ser compreendidas por meio da visualização dos ângulos e das linhas vincadas no papel (Girafa e Rancan, 2012).

Sobre o ensino de conceitos de matemática usando a dobradura de papel, por este se tratar de material concreto, onde o educando possa ter um contato direto, facilita e dinamiza a aprendizagem, sendo estes abordados e aceitos inclusive pelo teórico Piaget, como pode ser observado na interpretação que Levandoski (2002), fez do que Piaget tem a informar sobre esse assunto:

> Os professores fazem melhor tirando proveito das características naturais das crianças. Eles podem fazer isso provendo riquezas materiais para as crianças olharem, tocarem, manipularem e levarem de um lado para outro. Tais materiais deveriam ser usados em grau muito maior do que é comum agora nas escolas havendo inclusive recomendações para que fossem construídos modelos para ensinar geometria (LEVANDOSKI, 2002, p. 28).

Com isso, percebe-se que conceitos de concreto e abstrato, por exemplo, podem ser facilmente fixados à mente do aluno através da utilização de materiais manipuláveis, mas não se pode esquecer que apenas a utilização de materiais manipuláveis não é o suficiente para um ensino eficaz, pois o mais importante no ensino-aprendizagem da Matemática é a atividade mental a ser desenvolvida pelos alunos (ROCCO; FLORES, s/d, p. 2), e a reflexão no processo e no produto.

Contudo, dentro do contexto de Geometria, quando tenta-se fixar as formas geométricas tanto planas como espaciais, suas nomenclaturas, propriedades e demonstrações, os materiais manipuláveis se fazem fundamentais como ferramenta para ajudar a criança principalmente no conteúdo a respeito da transição do objeto concreto para o abstrato.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

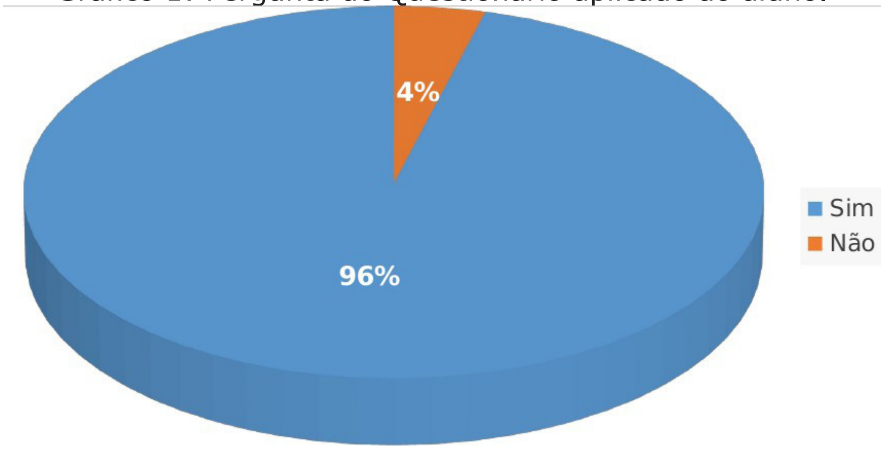
Na primeira atividade desenvolvida com a turma, buscou-se analisar quais eram os conhecimentos preexistente dos alunos sobre geometria. Pois é importante atentarmos que a construção de algo novo deve partir do que os alunos já conhecem.

Mediante a investigação, para observar o conhecimento que os alunos tinham acerca do assunto, foi de início perguntado aos mesmos se sabiam dizer o que é geometria. Dos vinte e quatro estudantes presentes, vinte e um responderam que sim (87,5%).

Ao tentarem explicar com suas próprias palavras, as justificativas foram as mais diversificadas. Um dos alunos argumentou dizendo "que são todos os cálculos que usamos para medir um terreno, uma casa, um espaço qualquer (Aluno 1)".

A maioria respondeu que são formas geométricas. Na segunda pergunta tinha como objetivo verificar se os alunos percebiam a geometria no seu dia a dia. O resultado está descrito no gráfico 1.

Gráfico 1: Pergunta do Questionário aplicado ao aluno.

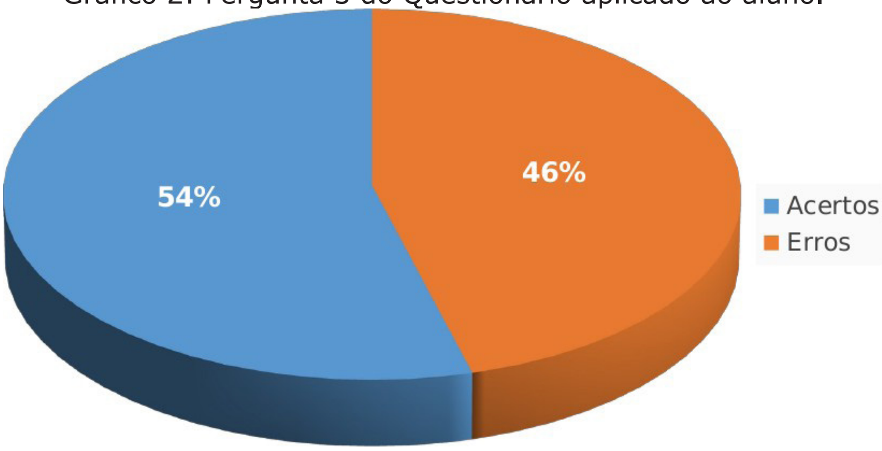


Fonte: Sousa, 2020

Observa-se que apenas um aluno disse que não sabia identificar figuras geométricas no seu dia a dia. Os demais afirmaram que conseguiam percebê-la na cerâmica da casa, no supermercado, no trabalho do pedreiro, no material escolar.

Na questão 3, gráfico 2, buscou-se verificar a compreensão dos estudantes em relação a comparar representações bidimensionais à sua forma espacial.

Gráfico 2: Pergunta 3 do Questionário aplicado ao aluno.

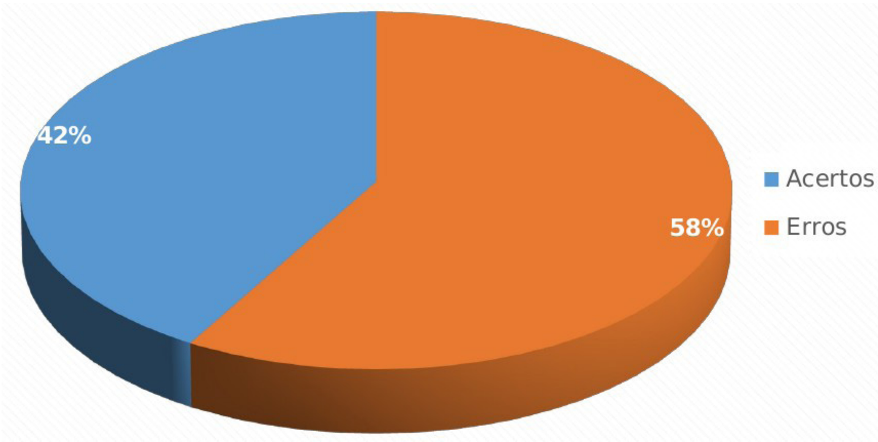


Fonte: Sousa, 2020

Analisando os dados expostos, percebeu-se que a maioria destes foram capazes de diferenciar as guras por meio do campo visual. É satisfatório constar que 54% dos estudantes conseguiram relacionar as formas geométricas planas com os formatos de objetos tridimensionais.

A questão 4, gráfico 3 refere-se a definição de figuras geométricas por meio da sua nomenclatura, com a finalidade de perceber alguns conhecimentos mínimos gerais que os alunos deveriam trazer de estudo anteriores.

Gráfico 3: Pergunta 4 do Questionário aplicado ao aluno.



Fonte: Sousa, 2020

A partir dos dados obtidos, constata-se que 58% dos alunos não foram capazes de associar o nome das guras geométricas e defini-las corretamente. De acordo com Nascimento (2013, p.32) essas dificuldades estão relacionadas ao fato de que os alunos pouco conseguem relacionar os conceitos, identificar cada sólido ou ainda, compará-los entre si. E ainda ressalta, que tal dificuldade é verificada na geometria plana como na geometria espacial, sendo que esta última, a dificuldade é maior. (NASCIMENTO, 2013).

4.1 Análise das atividades realizadas utilizando as dobraduras modulares na construção dos Poliedros de Platão

Atividade “Descobrindo os poliedros de Platão” utilizando origami:

1. Confeccione a seguinte quantidade de módulos usando origami: 32 módulos triangulares, 6 módulos quadrangulares, 12 módulos pentagonais e 48 módulos–encaixe.

2. Após os módulos estarem prontos, monte os poliedros com o mesmo tipo (e quando necessário os módulos-encaixe), e em seguida, registre em seu caderno o tipo e a quantidade de faces utilizada na confecção de cada poliedro.

3. Monte uma tabela com a quantidade de arestas, faces e vértices que cada poliedro obtido possui e verifique possíveis relações existente entre os seus elementos.

4. Verifique o número de arestas que concorrem em cada vértice de cada poliedro. O que você percebeu?

Antes de dar início a essa atividade, foi trabalhado a definição de poliedros, a sua classificação, a Relação de Euler, os Poliedros de Platão e um pouco da história do origami.

Após essa explanação, iniciou-se a primeira parte da atividade. A turma já dividida em 4 equipes, cada uma com 6 alunos, foi entregue a cada uma folhas no formato de quadrados, então solicitou-se que confeccionassem 32 módulos triangulares, 6 módulos quadrangulares, 12 módulos pentagonais e 48 módulos encaixe.

Durante o processo de produção dos módulos, percebeu-se que grande parte dos alunos sentiram dificuldades em manusear o papel e seguir o passo a passo de cada construção. Mesmo com obstáculos, não houve desistência da tarefa, pois tiveram ajuda daqueles que conseguiram compreender melhor as orientações. Dias (2015), em sua pesquisa, salienta que:

Todo o trabalho com origami modular é melhor aproveitado quando realizado em grupo para que a produção dos módulos não se torne cansativa, além do que, as atividades em grupo trabalham nos alunos a senso de solidariedade. (DIAS, 2015, p.56).

Assim, podemos ver na Fig.3 o momento de produção de cada módulo.

Figura 3: Confecção dos módulos pelos alunos.

Fonte: Sousa, 2020

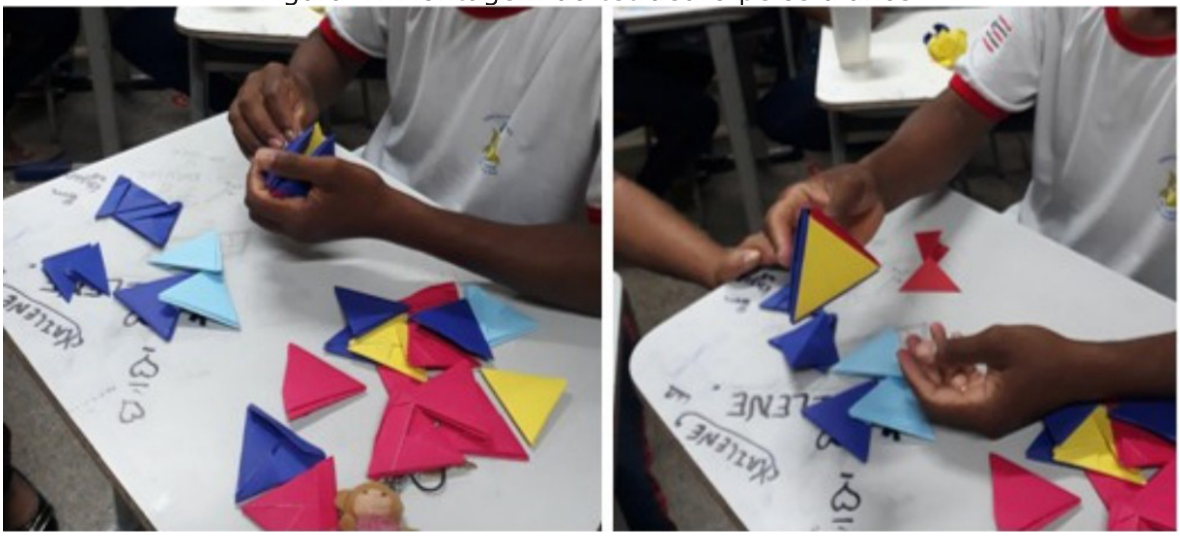
Na segunda parte do exercício, pediu-se que utilizassem módulos do mesmo tipo para obterem os poliedros e que ao mesmo tempo fossem registrando o tipo e a quantidade de faces utilizada para a montagem de cada um.

Nesse processo de montagem, observou-se que houve dificuldades na hora de

formar a figura do icosaedro e a do dodecaedro, devido ao grande número de peças a serem encaixadas na qual exigia uma certa habilidade. Mas, quanto ao tetraedro, icosaedro e hexaedro, foram as estruturas que os grupos montaram com mais facilidade.

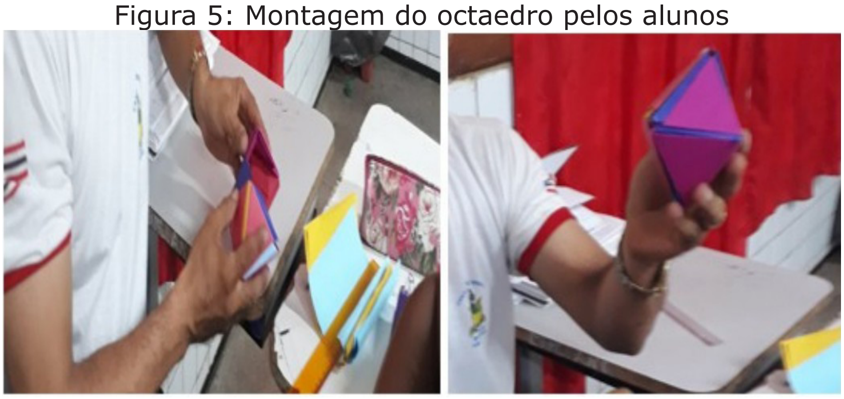
As figuras Fig.4 e Fig.5, mostram um pouco da vivencia dos alunos no processo de montagem de alguns dos sólidos.

Figura 4: Montagem do tetraedro pelos alunos.



Fonte: Sousa, 2020

Figura 5: Montagem do octaedro pelos alunos



Fonte: Sousa, 2020

Após a finalização de cada poliedro, os alunos realizaram a terceira parte da atividade, que foi anotar a quantidade de vértices, faces e arestas presentes em cada um e apresentar possíveis relações entre os elementos. Logo, os dados que os alunos levantaram sobre os poliedros de Platão estão de acordo com a tabela 1 (Elementos de um poliedro).

Tabela 1: Elementos de um poliedro

Nome do Sólido	Número de vértices	Número de faces	Número de arestas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

Com o manuseio do poliedro, informar quais eram os elementos, foi uma tarefa fácil, pois com o concreto facilitou uma compreensão mais rápida dos conceitos estudados. Já, na segunda parte do exercício, os mesmos levaram um tempo para analisar a situação proposta. Sendo que, apenas um grupo conseguiu descobrir uma relação possível.

Podemos confirmar isso nas palavras do grupo 1: "Se somarmos o número de vértices com

o número de faces, vemos que o resultado passa dois a mais que o número de arestas. Exemplo do tetraedro: 4 + 4 = 8; 8 6 = 2."

A última etapa dessa atividade, solicitou-se que os grupos, verificassem o número de arestas de cada face e o número de arestas que concorriam em cada vértice dos poliedros que construíram, registrando o que tinham percebido.

De início, percebeu-se que eles mostraram um pouco de incerteza ao que devia ser feito. No entanto, começaram a olhar cada figura construída, os seus elementos e a rabiscar em busca de chegarem a uma conclusão.

Conforme solicitado, todos os grupos chegaram uma solução correta ao problema dado. Os trechos abaixo relatam as respostas dada por duas das equipes:

> Olhando cada figura, notamos que de cada canto (vértice) do objeto, saem a mesma quantidade de linhas (arestas). No tetraedro, saem 3 arestas; no hexaedro, saem 4 arestas; no octaedro, saem 4 arestas; no dodecaedro, saem 3 arestas e no icosaedro, saem 5 arestas. E o número de arestas de todas as faces são a mesma. (Grupo 1)
>
> Observando os cincos objetos construídos, vimos que em cada vértice encontram-se o mesmo número de arestas e que as faces têm a mesma quantidade de arestas. (Grupo 2).

Diante de tais afirmações, percebe-se que através do material concreto utilizado, houve uma ótima compreensão dos alunos em relação aos elementos de um poliedro, conseguiram perceber três condições na qual se enquadram os Poliedros de Platão, sendo uma delas a Relação de Euler.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pela observação dos dados analisados, percebe-se que o ensino da geometria deve ser levado mais a sério dentro do nosso município. Pois, muitos estudantes estão avançando etapas sem um bom conhecimento geométrico, principalmente a respeito da Geometria espacial.

Conteúdos como estes, estão sendo deixados de lado e isso acaba afetando nas habilidades do aluno em compreender a sua relação com o mundo a sua volta. Mesmo diante a uma falha no ensino da mesma, ainda podemos reverter esse quadro.

A proposta aplicada foi o primeiro passo a ser dado e comprovou-se que buscar novas ferramentas de ensino, podem trazer bons resultados. E como educadores no ensino da matemática, devemos proporcionar meios que facilite a compreensão do conteúdo de Geometria.

Desta forma, recomenda-se a utilização do Origami como recurso didático, uma vez que o mesmo é de grande valia para o ensino de Geometria. No entanto, é necessário ressaltar que ele quando usado em sala de aula não deve ser visto como a única forma de ensino, e muito menos funcionar como passa tempo, pois este serve para fazer com que o educando entenda aquilo que o educador quer ensinar.

Assim, notou-se que a atividade utilizando a dobradura na construção dos poliedros de Platão, foi bastante produtiva contribuindo para o melhor esclarecimento do conteúdo, aflorando a capacidade de investigação de cada aluno e promovendo um elo de ligação entre as informações da prática e da teoria.

E a temática não se esgota nesse estudo, pois a ideia é continuar pesquisando outros materiais didáticos que proporcionem o seu ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas**: uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, Fabiana Chagas de Andrade, 2014.

ASCHENBACH, Lena; FAZENDA, Ivani; ELIAS, Marisa. **A arte- magia das dobraduras:** histórias e atividades pedagógicas com Origami, Editora: Scipione, 1990.

BICALHO, Jossara Bazílio de Souza. **Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino de matemática:** geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica. Viçosa - MG, 2013.

BRIANEZ, Fabiana. **Conceito e propriedades elementares de poliedros e seu ensino**. São Carlos-SP, 2013.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. **Matemática:** Ensino Fundamental. Ministérios da educação, Brasília, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo, Editora Atica, 2013.

FERREIRA, Fabrício Eduardo. **Ensino e aprendizagem dos poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami**. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto, 2013.

GIRAFFA, Lucia Maria Martins; RANCAN, Graziele. Geometria com origami: incentivando futuros professores. In: **IX APEND SUL**, Seminário de pesquisa em educação da região Sul, 2012, Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/316/537>Acesso em: 20 de fevereiro de 2020.

LEVANDOSKI, Antonio Amilcar. **Ensino e Aprendizagem da Geometria através das Formas e Visualização Espacial**. Universidade Federal de Santa Catarina, (Dissertação de Mestrado), 2002.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

LORENZATO, Sérgio et al.**O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano III, nº 4, p. 3 13, 1º semestre 1995.

MARTINS, Gilberto de Andrade, Manual para elaboração de monogra as e disser- tações, 2 ed. São Paulo: Atlas, 2000.

MACHADO, Nílson José. **Vivendo a matemática:** Os poliedros de Platão e os dedos da mão, Editora: Scipione, 2000.

NASCIMENTO, Janio Benevides de Souza. **O estudo da geometria espacial por meio da cosntrução de sólidos com materiais alternativos**. Centro Universitário Univatis (Dissertação de Mestrado), 2013.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do Ensino da Geometria no Brasil:** Causas e Consequências, In: Zetetiké, n.1, p. 07-17, Unicamp, mar. 1993.

PCNS. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e quarto ciclo do ensino funda- mental: matemática, Brasília: MEC /SEF, 1998.

PIASESKI, Claudete Maria. **A geometria no ensino fundamental**: Monografia de Licenciatura em Matemática do curso de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI Campos de Erechim, 2010.

ROCCO, Cristiani Maria Kusma; FLORES, Claudia Regina. **O Ensino de Geometria:** problematizando o Uso de Materiais manipuláveis, Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/123-1- A-gt5_rocco_ta.pdf> . Acesso em: 23 de janeiro de 2020.

SANTOS, Marli Pires dos [org.], **O lúdico na formação do educador**. 2. ed. Editora. Petrópolis: Vozes, 1998.

SANTOS, Patrícia Arruda dos. **Os cinco sólidos de Platão no campo da geometria**.

Faculdades Integradas do Vale do Ivaí, IVAIPORÃ – 2015 SILVA, Marcio Hernani Barbosa. **Estratégias de Ensino no Aprendizado dos Poliedros de Platão**. Monografia de Licenciatura em Matemática do curso de Matemática da Fundação Educacional do Município de Assis FEMA Assis, 2010.

SOARES, Eduardo Sarquis. **Ensinar matemática:** desafios e possibilidades. Ed. Dimensão, Belo Horizonte, 2009.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Teoria e Prática da Matemática:** como dois e dois. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

WAPPLER, Fernanda Paula; GRANDO, Claudia Maria. **Experimentação em Geometria:** Teorema de Pitágoras, Fundação Universidade Federal do Pampa (UNI- PAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

CAPÍTULO 6

SALA DE AULA INVERTIDA: uma proposta para o ensino e aprendizagem matemática no ensino fundamental anos finais

Celina Amélia da Silva

Alysson Rangel Sousa Brito

RESUMO

O presente trabalho faz uma breve análise sobre as mudanças advindas das evoluções tecnológicas e como elas influenciam diretamente o ambiente escolar. Pretende, também, caracterizar a Sala de Aula Invertida como uma modalidade de ensino híbrido em que o aluno aprende em ambientes diferentes, presencial e virtual, e como esta metodologia, agregada a elementos tecnológicos, pode ser um agente facilitador no ensino de matemática otimizando o tempo em sala de aula e permitindo que aluno seja capaz de vivenciar experiências de aprendizagem diferentes dos oferecidos tradicionalmente. Para tanto, busca-se atingir os objetivos da identificação dos elementos que distinguem o processo de ensino-aprendizagem tradicional do ensino híbrido, mostrando suas aplicações, além disso, foi possível estudar as características da metodologia da sala de aula invertida e como as práticas baseadas nessa metodologia podem evoluir o engajamento dos alunos do 9º ano do ensino fundamental e otimizar o processo de ensino aprendizagem de matemática. Os resultados evidenciaram que a compatibilidade da metodologia da sala de aula invertida ao ensino da matemática no 9º ano do ensino fundamental anos finais.

Palavras-chaves: Ensino e aprendizagem da matemática. Ensino híbrido. Sala de aula invertida.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho investiga a proposta de aplicação das metodologias ativas para o ensino de matemática no 9º ano do Ensino Fundamental, dada a importância de tal debate para a contribuição do estudo das práticas educacionais e didáticas, com foco na utilização do ensino híbrido e na metodologia sala de aula invertida. Nesta senda, apresentar-se-á aqui uma análise dos aspectos históricos e desafios atuais para o ensino da matemática, visto que o ensino da disciplina é, historicamente, compreendido como desafio aos alunos e aos professores, o que delimita ainda um perfil para o aluno envolvendo a era do mundo digital. Em seguida, será estudado, como objetivo geral, o porquê de as metodologias ativas poderem ser uma das soluções para os atuais desafios da educação básica e como elas estão relacionadas ao desenvolvimento das competências e habilidades previstas pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC) para os alunos da Educação Básica.

Sendo assim, a partir do levantamento bibliográfico em produções da área de educação, estudar-se-á o ensino híbrido, mostrando, a partir de exemplos, como esta modalidade vem ganhando espaço na realidade educacional brasileira, como um apontamento dos objetivos específicos desse trabalho. Nessa mesma esteira de estudo, será apresentada a aplicação de uma metodologia ativa, dentre as diversas citadas, aplicada ao 9º ano do Ensino Fundamental: a Sala de aula invertida

(*Flipped Classroom*), em vista das dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem na educação básica das escolas brasileiras.

Consequentemente, Camargo e Daros (2018) apontam que, em conversas com alunos de diferentes níveis do ensino básico ao superior, pode-se perceber a insatisfação quanto ao modelo tradicional utilizado nas instituições frequentadas. Além do conhecimento centralizado unicamente no professor, as conversas destacam o tempo gasto na repetição de conceitos, a falta de associação dos conteúdos ministrados com seu cotidiano, as falhas nos processos avaliativos e o mal-uso de recursos e estratégias pedagógicas. Ao passo que professores remetem a queixas similares – a falta de tempo para aprimoramento de estratégias pedagógicas eficazes, excesso de desinteresse por parte dos estudantes, salários baixos e outras dificuldades da vida docente.

Essas insatisfações ainda crescem em paralelo com a utilização de tecnologias digitais de informações e comunicação por meio de diversos dispositivos com acesso à rede mundial de dados. Este fácil e ilimitado acesso a informações proporciona mudanças em espaços sociais rompendo barreiras entre o virtual e o físico, criando novas formas de expressão, sentimentos e também relacionamentos.

Consoante a este contexto, a educação brasileira tem um documento normativo, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que elenca as habilidades mínimas a serem desenvolvidas, trazendo como ação essencial o desenvolvimento, ao longo das três etapas da Educação Básica, de 10 competências gerais, nas quais há evidente indicação da necessidade de inserir as tecnologias de informação, de forma intencional, no âmbito escolar (BRASIL, 2017).

Segundo a BNCC, na competência da Cultura Digital o aluno deverá compreender, utilizar e adequar novas tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017).

Isso traz o questionamento do papel das instituições de ensino diante da facilidade de acesso a um conjunto de informações e como essas instituições estarão preparadas para o desenvolvimento destas competências e habilidades. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015), o envolvimento das instituições de ensino, professores e demais profissionais da educação nesse processo de implementação das tecnologias digitais é considerado um desafio, e discussões sobre o tema são recorrentes em diferentes instâncias.

Dentro deste cenário surgem as metodologias ativas, como uma maneira de protagonizar o aluno, dando a ele o envolvimento direto, participativo e reflexivo no seu processo de ensino e aprendizagem, pois é preciso, dada as mudanças sociais que vêm atingindo a sociedade como um todo, ressignificar o processo de ensino e aprendizagem para que este acompanhe melhor as mudanças que vêm ocorrendo. Para Allan (2015), a cada nova tecnologia surge também uma nova necessidade sobre reflexão de sua real utilidade e possíveis melhorias em nossas vidas. Isto é o que vem acontecendo com a internet. Antes, apenas algumas pessoas mais abastadas tinham acesso à rede mundial de dados por meio de seus computadores de alto custo. Hoje, com a popularização dos smartphones, a maioria da população tem livre acesso a este recurso, o que já potencializa a justificativa desse trabalho.

Ainda percebendo as mudanças provocadas como a inserção de tecnologias de comunicação, é possível afirmar, como assegura Fava (2018), que numa breve análise nos períodos históricos é possível ver como cada um tem a sua forma de organização política, social, econômica, cultural e educacional. O autor destaca que "estamos passando novamente por uma transição, na qual passaremos de Idade Contemporânea para uma Idade Pós-contemporânea" (FAVA, 2018, p.3), o que pode ser interpretado como uma iminente necessidade de estabelecer uma releitura do cotidiano, sobretudo do escolar.

Para Horn e Staker (2015), sobre este prisma, a necessidade de releitura do cotidiano apresenta uma perspectiva acerca do ensino on-line como uma transformação no modelo educacional iniciada fora do núcleo escolar. Para os autores, o "ensino on-line melhorou drasticamente desde o seu surgimento" (HORN e STAKER, 2015, p.4), o que provocou uma mudança no cenário educacional. Também é possível destacar a atenção ao número crescente de estudantes que utilizam algum tipo de aprendizagem virtual, mesmo frequentando escolas presencialmente, o que caracteriza o ensino híbrido.

Esta nova modalidade de ensino segue uma tendência observada em praticamente todos os processos que integram as tecnologias digitais. Assim, esta metodologia não pode ser vista apenas como algo passageiro, mas sim, algo que veio para ficar e transformar a educação. Numa possível comparação, é importante lembrar que o sistema bancário, comércio entre outros passaram por transformações que fizeram com que o foco de seus serviços fosse transferido de seus agentes para os seus usuários. Além disso, essas mudanças permitiram ao usuário realizar procedimentos sem a necessidade da sua presença em meio físico. Por sua vez, o ensino híbrido representa a tentativa de implementar na educação o que aconteceu a esses serviços. Agora, o aluno deverá ser o responsável por sua aprendizagem assumindo uma postura mais ativa.

Neste sentido, este trabalho busca realizar uma análise sobre a integração do ensino on-line nas escolas, em especial para o ensino de matemática. Esta análise visa não apenas apresentar dados sobre o tema, mas, apresentar, baseado em experiências do autor, vantagens e desvantagens para a utilização desta modalidade de ensino, primando pelos seguintes objetivos específicos: identificar aspectos que distinguem o ensino híbrido da aula tradicional; caracterizar a sala de aula invertida como modalidade do ensino híbrido; desenvolver práticas educacionais baseadas na sala de aula invertida para o ensino da matemática em uma turma de 9° ano;

analisar as contribuições da prática desenvolvida no processo de ensino-aprendizagem de matemática em uma turma de 9º ano.

Dessa forma, estes objetivos se aportam na seguinte estrutura desenvolvida no trabalho: da contextualização da escola nacional, que trata do contexto histórico nacional perpassado pela metodologia de ensino na escola brasileira; do ensino híbrido e a perspectiva de mudança no ensino a partir do uso da tecnologia, que aborda conceitos de ferramentas tecnológicas associadas ao ensino híbrido; da caraterização da sala de aula invertida como modalidade de ensino híbrido, já na perspectiva do recorte da análise de ferramentas que ajudam na facilitação do ensino de matemática; e, por fim, da análise e discussão dos dados, que representa a apresentação e análise do corpus.

1.1 Perspectiva metodológica

Neste segmento, serão apresentados a concepção metodológica que norteou a pesquisa, destacando a classificação, sujeitos envolvidos, recursos, instrumentos de coletas de dados, procedimentos e métodos para a sistematização da análise dos dados. No tocante aos procedimentos técnicos e aos objetivos, caracteriza-se como uma pesquisa de cunho qualitativo, pois de acordo com Bicudo (2004) integra a ideia do sujeito através das suas sensações e opiniões. Para a autora, a "concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências" (BICUDO, 2004, p. 116).

Para que se entenda melhor os critérios de análise que foram adotados, assumimos as concepções de Bogdan e Biklen (1982), sobre as pesquisas com cunho qualitativo em educação, as quais devem apresentar algumas características básicas:

> Os dados coletados são predominantemente ricos em descrições dos sujeitos, detalhes de situações e acontecimentos. Todos os dados que traduzem a realidade são relevantes para a compreensão do problema estudado. O processo é mais relevante que o produto, ou seja, a investigação deve se focar, nos procedimentos e nas interações cotidianas dos participantes. O estudo deve ser analisado dentro do ambiente onde ocorre o problema estudado, sem qualquer intervenção intencional por parte do pesquisador. Deve-se dar atenção a perspectiva dos participantes levando em consideração aos diferentes pontos de vista dos participantes. (1982, p. 23)

Assim, busca entender as contribuições do fenômeno estudado sobre o aprendizado matemático dos sujeitos, a saber: alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Para o desenvolvimento deste trabalho, optou-se por escolher uma escola situada na cidade de São Luís, no Estado do Maranhão. Fundada em 1984, conta com duas unidades em bairros distintos da cidade, as quais oferecem educação infantil, ensino fundamental inicial e final, além do ensino médio. Em 2013, houve um grande investimento por parte da escola no uso da tecnologia educacional. Com a aquisição de iPads e lousas digitais, vieram também as propostas para o desenvolvimento de uma sala de aula que buscasse a dinamização das práticas pedagógicas e ampliação das oportunidades dos alunos na produção de conhecimento, mostrando o seu protagonismo.

Por fim, o ambiente escolhido para o desenvolvimento da experiencia foi a própria sala de aula dos alunos, na qual o pesquisador exerce sua prática docente. A turma é composta por 36 alunos com idades entre 14 e 15 anos, é preciso destacar que nenhum destes foi retido em séries anteriores e que há ainda dois alunos com déficits cognitivos, que, por sua vez, são acompanhados por uma tutora em sala e realizam as avalições com a supervisão da mesma.

Todos os alunos participantes estão dentro da faixa etária esperada para o ano em estudo e todos possuíam acesso à internet em casa ou em seus aparelhos celulares móveis ou ainda com seus iPads próprios para auxílio nas atividades pedagógicas.

Como instrumento norteador das ações, foi elaborada uma pauta conforme o modelo avaliativo previsto pelas normas da escola. Trata-se de um documento com toda a sequência metodológica a ser seguida pelo aluno e pelo professor, delimitada em etapas. Nela, buscou-se mesclar os princípios da sala de aula invertida e outras metodologias como trabalho em grupo e a metodologia ativa JIGSAW[1].

2. O ENSINO HÍBRIDO E A POSSIBILIDADE DE MUDANÇA NO ENSINO A PARTIR DO USO DA TECNOLOGIA

Com o advento das variadas ferramentas que objetivam às pessoas a facilidade de desempenhar atividades cotidianas, sejam elas, laborais, acadêmicas e até para a distrativas, a perspectiva de convivências com determinadas profissões assevera a necessidade de uma nova interpretação daquilo que já havia nos quadros sociais, sobretudo no campo profissional. Dessa forma, a ressignificação de alguns projetos sociais soprou o espírito da modernização dos processos educacionais conjuntamente às outras mudanças, de maneira que foi, e ainda o é, necessário repensar a função de todos os agentes envolvidos nesse processo, além da busca e uso de recursos nesse processo, que é o que será debatido a seguir.

As escolas como são conhecidas hoje foram pensadas há mais de um século para padronizar a forma de pensar e avaliar. Escolas com apenas uma sala de aula se espalhavam pelo mundo na virada do século XX, guiadas por uma necessidade

1 Estratégia pedagógica baseada na aprendizagem cooperativa, onde os alunos estudam individualmente partes de um objeto de estudo para posteriormente comporem um todo.

de customizar o aprendizado para cada aluno, mas não foram economicamente preparadas para educar um grande número de estudantes.

Porém, as transformações no mundo do trabalho trouxeram ainda implicações em sua formação. Segundo Fava (2018), a industrialização gerou novas ocupações aumentando a produtividade do trabalhador e abriram-se novas oportunidades, pois novas máquinas necessitariam de uma mão de obra para operá-las, como diz:

> Por outro lado, aflorou-se a necessidade de novas habilidades, novos conhecimentos, alterando o sistema educacional, que antes era individualizado e agora passa a ser coletivo, com o objetivo intrínseco de treinamento, sem a preocupação com o pensar, sentir, agir, discernir e escolher (FAVA, 2018, p.28).

O Resultado foi o agrupamento de estudantes por idades e séries colocando-os em salas de aulas com um professor responsável pela transmissão de conteúdos e com um padrão para avaliar os alunos de forma geral. Em teoria, esperava-se que todos os estudantes aprendessem no mesmo ritmo e da mesma forma; ou seja, toda sala deveria ser homogênea pressupondo estudantes análogos. Este modelo de educação funcionou muito bem, pois preparavam estudantes para as necessidades contextuais daquela época, visto que o foco era o trabalho em indústrias e não na produção acadêmica, logo, a mão de obra não ficaria incapacitada para o serviço nas indústrias.

Contudo, como já foi explicitado em momento supramencionado, o aprendizado, assim como a forma o faz, é contextual, obedecendo uma historicidade envolta aos laços sociais de determinado recorte temporal, o que, para uma análise no contexto atual, é imprescindível levar em consideração as ferramentas digitais e metodológicas. Para Fava (2018), transmissão, memorização, padronização e alienação nas disciplinas não são mais eficientes atualmente, o que leva à preocupação com novas metodologias de ensino, visto que os alunos de hoje vivenciam outro modelo social de convivência, principalmente, aquele que é permeado pelo uso da tecnologia e da informação rápida.

Para Bacich, Neto e Trevisani (2015), os estudantes atuais estão cada vez mais conectados às tecnologias digitas compondo, então, uma geração que necessita de novas relações com o conhecimento; e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola. Estas mudanças, por sua vez, devem ser integradas de modo crítico e criativo. O foco, contudo, deve pautar-se no desenvolvimento da autonomia e da reflexão; em outras palavras, a formação de indivíduos críticos, dinâmicos, reflexivos e participativos.

A utilização dessas novas tecnologias digitais, dentro do contexto escolar, sobretudo, acaba criando abordagens e experiências pedagógicas mais significantes e ativas para os seus participantes. Porém, Bacich, Neto e Trevisani (2015) enfatiza que “não devemos esquecer do planejamento de propostas didáticas que busquem o ‘aprender a aprender’, o ‘aprender a fazer’, o ‘aprender a ser’ e o ‘aprender a conviver', pilares de uma proposta de Delors e colaboradores (1996) [...]". Isso leva à reflexão da real inserção da tecnologia no ambiente escolar. É fato que essas tecnologias proporcionam acesso fácil a qualquer tipo de informação, o que acarreta em novas formas de pensar, novas alterações comportamentais, novas formas de aprendizagem e construção do conhecimento, que por fim se torna algo inacabado, pois considera diferentes cenários. Outro ponto de reflexão é o fato que os estudantes não aprendem no mesmo ritmo e da mesma forma. Logo, surge uma necessidade de um plano personalizado de ensino que atenda aos alunos e suas especificidades. Ritmo, tempo, lugar e o modo como aprendem são de extrema relevância quando se pensa em personalização do ensino.

Com o avanço e o aparecimento de novas tecnologias, naturalmente, aparecem as novas abordagens didáticas que visam momentos dentro e fora da sala da aula. Nessa mesma via, é lógico supor que o uso da tecnologia em sala de aula necessita de novas metodologias de ensino, que, por sua vez, exigem suportes didático-pedagógicos que respondam essa exigência. Essas dinâmicas trazem uma transformação nas novas atividades, ações e operações que tanto os docentes como os discentes devem desenvolver no novo contexto de ensino e educação e, por conseguinte, a função do professor e as responsabilidades dos alunos sofrem uma mudança. Nesse sentido, o ensino on-line, junto ao ensino presencial, permite uma personalização do ensino na qual, cada vez mais, é exigida maior responsabilidade do aluno e sua aprendizagem; enquanto, para os professores, caberá pensar numa dinâmica diferente no uso de recursos como celulares, *tablets* e *notebooks*, conectados na rede mundial.

Em razão disso, Horn e Staker (2015) apresentam uma perspectiva sobre o ensino on-line como uma transformação no modelo educacional iniciada fora do núcleo escolar. Para os autores, o "ensino on-line melhorou drasticamente desde o seu surgimento" (HORN e STAKER, 2015, p.4). É possível ainda dizer que a modalidade de ensino on-line chama a atenção de número crescente de estudantes que utilizam algum tipo de aprendizagem virtual, mesmo frequentando escolas presencialmente. Esta nova modalidade de ensino segue uma tendência observada em praticamente todos os processos que integraram as tecnologias digitais. Sendo assim, ela não pode ser vista apenas como uma moda passageira, mas sim algo que veio para ficar e transformar a educação. O sistema bancário, comércio, entre outros, por exemplo, passaram por transformações que fizeram com que o foco de seus serviços fosse transferido de seus agentes para os seus usuários. Além disso, essas mudanças permitiram ao usuário realizar procedimentos sem a necessidade da sua presença em meio físico.

O ensino híbrido é uma tentativa a mais que está em processo de implementação e de sustentação dentro do sistema educacional do país. Neste sentido, o aluno deverá ser o responsável por sua aprendizagem, assumindo uma postura mais ativa, mais dinâmica e participativa.

Sendo assim, o tema ensino híbrido é bastante inspirador quando a intenção é inovar em sala de aula. Dessa forma, a personalização do ensino, um dos aspectos importantes desta abordagem, coloca o professor em um patamar diferente do detentor do conhecimento, torna-o "[...]cada vez mais um gestor e orientador de caminhos coletivos e individuais" (MORAN, 2018, p. 39).

Moran (2018), ao discutir o processo de ensino e aprendizagem na dimensão da educação híbrida, chamam a atenção para o fato de haver várias maneiras de ensinar e de se apropriar do conhecimento, destacando o trabalho colaborativo mediado pela tecnologia como uma delas, como é possível ver:

> [...] o trabalho colaborativo pode estar aliado ao uso de tecnologias digitais e propiciar momentos de aprendizagem e troca que ultrapassam as barreiras de sala de aula[...]. Colaboração e uso de tecnologia não são ações antagônicas. As críticas sobre o isolamento que as tecnologias digitais ocasionam não podem ser consideradas em ação escolar realmente integrada, na qual as tecnologias como um fim em si mesmas não sobreponham à discussão nem à articulação de ideias que podem ser proporcionadas em um trabalho colaborativo (MORAN, 2018, p. 3).

Para Horn e Staker (2015), define-se como ensino híbrido o programa de educação formal, que permite ao aluno realizar atividades propostas de forma on-line e presencial de forma integrada. Os autores ainda consideram que os indivíduos não aprendem todos no mesmo ritmo e que apresentam inúmeras necessidades de aprendizagem em momentos distintos. Logo, Horn e Staker (2015) destacam o fato que a escola formal é insuficiente para promover uma educação plena. Nesse ponto, defendem que o ensino híbrido como um motor que pode alimentar o ensino personalizado e baseado na competência. Segundo os autores, o conceito relacionado a ensino híbrido requer uma análise em três dimensões: ensino on-line, espaço físico supervisionado e uma experiência de aprendizagem integrada.

Para tanto, é preciso analisar esta aplicabilidade de forma mais detalhada. Para tanto, através do ensino on-line, segundo Horn e Staker (2015), o ensino híbrido é um programa educacional em que o estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino disponibilizado via internet, devendo o aluno ter o controle sobre o tempo, o lugar, caminho e ritmo em que quer aprender. Para Horn e Staker (2015), o ensino on-line ultrapassa o simples uso das ferramentas digitais, é preciso repensar a estrutura de ensino-aprendizagem.

> Em todos os programas de ensino híbrido, o estudante tem um pouco de sua aprendizagem via internet. Isso não significa usar qualquer ferramenta digital, como uma calculadora on-line ou o Google Docs. Aprender on-line significa uma grande mudança instrucional do ensino basicamente presencial para aquele que utiliza instrução e conteúdo baseados na web. (HORN e STAKER, 2015, p.34).

Assim, no ensino híbrido, o próprio estudante tem algum controle no seu processo de aprendizagem, pode avançar, retroceder, pausar à medida que vai aprendendo, o que determina um pontapé inicial na autonomia do estudante.

Na obra *Blended*, Horn e Staker (2015) afirmam que em suas pesquisas com instituições americanas que utilizam o modelo híbrido, os programas consultados se enquadram em quatro modalidades principais: Virtual enriquecido, *À la Carte*, Flex e Rotações. Os autores ressaltam ainda que "o propósito desses termos é fornecer uma linguagem para descrever os elementos básicos das várias combinações" (HORN; STAKER, 2015, p. 34); pois, existe a possibilidade de combinações entre eles, criando assim um programa ainda mais personalizado, quais sejam as explicações segundo Horn e Staker (2015):

Modelo Virtual enriquecido: nesta modalidade de ensino, o aluno tem apenas alguns encontros presenciais e obrigatórios com os professores e, então, fica livre para dar continuidade ao trabalho distante do professor presencial.

Modelo à la carte: de acordo com os objetivos estabelecidos, o aluno em parceria com orientador elabora o cronograma de estudo. O curso poderá ser presencial ou online.

Modelo por Rotações: nesta modalidade, os estudantes revezam atividades de acordo com um cronograma fixo ou a critério do professor, no qual pelo menos uma delas é realizada de forma on-line.

Para Horn e Staker (2015), esta modalidade ainda se divide em outras quatro: Rotações por estações, Laboratório rotacional, Rotação individual e Sala de aula invertida.

Destas modalidades foi escolhido para estudo, a sala de aula invertida, por acreditarmos no seu potencial inovador, colocando o aluno como protagonista do seu processo de aprendizagem, estudando em casa com as orientações recebidas antes do assunto ser abordado em sala de aula, recebe roteiros de estudos, realizados geralmente com a mediação de recursos tecnológicos, que pode ser vídeo aulas, textos, fóruns, entre outros. As dúvidas são discutidas na aula presencial com os professores. Assim, a aprendizagem pode ser mais significativa, com a participação ativa do aluno.

3. SALA DE AULA INVERTIDA: UMA MODALIDADE DO ENSINO HÍBRIDO

Tradicionalmente, é na sala de aula onde se concentram todos os processos de ensino e aprendizagem. Contudo, as necessidades de cada estudante caminham juntamente às transformações características das gerações. A ideia de sala de aula, com alunos sendo receptores de conteúdos e professores como transmissores, precisou ser transformada para continuar a atender as expectativas dos estudantes.

As necessidades dos discentes, dessa forma, podem ser as mais variadas, indo desde atividades particulares a dificuldades cognitivas, e todas presentes dentro do espaço físico e tempo de aprendizado análogos a todos os estudantes. Com essa variedade, para que se proporcionem experiências de aprendizagem e desenvolvimentos de habilidades, surge a necessidade da construção de novas trilhas, abordagens pedagógicas e práticas que possibilitem o crescimento do aluno, motivando-os a aprender dentro de suas limitações, interesses e aspirações.

Para Fullan (2009), atender estas necessidades e limitações dos alunos criam possibilidades para uma aprendizagem mais significativa, conectando as experiências vividas no âmbito escolar do estudante ao contexto onde está inserido, dando suporte, assim, "para serem cidadãos eficazes em um mundo diverso e desafiador" (FULLAN, 2009, p.1)

Não é de hoje, porém, que se defende este tipo de abordagem educacional. Freire (2003) já discordava deste estilo tradicional baseado no sistema bancário, no qual se há apenas a transmissão de informação. Freire (2003) defendia uma postura mais participativa da sua aprendizagem por parte do aluno resolvendo problemas e desenvolvendo projetos, inserido em um ambiente mais reflexivo e oportuno para a construção de seu conhecimento.

Outro fator relevante para criação de um ambiente escolar mais personalizado é quantidade de alunos por sala de aula. Quando se trata de um ensino mais generalizado no lugar do personalizado, percebe-se que alguns processos estão em jogo. Considerando que o ideal é que os alunos sejam estimulados constantemente, a fim de desenvolver sua autonomia em sala de aula, quando a sala é muito cheia, perde-se essa dinâmica em profundidade. Para uma realidade brasileira, conforme a Comissão de Educação, Cultura e Esporte (2018), o número máximo permitido em sala é de 25 alunos por professor, durante os cinco primeiros anos do ensino fundamental; e de 35, nos quatro anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Visto que as salas de aula atualmente atendem em média 30 alunos por ano/série, como educadores podem personalizar a aprendizagem baseando-se nas necessidades de um grupo de indivíduos? Os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams (2018) encontraram uma alternativa para trabalhar essas necessidades com seus alunos. No livro *Sala de Aula invertida: uma Metodologia Ativa de Aprendizagem*, os autores relatam casos de sua experiência em sala de aula em que alunos não compareciam a suas aulas por diversos motivos, ocasionando, assim, o não cumprimento dos objetivos didáticos básicos que eram respectivos ao curso.

> Um problema que logo enfrentamos, ao lecionarmos em uma escola de ambiente relativamente rural, era que um grande número de alunos faltava a muitas aulas por causa dos esportes e de outras atividades que praticavam. As escolas "próximas" não ficavam assim tão perto. Os alunos passavam muito tempo nos ônibus, locomovendo-se entre eventos em lugares diferentes. Nessas condições, os alunos mal assistiam a muitas de nossas aulas, além da dificuldade que tinham em acompanhar as disciplinas (BERGMANN; SAMS, 2018, p.3).

Outro problema levantado por Bergmann e Sams (2018) é a ineficiência das atividades direcionadas ao serem concluídas em casa. Eles afirmam que estas atividades apresentavam, aparentemente, pouco significado e relação ao cotidiano dos alunos, as atividades levavam muito tempo para serem realizadas, o que acarretava num elevado número de alunos que não as concluíam. Para os autores, os trabalhos enviados para casa, em muitos casos, não ajudavam os alunos a melhorarem o aproveitamento escolar, não desenvolvendo, dessa forma, a curiosidade podendo se tornar um exercício de conformidade e controle.

Por essa razão, buscando uma solução para sanar essas dificuldades, em 2007, os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams passaram a gravar as aulas e, previamente, as disponibilizavam aos seus alunos. Estas aulas contemplavam os objetos de aprendizagem da disciplina que ministravam e, com elas, os alunos, em casa, aprendiam a teoria, possibilitando aos estudantes um conhecimento prévio antes de adentrarem a sala de aula.

> Nossa programação costuma agrupar as aulas em blocos de 95 minutos em dias alternados. Nas noites alternadas, os alunos assistem aos vídeos como tarefa de casa e fazem anotações sobre o que aprenderam. E nos cursos de ciências, mantivemos os mesmos experimentos de laboratórios que sempre conduzimos. Descobrimos que dispúnhamos de mais tempo, tanto para as atividades de laboratório quanto para o trabalho com a resolução de problemas de ciências. (BERGMANN; SAMS, 2018, p.5).

Entre os anos de 2007 e 2008, aplicando essa metodologia, os autores perceberam um ganho significativo nas aulas e assim puderam criar um ambiente de aprendizagem bem próximo ao que defendia Ausubel, Novak e Hanesian (1980). É dizer: tal ambiente se vale dos conhecimentos prévios dos alunos criando uma ligação com situações reais relacionadas a seu estudo, conduzindo para o ideal de aprendizagem significativa, em detrimento da aprendizagem mecânica.

Apesar de muitos autores considerarem Bergamann e Sams os criadores dessa metodologia, ela já havia sido desenvolvida em algumas disciplinas em instituições de ensino superior como a *Havard University* e o *Massachusetts Institute of Tecnology* (MIT). Em *Harvard*, por exemplo, ela foi baseada em outra metodologia conhecida como *peer instruction*[2] na disciplina de Física aplicada e no MIT em estudos de física, com base na metodologia *Technology-Enabled*[3] (VALENTE, 2018).

Esse procedimento didático, que trata o recorte deste trabalho, também referido como nova metodologia de ensino, foi denominado como *Flipped Classroom*[4] nos Estados Unidos. Já no Brasil, ficou conhecida por muitos especialistas como Sala de Aula Invertida. Esse procedimento didático consiste basicamente num processo de inversão do que é feito tradicionalmente. Neste, os estudantes têm acesso previamente aos conteúdos definidos nos programas das disciplinas. Logo, os discentes estudam por si, através de videoaula fora da sala de aula, procurando ambientes confortáveis e que possam assistir quantas vezes sejam necessárias e mais convenientes. Então, no dia da aula da disciplina, em sala, junto com o professor e demais colegas, todos realizarão as tarefas que eram antes destinadas a serem realizadas como tarefas para a casa.

Nesse sentido, Bergmann e Sams (2018) defendem que esta abordagem de inversão permite uma maior interação entre professor e alunos, o que aumenta a possibilidade de vínculo ao processo de ensino-aprendizagem por permitir uma nova fala, despertando a curiosidade do aluno e afetividade ao processo, além de permitir o uso da linguagem dos estudantes imersos no mundo virtual. Há ainda o uso desses novos recursos didáticos, que auxilia numa série de benefícios que potencializam a aprendizagem e modernizam a dinâmica e participação, tais como: autonomia da gestão de tempo dos estudantes; trabalha habilidades como persistência e vontade de aprender; dá ao estudante um controle sobre o ritmo no qual aprende; possibilita a aprendizagem para o domínio; muda o gerenciamento de sala de aula.

Na aprendizagem invertida, a sala de aula se transforma em um lugar para trabalhar objetos de aprendizagem por meio de atividades mais práticas, debates sobre temas e aulas laboratoriais. Contudo, a possibilidade da realização destas atividades dentro de um ambiente on-line permite que o professor faça uma avaliação mais profunda sobre o que seu aluno foi capaz de realizar, identificar dificuldades e remodelar estratégias. Utilizando estas informações os professores, em coletivo com os alunos, podem criar experiências de aprendizagem mais personalizadas.

Para Bergmann e Sams (2018) a sala de aula invertida permite mudanças dentro da sala de aula tradicional, uma vez contempladas sob a luz da taxonomia dos objetivos educacionais de Bloom. Tradicionalmente, os níveis inferiores da taxonomia de Bloom são assistidos na sala de aula, dessa forma, os processos que demandam ao aluno a reprodução de uma informação que lhe tenha sido transmitida e compreensão desta são apresentadas pelo professor. Ao passo que, os níveis mais altos como analisar, avaliar e criar são contemplados em atividades propostas sem a supervisão do professor. O autor afirma que esperar que os alunos concluam essas atividades por conta própria, com pouca ou nenhuma ajuda, é irrealista e prejudicial, pois ocasiona a desmotivação e aversão nos alunos.

Todavia, em ambiente com aprendizagem invertida, os níveis inferiores da taxinomia de Bloom são contemplados por cada aluno individualmente, fora do espaço da sala de aula, ou seja, o aluno realiza sozinho a parte fácil. Já a parte difícil agora é contemplada dentro de sala aula, supervisionada por um especialista, que tem função de orientar e não mais transmitir.

Em linhas gerais, o relatório *Flipped Classroom Guide*, criado em 2013 por professores e especialistas americanos, descreve quatro indicações para que a inversão da sala de aula de fato ocorra:

1. Flexibilidade – as atividades realizadas pelos alunos devem ser rotacionais, permitindo que o aluno transita de forma orientada, por diferentes

atividades. Estas atividades devem apresentar um caráter questionador, investigativo e que proporcione ao aluno a oportunidade de recuar, aplicar e ampliar o que estudou on-line;

2. *Feedback* – uma das vertentes das metodologias ativas é o feedback imediato logo após a realização das atividades;
3. Ensino Híbrido – além das aulas enviadas previamente, das atividades presenciais os alunos devem ser encorajados a realizar atividades on-line, estas por sua vez devem pontuar na avaliação do aluno.
4. Conteúdo direcionado - a preleção dos objetos de aprendizagem deve ser feita com cuidado e com um planejamento bem estruturado. Deve-se ter em mente que os alunos iniciarão sozinhos o estudo de determinados conteúdos, logo se houver falha da escolha do que enviar previamente pode acarretar em desmotivação por parte dos estudantes. (2013, p. 11)

A implantação da abordagem invertida, de acordo com Valente (2018), deve considerar dois aspectos fundamentais: a produção do material a ser enviado ao aluno previamente; e a produção das atividades que serão realizadas em sala de aula. Sobre os materiais disponibilizados previamente, estes podem ser vídeos (autorais ou de domínio público) ou textos. Bergmann e Sams (2018) aconselham a análise cuidadosa dos materiais. Os autores, em suas práticas, utilizam vídeo aulas, porém ressaltam que nem sempre esta é a ferramenta mais adequada. Os autores também recomendam que, caso o professor opte por videoaulas, que sejam vídeos curtos, que despertem entusiasmo e que se acrescentem anotações a serem realizadas.

> [...] orientamos os nossos alunos a adotarem o método de Cornell de anotações, em que transcrevem os pontos importantes, registram quaisquer dúvidas que lhes ocorram e resumem o conteúdo aprendido. Os alunos que praticam esse modelo de anotações geralmente levam para sala de aula questões pertinentes que nos ajudam a abordar controvérsias e equívocos comuns (BERGMANN; SAMS, 2018, p.5).

Nesse sentido, Valente e Almeida (2011) sugerem que as TDIC sejam integradas às atividades curriculares, por isso o professor deve considerar outras possibilidades de recursos a serem explorados pedagogicamente como laboratórios virtuais, simulações, animações ou o uso de simulados autorregidos, estes últimos possibilitam ao professor uma avaliação prévia e permitem o reconhecimento de pontos críticos ou pontos que devem ser abordados dentro de sala de aula.

Para as atividades presenciais, contudo, o professor deverá assumir o papel de facilitador, explicando os objetivos de aprendizagem que devem ser alcançados pelos alunos e as atividades a serem realizadas. Para tanto, a organização do espaço dentro da sala não deve ser inerte, o ideal é que os alunos não tenham uma posição fixa e que trabalhem em grupos de forma colaborativa e ativa. Deve-se priorizar, nesse sentido, as atividades que envolvam análise, aplicação, avaliação e criação. A postura do professor deve ser diligente e de forma pré-disposta a auxiliar os alunos sempre que solicitado.

Valente (2018) considera, nessa senda, que esta abordagem não é algo novo para professores de algumas disciplinas dentro do âmbito das ciências humanas. Para ele, nessas disciplinas os alunos leem e estudam o material antecipadamente e os temas são discutidos em sala de aula. "A dificuldade da inversão ocorre especialmente nas disciplinas das ciências exatas, nas quais a sala de aula é usada para passar o conhecimento já acumulado" (VALENTE, 2018, p.30)

Portanto, ler e entender essas experiências descritas por esses autores, considerados os pioneiros em divulgar suas bases metodológicas nos Estados Unidos, será de uma mesma forma, aqui no Brasil, no nordeste brasileiro ou no interior do Maranhão? Como, então, poderia se fazer esta inversão dentro do ensino da matemática de forma clara e eficaz? Como organizar didaticamente os conteúdos, no nono ano do Ensino Fundamental? As respostas a essas e outras perguntas serão abordadas na próxima seção, na qual se abordará o relato de uma experiência do ensino híbrido na matemática, focando especificamente na sala de aula invertida, como forma de atualizar a didática da matemática, assim como potencializá-la usando os recursos digitais que podem servir de ferramentas para tal propósito.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

4.1 Problematização: Distância entre os centros das platinelas de um pandeiro

Nesse período, a escola estava nos preparativos para as festas juninas e, como já é habitual na instituição, foi escolhido o tema o centenário de Jackson do Pandeiro. Este fato foi aproveitado neste trabalho como forma de associar os objetos de conhecimento da Matemática ao cotidiano dos estudantes. Assim, o autor apresentou uma breve história sobre quem foi Jackson do Pandeiro e sua contribuição para a cultura brasileira. Em seguida, os alunos puderam conhecer melhor o instrumento utilizado pelo músico e instigados pelo autor a associar elementos matemáticos no instrumento, pois a necessidade de contextualizar a problemática também diz respeito às metodologias ativas, que não assistem às atividades da prática, mas ainda de entender o contexto, como explica:

> Trata-se, portanto, de construir um cenário de aprendizagem, como início e fim bem definidos. Na construção de cenários, é preciso compreender os saberes que serão necessários para que o aluno compreenda a situação-problema e saiba aplicar quais recursos teóricos-metodológicos a solução deve contemplar. Com isso, a situação-problema [...] gera no aluno a necessidade de apropriação de um conhecimento que ele ainda não tem e que ainda não foi apresentado pelo professor (CAMARGO; DAROS, 2018, p.43).

Dessa forma, observando diferentes formatos do instrumento e necessitando aliar o que já conhecem à situação-problema, os alunos conseguiram destacar que a em sua maioria são compostos por círculos e circunferência, o que deu base para uma pequena discussão entre o conceito de cada um desses elementos. Para finalizar este momento, o autor apresentou um problema a ser resolvido pelos alunos:

> Se tomarmos um pandeiro com 6 platinelas[5], qual será o polígono formado pela união dos segmentos entre os centros das 6 platinelas (admita que eles estejam distribuídos igualmente pelo pandeiro)? Tomando um pandeiro de 6 platinelas, com um diâmetro de 40 cm, qual deverá ser a distância entre os centros das platinelas?

Inicialmente, os alunos propuseram a utilização de régua para determinar estas medidas, porém, foram lembrados pelo professor de umas expectativas de aprendizagem propostas:

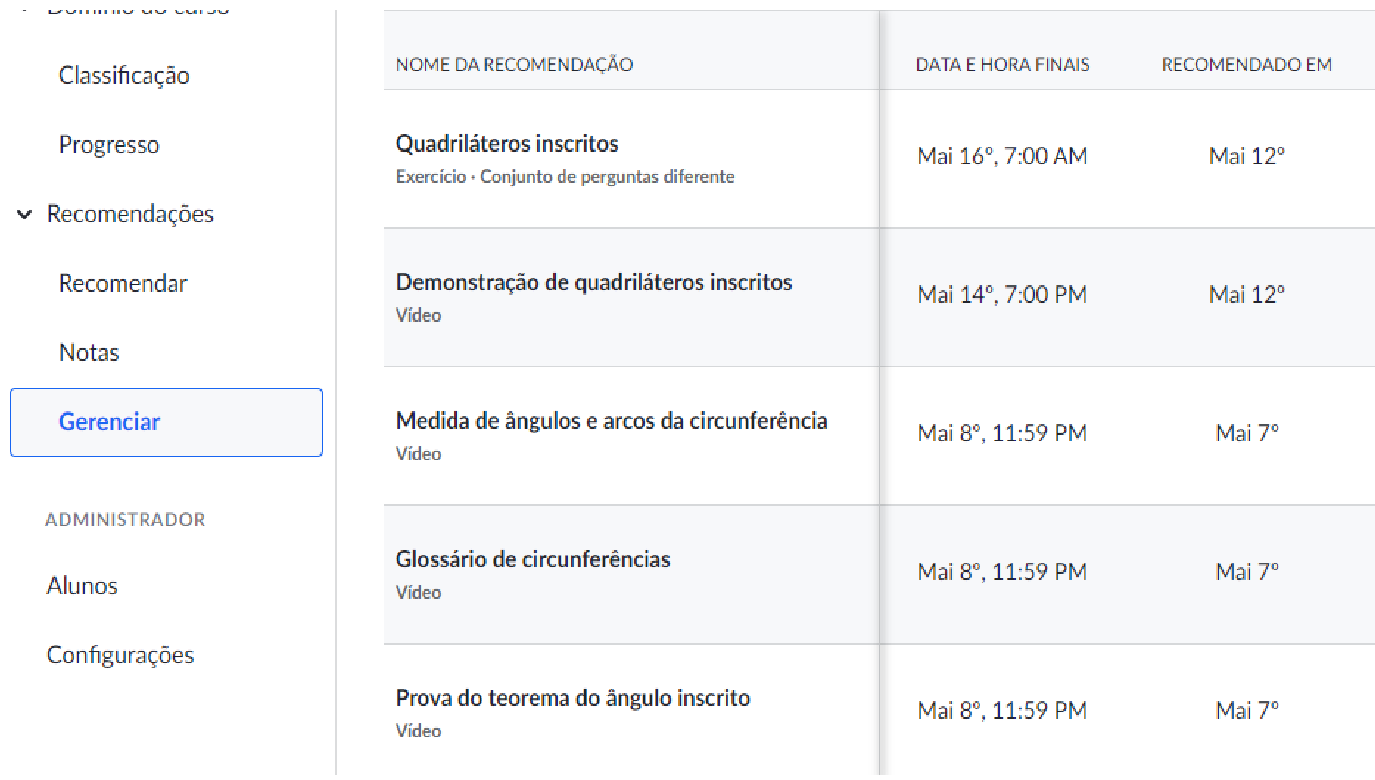
- Calcular a medida de segmentos pertencentes a um polígono regular, conhecida a medida de seu lado.

Logo, perceberam que não seria viável determinar tal medida sem algumas informações. O professor então sugeriu que este exercício fosse o último a ser entregue pelos alunos. Como atividade de casa, os alunos acessariam a plataforma Khan Academy e assistiriam os vídeos propostos pelo professor, dando início a aplicação efetiva da sala de aula invertida.

4.1.1 1ª Etapa: Autorrepertoriamento

Para esta etapa, foram recomendados quatro vídeos na plataforma Khan Academy, um exercício da mesma plataforma e para complementar os estudos foram sugeridos mais dois vídeos encontrados na plataforma do YouTube. Com estes vídeos, os alunos em casa puderam retomar o que já haviam estudado sobre circunferência e aprender os conceitos de ângulos central e inscrito, bem como as propriedades de um quadrilátero inscrito e circunscrito, como é possível ver nos estudos dos quadriláteros e circunferências e seus ângulos na figura abaixo.

Figura 01 – plataforma de atividades



NOME DA RECOMENDAÇÃO	DATA E HORA FINAIS	RECOMENDADO EM
Quadriláteros inscritos Exercício · Conjunto de perguntas diferente	Mai 16°, 7:00 AM	Mai 12°
Demonstração de quadriláteros inscritos Vídeo	Mai 14°, 7:00 PM	Mai 12°
Medida de ângulos e arcos da circunferência Vídeo	Mai 8°, 11:59 PM	Mai 7°
Glossário de circunferências Vídeo	Mai 8°, 11:59 PM	Mai 7°
Prova do teorema do ângulo inscrito Vídeo	Mai 8°, 11:59 PM	Mai 7°

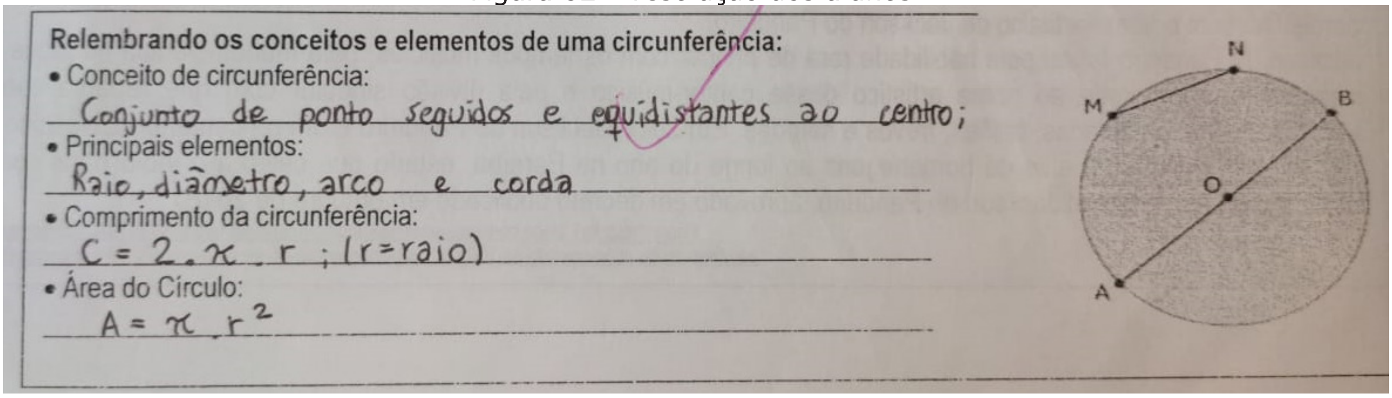
Fonte: Khan Academy.

Como descrito na pauta de orientação, após a conclusão do vídeo os alunos deverão registrar resumos de sua aprendizagem nos espaços designados e aplicar a metodologia 3-2-1(três coisas que aprenderam, duas perguntas sobre o conteúdo do vídeo e uma dúvida para se retirar com o professor ou colegas).

Nos encontros em sala de aula, após a proposição dos vídeos, com duas aulas de 45 minutos cada. Inicialmente, o professor retomou com os alunos o que aprenderam com os vídeos. A grande maioria dos 39 alunos participantes da pesquisa apresentou como as três coisas que aprenderam com os vídeos: o conceito de ângulo inscrito, ângulo central e a relação que existe entre os dois. Porém, observou-se que, de acordo com os relatórios, aproximadamente 70% dos que assistiram aos vídeos propostos no Khan Academy. Ao serem questionados sobre o porquê não haviam completado a tarefa na plataforma, os mesmos informaram que assistiram ao vídeo proposto no YouTube e que com isso já haviam feito os resumos. O levantamento sobre o relatório dos alunos que assistiram apenas aos vídeos no YouTube não pode ser reproduzido de forma fidedigna, pois a plataforma não oferece nenhum tipo de relatório sobre os usuários que assistiram ao vídeo. Assim, a única forma de avaliar estes alunos nessa parte do trabalho foi analisando os seus resumos presentes nas suas avaliações, destes apenas dois alunos não continham o resumo solicitado.

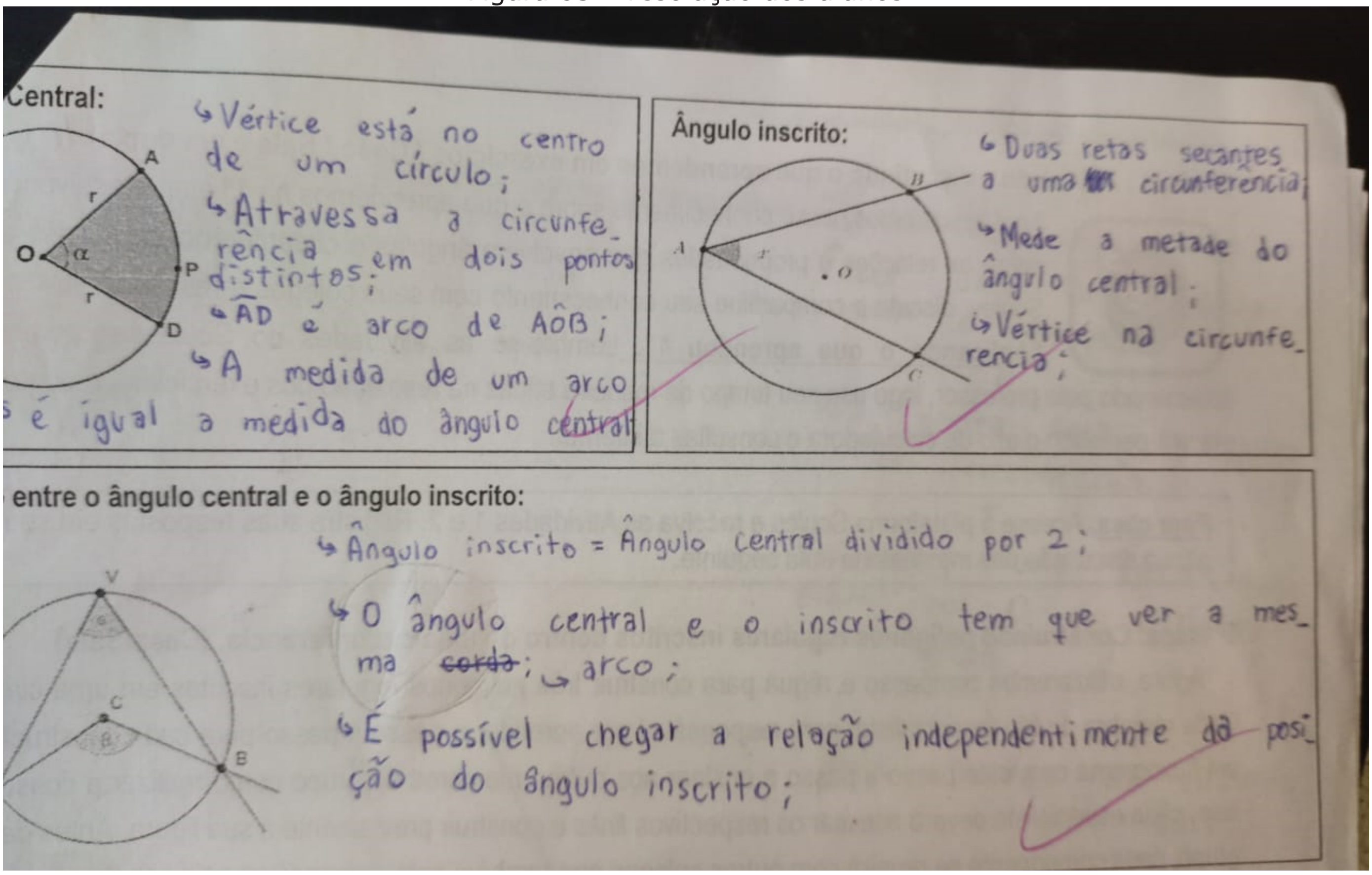
Os alunos apresentaram apenas em uma parte da demonstração da relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito, porém em saber que relação entre os dois não apresentaram dúvidas. O professor então foi a lousa para elucidar melhor a demonstração aos alunos, dada as dúvidas.

Figura 02 – resolução dos alunos[6]



Fonte: (BRITO, 2019)

Figura 03 – resolução dos alunos



Fonte: (BRITO, 2019)

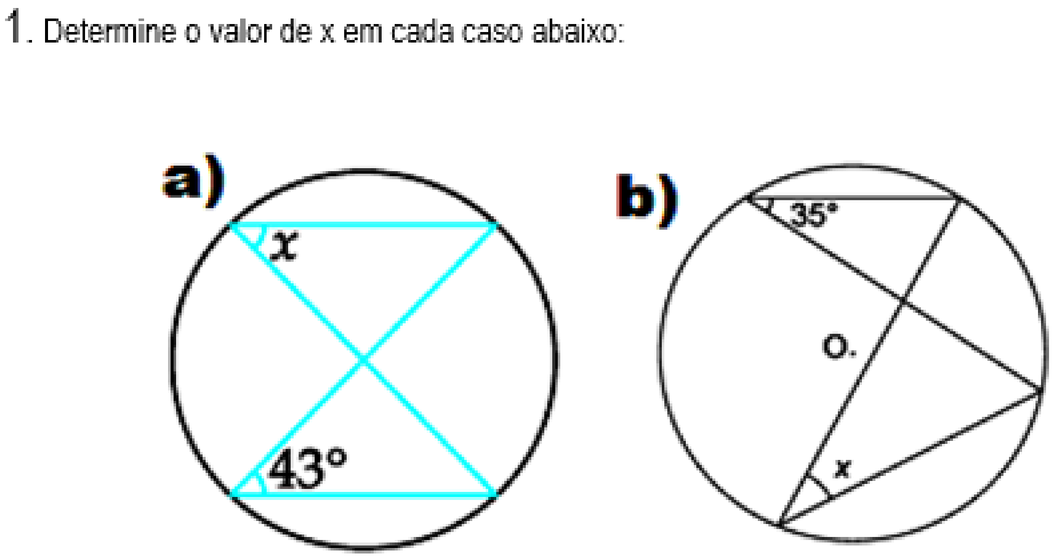
Segundo as imagens podem elucidar, a efetividade do processo de ensino pode ser vista nos resultados, representados aqui pelas figuras acima. Concluído este momento, os alunos se dirigiram aos trios propostos e discutiram entre si as duas perguntas sobre o conteúdo do vídeo. Nesse momento, o professor circula pela sala e percebe que alguns alunos questionavam tópicos que já haviam sido discutidos na retomada. Percebe-se, então, que alguns alunos se sentem mais à vontade em retirar dúvidas com os colegas e que estes entendem melhor quando aquele o explica. Nota-se, nessa senda, uma conformidade com o que afirma Freire (2003) ao dizer que quem ensina aprende ao ensinar, mostrando que um padrão concorrencial que incute a competitividade em sala de aula já não mais condiz com a necessidade educacional que circunda a escola da atualidade, pois pensamentos dessa natureza vão de encontro aos preceitos das metodologias ativas e ainda da socialização, cooperação e colaboração, como explica:

Rego (2001), ao aduzir ideia de Lee Iacocca, segunda o qual "[...] a competitividade de um país não começa na fábrica ou no laboratório de engenharia, mas na sala de aula", vai de encontro ao da aplicação das metodologias ativas de ensino. Isso porque, ao se utilizar estratégias pedagógicas calcadas nesses métodos, possibilita-se aos alunos aprenderem por meio de experiências de vida, ou seja, partindo de sua realidade, por meio da problematização, do questionamento e do fazer pensar e não do memorizar conhecimento. (CAMARGO; DAROS, 2018, p. 17)

Porém, concluído este primeiro momento, o professor propõe a realização de duas atividades nas quais os alunos poderiam aplicar o que aprenderam com os vídeos e em seguida, apresentar os seus resultados ao professor para o feedback.

A atividade 1 consiste na aplicação de forma direta da relação entre ângulo inscrito e ângulo central. Os alunos, por sua vez, conseguiram resolver os exercícios propostos sem nenhum problema, com exceção do exercício 1.

Imagem 01 – Questão trabalhada em atividade



Fonte: (BRITO, 2019)

Neste exercício, os alunos deveriam deduzir que se dois ângulos inscritos possuem o mesmo arco logo terão a mesma medida. Esta propriedade não constava no material disponibilizado nos vídeos o que acarretou dúvida na resolução, neste exercício houve a necessidade da intervenção do professor para a resolução do mesmo.

Na atividade 2, além da aplicação os alunos deveriam analisar e justificar afirmações nos exercícios. Era esperado que maior dificuldade nos exercícios da lista dois, pois estes requereram um nível maior de trabalho cognitivo, porém não foi o que ocorreu, os alunos concluíram os exercícios com mais facilidade que os propostos na lista 2.

O segundo encontro presencial após a proposição dos vídeos ocorreu dia 15/05/2019, também com duas aulas de 45 minutos. Nestas aulas, procedeu-se da mesma maneira que nas aulas do dia, porém os alunos apresentaram poucas dúvidas em relação as propriedades dos quadriláteros inscritos e circunscritos em uma circunferência. Assim, os trios foram divididos novamente e disponibilizadas mais duas listas de exercícios para a aplicação das propriedades aprendidas.

Imagem 02 – Resumo produzido por aluno

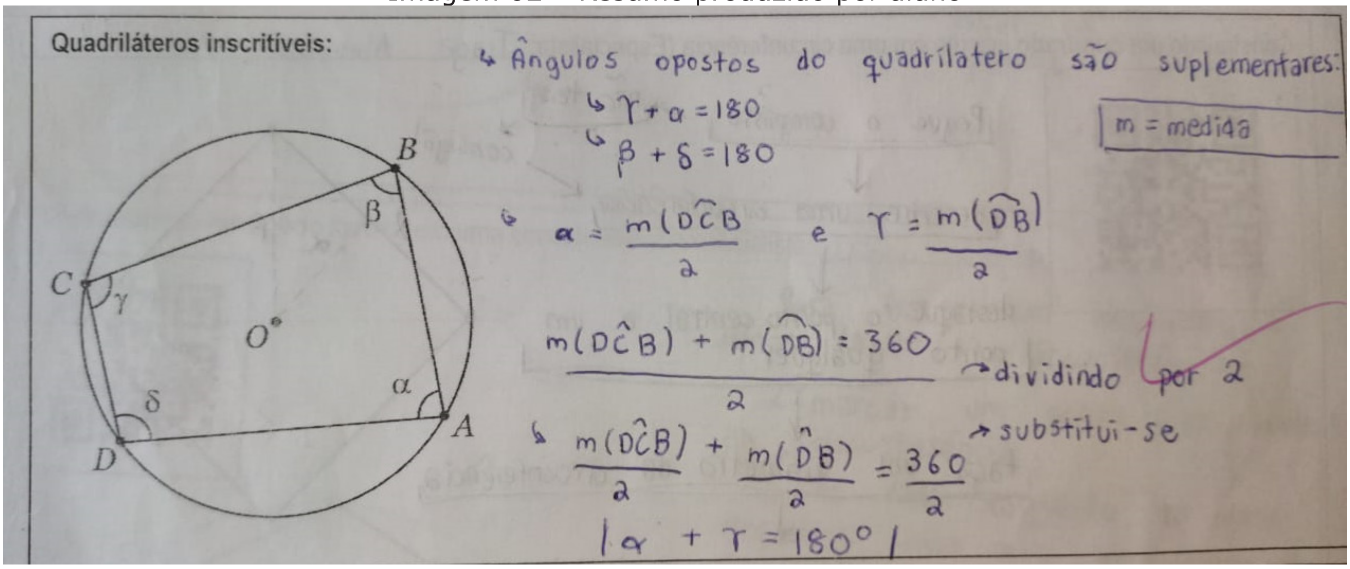
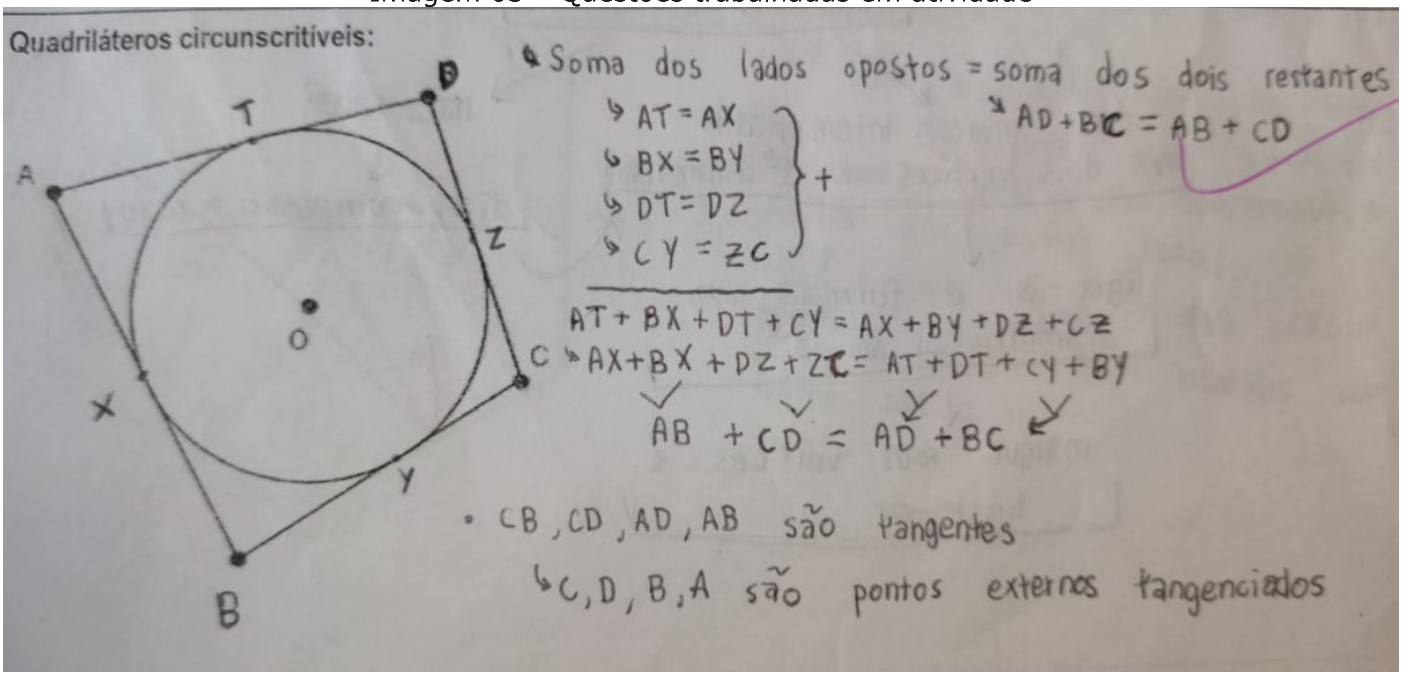


Imagem 03 – Questões trabalhadas em atividade



Fonte: (BRITO, 2019)

Nestas duas listas, os alunos também apresentaram poucas dúvidas em relação aos exercícios. Apenas dois trios não concluíram as atividades no tempo estipulado pelo professor, logo foi indicado que terminassem nos próximos encontros e conseguiram realizá-los de maneira eficiente, como é possível ver nas imagens acima.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante todo o trabalho, o objetivo principal pautou-se sobre a necessidade de encontrar explicações acerca dos problemas estudados. A proposta delineou o impacto das mudanças tecnológicas e da necessidade de acompanhamento das transformações sociais que atingiram toda a sociedade nessas últimas décadas, o que provocou ainda que a escola, lócus onde ocorreu esta pesquisa, se voltasse para o uso dessas ferramentas.

O uso das ferramentas digitais, ao contrário do tem se pensado, não funcionará como um substitutivo do professor, mas ressignificará sua função, não por conta da ferramenta, mas pelo estímulo à potencialidade do aluno. Nesse sentido, é necessário destacar o papel do sujeito central na relação de ensino-aprendizagem, que evoca a descentralização de uma metodologia tradicional para a deslocamento do centro em direção ao aluno, não mais ao professor. Sendo assim, a possibilidade de instruir esse aluno e fazê-lo caminhar pelas trilhas da autonomia se mostra muito mais instigadora que apenas a repetição de um conjunto de saberes.

Para tanto, é necessário que haja um entendimento maior das metodologias que estão aliadas às tecnologias digitais, como a possibilidade do ensino híbrido e da sala de aula invertida. Dessa forma, a metodologia da sala de aula invertida não apenas transforma a maneira do estudo de passível para autônomo, mas faz com que o processo de ensino-aprendizagem extrapole o ambiente escolar e se espraie por todos os ambientes, mostrando que o quê era restrito apenas à escola para o aluno pode abranger todo o universo vivido por ele, como as experiências matemáticas trabalhadas em atividade que contemplam situações do ambiente fora da sala de aula.

Portanto, a abordagem da metodologia da sala de aula invertida, a partir da literatura analisada e da experiência empírica, pode responder pelas inovações desejadas pelas mudanças sociais ocorridas nas últimas décadas, além de possibilitar o uso das novas tecnologias como ferramenta de pesquisa e acompanhamento da evolução do processo de ensino-aprendizagem dos alunos de ensino fundamental e a melhoria da aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS

ALLAN, Luciana. **Escola.com: como as novas tecnologias estão transformando a educação na prática.** Barueri: Figurati, 2015.

BACICH, Lilian. NETO, Adolfo Tanzi. TREVISANI, Fernando de Mello. et al. (Orgs) **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação.** 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2015.

BERGMANN, Jonathan. **Aprendizagem invertida para desenvolver o problema do dever de casa.** 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2018.

BERGMANN, Jonathan. SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendiza-**

gem. 1ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BICUDO, M. A. O. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M.C; ARAÚJO, J.L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. Secretaria de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: https://goo.gl/quhrrJ. Acesso em : 12 dez. 2018.

CAMARGO, Fausto. DAROS, Thuinie. **A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo**. 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2018.

FAVA, Rui. **Trabalho, educação e inteligência artificial: a era do indivívudo versátil.** Porto Alegre: Penso, 2018.

FRANCO, Edgar Silveira. NETO, Elydio dos Santos. **Os professores e os desafios pedagógicos das novas gerações: considerações sobre o presente e o futuro.** Revista de Educação do COGEIME, Ano19, n.36, p.9-25, Jan/Jun 2010. Disponível em: http://www.cogeime.org.br/wp-content/uploads/2011/11/36Artigo01.pdf. Acesso em: 12 dez. 2018.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 36ª Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

FLIPPED CLASSROOM GUIDE, 2013. Disponível em https://www.weber.edu/WSUImages/tlf/TLF%20 2013/Flipped%20Classroom%20Field%20Guide.pdf Acesso em outubro / 2019.

HORN, Michael B. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2015..

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. IN BACICH Lilian; MORAN José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2018.

VALENTE, José Armando. A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: experiência com a graduação em midialogia. IN BACICH Lilian; MORAN José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** 1ª edição. Porto Alegre: Ed. Penso, 2018.

CAPÍTULO 7

ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma abordagem reflexiva

Gedilson Pacheco Pereira[1]

Lélia de Oliveira Cruz[2]

1 Professor Mestre pelo PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão, e-mail: gedilsongroove@hotmail.com

2 Professora Doutora, Universidade Estadual do Maranhão, e-mail: leliacruz@cesc.uema.br

Resumo

A grande dificuldade apresentada pelos protagonistas do sistema educacional vigente, ou seja, professores e alunos, quanto ao ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, foi o que motivou a realização do estudo que teve como objetivo refletir pedagogicamente o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória nos anos finais do ensino fundamental. Na pesquisa, foi investigado a importância da temática para o desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivo dos alunos, bem como, a abordagem dada ao conteúdo nas aulas. O trabalho pauta-se na pesquisa-ação e defende uma abordagem para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória sem o uso, meramente, de fórmulas matemáticas que na maioria das vezes são adotadas de forma mecânica, sem nenhuma ligação com a realidade do aluno, sem valorizar a capacidade de criação e produção. Na realização das atividades, comprovou-se que o estudo da Análise Combinatória no ensino fundamental contribui de forma significativa na aprendizagem dos alunos, à medida que são desafiados para resolver situações problemas envolvendo a temática de forma criativa e critica.

Palavras- chaves: Análise Combinatória. Educação Básica. Ensino e Aprendizagem.

1. INTRODUÇÃO

Como aluno e professor, às vezes definimos a Análise Combinatória de forma incompleta, e muitas das vezes não sabemos defini-la. Afinal, como podemos defini-la? De que mesmo ela trata? Quando afirmamos que muitos de nós a definimos de forma incompleta, estamos nos referindo a respostas como: É o seguimento da matemática que estuda os arranjos, as combinações e as permutações. A resposta é incompleta, pois, embora as técnicas apresentadas acima, façam parte da Análise, os mesmos são definições que resolvem um problema específico de Combinatória: elas fazem o trabalho de contar subconjuntos de um conjunto finito, sem que não seja necessário enumerar, organizar seus elementos.

Ressaltamos, que a Análise além de trabalhar com as técnicas já citadas, ela amplia sua aplicabilidade, e pode ser usada na resolução de outros problemas como: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas importantes da Análise. Então, como podemos definir Análise Combinatória?

De um modo geral, a Combinatória analisa estrutura e relações discretas. Levando em consideração dois tipos principais de problemas: Um, é a demonstração a partir de uma condição dada, a existência de subconjuntos de um conjunto finito. O outro é fazer a contagem e a classificação dos subconjuntos de um conjunto, levando em conta as condições estabelecidas, a resolução dos mesmos exige compreensão da situação descrita, organização, criatividade, liberdade para expressar sua técnica para resolver o problema. Então, por que reduzir o conteúdo a mera manipulação de fórmulas estabelecidas?

O presente trabalho teve como objetivo principal, refletir sobre a abordagem da Análise Combinatória nos anos finais do ensino fundamental, visando o desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivo dos alunos. Essa reflexão norteou o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo no decorrer da pesquisa, e ao mesmo tempo buscou alternativas que facilitem tanto a prática pedagógica do professor, quanto a aprendizagem dos alunos.

O propósito era ressaltar a importância do ensino da Análise Combinatória no ensino fundamental de acordo com as orientações da Proposta Curricular Nacional para escolas de Educação Básica, de forma que leve os alunos a obter maior facilidade na compreensão de conceitos e aplicação de técnicas de forma simples e contextualizadas, dando significados aos conceitos a serem assimilados e sem a obrigatoriedade da memorização de fórmulas. O que harmoniza com a ideia dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), quando destaca a importância que o aluno precisa ter para manipular e fazer análise em larga escala de dados e amostras com o uso da Análise Combinatória (BRASIL, 1998, P. 257).

Muitos problemas de Análise Combinatória extrem dos alunos raciocínio lógico e criatividade em suas resoluções, portanto se o aluno tiver contato com esse conteúdo no ensino fundamental, chegará nas séries futuras com o desenvolvimento cognitivo adequado para o estudo da análise combinatória.

No estudo realizado, o pesquisador era o professor da turma, logo os dados coletados emergiram das experiências e atividades desenvolvidas em aula, convergindo com os objetivos da pesquisa-ação, propostos por Thiollent (1986). Dentre as atividades realizadas, destacamos algumas atividades de resolução de problemas sem o uso de fórmulas, que permitiram importantes observações. Como por exemplo: a importância dos trabalhos em grupos; as interações múltiplas; as diferentes percepções dos alunos para resolverem o mesmo problema; os conflitos múltiplos; o alto nível de concentração; a importância do lúdico e a teoria ou pedagogia do erro.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho realizou-se a partir de uma pesquisa-ação de cunho qualitativo, visto que, o pesquisador e "[...] os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo" (THIOLLENT, 1986, p. 14) e os dados foram coletados, a partir das atividades desenvolvidas, dos questionários aplicados e das observações realizadas no decorrer das aulas.

A revisão bibliográfica pautou-se em materiais que abordam o ensino de Análise Combinatória, como artigos científicos, livros didáticos, dissertações e teses.

Como a proposta enfatizava o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental sem o uso de fórmulas, foram aplicadas algumas atividades que tiveram por objetivo a verificação do nível de criatividade, desenvoltura e conhecimentos prévios dos alunos.

As atividades foram desenvolvidas sem nenhuma abordagem formal do conteúdo, ou seja, os alunos nunca tiveram contato com a Análise Combinatória, o que tornou mais consistente a proposta quanto a relevância do conteúdo no Ensino Fundamental. As atividades foram realizadas em pequenos grupos com alunos de duas turmas do sétimo de uma escola pública. Participaram das atividades 54 alunos na faixa etária de 12 a 14 anos. No desenvolvimento das tarefas, foi possível pontuar alguns comportamentos que reforçaram a importância da intervenção pedagógica na construção da aprendizagem matemática.

3. A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) explicita que o ensino fundamental tem por finalidade desenvolver a formação básica do cidadão e de um modo mais diretivo objetiva o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como fundamentos básicos, o domínio integral da leitura, da escrita e do cálculo. (BRASIL,1996).

Tendo como base a finalidade descrita, e a importância do ensino da Análise Combinatória no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, fica evidente a necessidade levar, de forma intencional, este conteúdo para a sala de aula do Ensino Fundamental, sem enfatizar uma abordagem conceitual que priorize a definição de termos ou fórmulas. O pressuposto se fundamenta no que destacam os PCN, quanto ao objetivo do ensino da Análise Combinatória, "[...] levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p. 40), e o pensamento probabilístico.

Com relação à probabilidade, o documento reconhece que a principal finalidade do pensamento probabilístico, "[...] é que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos" (BRASIL, 1997, p. 40), na realização de experimentos, tanto na escola, como na observação de fenômenos naturais que ocorrem no dia a dia, e que podem e devem ser exploradas com aplicações matemáticas.

Fundamentado no que estabelece os PCN, quanto a importância de um tratamento cuidadoso dos conhecimentos da Análise Combinatória para o aprimoramento de diversas áreas do saber, foi proposto, um tratamento do conteúdo no ensino fundamental sem o uso de sistematizações pré-elaboradas (fórmulas), que muitas das vezes, não levam os alunos a construírem seus próprios conceitos e formulações. Reforçando a necessidade de um trabalho que permita, a independência dos alunos na forma de organizar suas ideias para resolverem as diversas situações-problema sobre o conteúdo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também discorre sobre a temática ao destacar, que a matemática, além das grandes áreas de conhecimento, também,

> [...] estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. [...] cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2017, p. 265).

À medida que aos alunos são apresentadas situações matemáticas que permitem o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade em suas resoluções, ocorrem o desenvolvimento do conhecimento matemático. Logo, o contato com a Análise Combinatória no ensino fundamental prepara os alunos para enfrentarem as séries futuras com um amadurecimento cognitivo para certos problemas, conforme pontuam os teóricos que seguem.

Batanero (1997), Esteves (2001) e Roa e Navarro (2001), ressaltam em suas pesquisas, que o avanço do ensino da Análise Combinatória, especificamente, no ensino fundamental, precisa levar o aluno a usufruir das construções de diversos agrupamentos, sem que ele recorra à sistematização do estudo. Uma vantagem nesta abordagem é que em estudos futuros, o aluno terá melhor compreensão dos problemas propostos. Outro ponto a destacar é que a Análise Combinatória no ensino fundamental pode proporcionar discussões nas quais os alunos possam expressar suas ideias, apresentar propostas, ter liberdade para errar e aprender com seus erros, discordar da ideia do colega e até do próprio professor, se preciso.

Segundo Batanero (1997) e outros, já afirmavam, alunos que não conseguem identificar o tipo de operação a ser utilizada na resolução de um problema, enfrentam grande dificuldade com seus estudos. Outro fator não menos preocupante, segundo Batanero e outros pesquisadores é a confusão causada quanto a ordem na formação dos agrupamentos, pois os alunos apresentam pouco conhecimento de sequências e subconjuntos. Pautado no que afirma Batanero (1997, p. 1), em relação a importância de trabalhar os conhecimentos de Análise Combinatória.

> - Uma vez que não depende do Cálculo, permite considerar problemas adequados para diferentes níveis, podendo ser discutidos com alunos problemas ainda não resolvidos, de modo que, descubram a necessidade de criar novas matemáticas;

- Pode ser usado para treinar os alunos na enumeração, na realização de conjecturas, na generalização, otimização e sistemas de pensamento;
- Pode ajudar a desenvolver diversos conceitos, tais como a aplicação, a ordem e as relações de equivalência, função, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, e outras.

Por isso, insistimos no estímulo do ensino da Análise Combinatória nos anos finais do ensino fundamental, o que leva os alunos a terem um rendimento maior nas séries posteriores e no ensino médio.

A pesquisadora destaca ainda, que grande parte dos alunos ao se depararem com problemas de Análise Combinatória, apresentam dificuldades sobre o tipo de elementos que se combinam, porém, conseguem identificar, organizar, compreender a ordem e o enunciado do problema. Outro aspecto que precisa ser considerado, quanto ao ensino da Análise Combinatória no ensino fundamental é a dinâmica de sala de aula, como o incentivo das atividades em equipes, que proporcionam uma melhor assimilação do conteúdo.

A troca de experiências, os questionamentos e discordâncias, as estratégias construídas coletivamente, tudo isso proporciona para o todo uma maior compreensão dos problemas que envolvem Análise. Vale, também, destacar o valor das atividades individuais, pois as mesmas levam o aluno a desenvolver habilidades individuais que trarão segurança e proporcionarão uma melhor avaliação dos professores.

Para Esteves (2001), a valorização da criatividade quanto aos diferentes tipos de representações de se resolver um problema, é muito importante, pois elas facilitam a visualização e a construção de ideias para se chegar a formalização. Segundo Vergnaud (1990) aquilo que o aluno constrói por meio de representações, nada mais é do que um reflexo daquilo que o cerca no cotidiano (realidade).

Nesse sentido, ensinar Análise Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental, é aproximar os alunos da sua realidade, é trabalhar com materiais, situações-problema que os levem a compreensão do conteúdo, além de despertar interesse do aluno para a construção de sua aprendizagem.

Roa e Navarro – Pelayo (2001), ressaltam que a Análise Combinatória é um grande terreno para ser trabalhado e explorado, ressaltando as diversas aplicações em áreas distintas. Os autores, também analisam métodos e estratégias adotadas pelas crianças para resolver problemas. Os principais são: "O desenvolvimento por tentativa; formulação de todas as combinações; a fixação de um elemento fazendo os demais variarem, podendo ser completo ou incompleto" (ROA; NAVARRO – PELAYO, 2001).

As concepções anteriores nortearam a organização de uma proposta para ensinar Análise Combinatória no ensino fundamental, sem o uso de fórmulas, através de situações que possibilitem aos alunos o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico a partir de suas próprias construções. Na sequência apresentamos alguns fatores que julgamos importantes para um melhor ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

3.1 Análise Combinatória no ensino fundamental: como desenvolver a atividade

É muito importante pontuarmos que, o sucesso de qualquer atividade dentro da sala de aula depende da participação voluntária do aluno, é preciso que ele queira participar, por isso, é papel do professor explicitar de maneira clara a atividade que será desenvolvida, trazendo para dentro da aula a função da escola "[...] facilitar e estimular a participação ativa e crítica dos alunos/as nas diferentes tarefas que se desenvolvem na aula" (PÉREZ GÓMEZ, 1998, p.26).

Logo, o papel do aluno no desenvolvimento da atividade, com liberdade para exporem suas ideias, expressarem suas construções de forma autônoma, colabora para que se sintam sujeitos ativos na resolução de problemas. Bem como, garantir aos alunos o direito de errar.

Outro ponto que merece destaque, é garantir para o aluno a possibilidade que tem de cometer erros, e a partir de seus próprios erros chegar ao acerto. Isto trará segurança para eles, pois não se sentirão pressionados e muito menos "coagidos" para realizarem um trabalho que "valerá sua nota". Segundo afirma Cury:

> Quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que os alunos (e o professor) se debrucem sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado (2008, p. 80).

Nesta ótica os erros são muito mais trabalhados e explorados. Eles são usados para manter a confiança dos alunos, as relações interpessoais e a harmonia entre professor e aluno. Isso permite a repetição consciente, que levará ao acerto desejado.

Nesse sentido é preciso refletir sobre as atividades a serem apresentadas em sala de aula, uma boa escolha das "[...] intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando os estudantes a um questionamento sobre suas respostas" (CURY, 2008, p. 80) permitem desenvolver novos olhares sobre os temas estudados. Logo, é muito importante que as questões a serem trabalhadas, sejam atrativas, interessantes, que sejam capazes de fazer com que os alunos se sintam desafiados e devem objetivar o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Quanto ao contexto das questões, elas precisam se aproximar mais do cotidiano do aluno, da sua realidade, com esse propósito, apresentamos a análise dos resultados.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

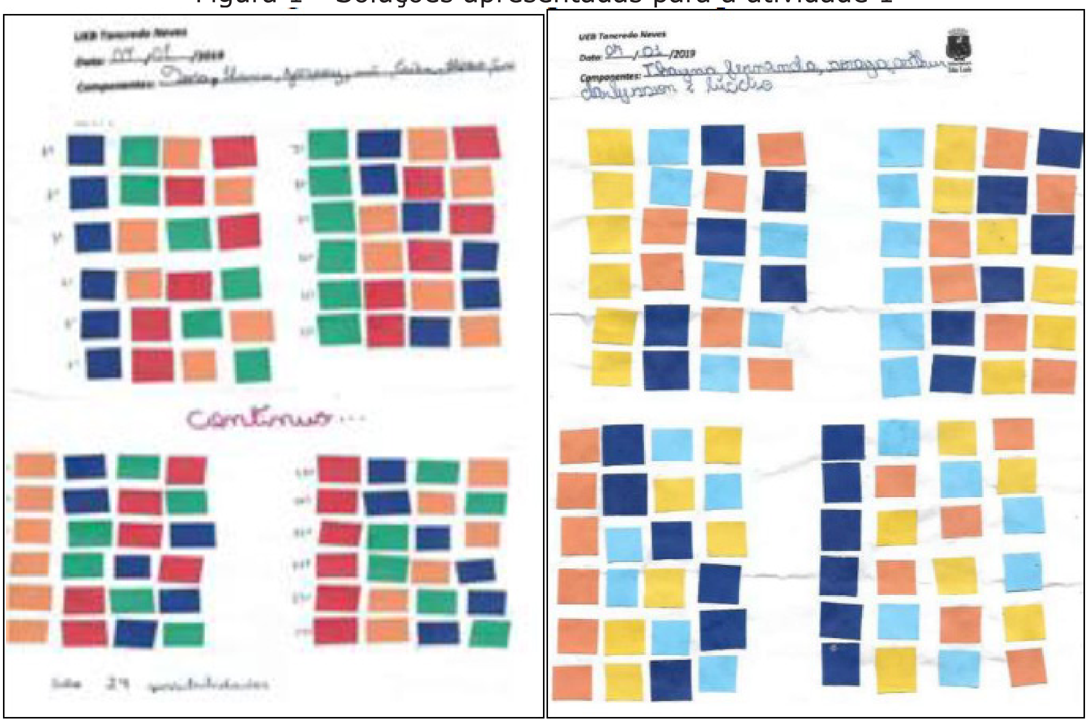
As atividades desenvolvidas na pesquisa contemplaram o estudo da Análise Combinatória no ensino fundamental, sem o uso de fórmulas, e foram aplicadas com o objetivo de verificar o nível de criatividade, desenvoltura e conhecimentos prévios dos alunos envolvidos. As atividades foram desenvolvidas sem nenhuma abordagem formal do conteúdo, ou seja, os alunos nunca tiveram contato com a Análise Combinatória, o que torna mais consistente a proposta quanto a relevância do conteúdo nas séries finais do ensino fundamental. No desenvolvimento das tarefas, tivemos a oportunidade de pontuarmos alguns comportamentos que para nós tem relevância pedagógica.

O trabalho desenvolvido alcançou diversas respostas, as respostas que serão expostas na sequência, se destacaram pela linha de pensamento diferenciado na execução das atividades.

4.1 Atividade Proposta 1

A primeira atividade proposta foi a realização de um trabalho de artes, a professora disponibilizou quatro folhas de papel a_4 com cores diferentes, cola, tesouras, lápis de cor, régua e fita adesiva para cada equipe. Na explicação do trabalho, pediu que fosse feito um painel retangular de pequenos recortes das folhas coloridas, e que todas as filas horizontais do painel fossem compostas por estes recortes, sem que a mesma formação (fila) se repetisse. Quantas filas diferentes contém esse painel?

Figura 1 - Soluções apresentadas para a atividade 1

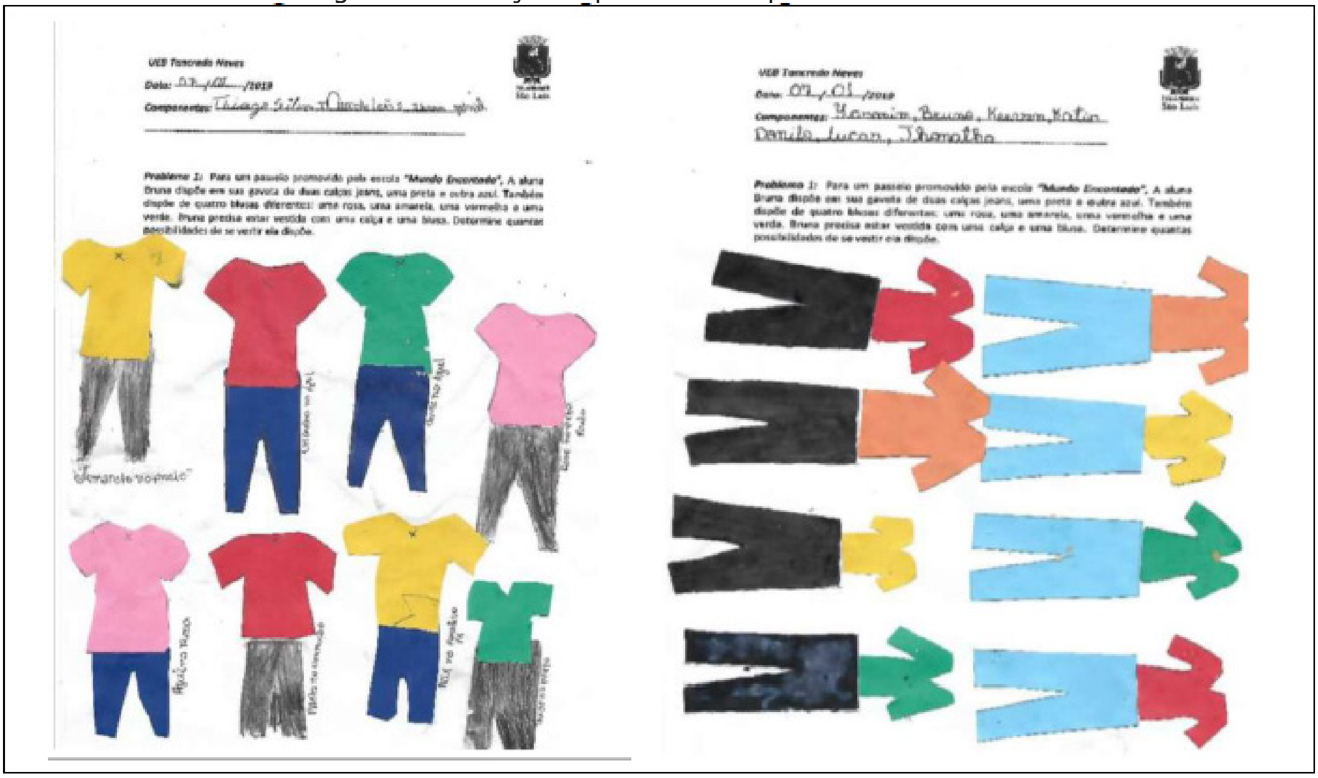


Fonte: Pereira, 2019, p. 28-29.

Nas soluções apresentadas a primeira questão, os alunos demonstraram raciocínio lógico de permutação, com técnicas de contagem. O que ressalta a importância do conhecimento prévio que do aluno, as experiências do dia a dia, tornando-se uma ferramenta importante para resolver problemas.

A segunda atividade apresentou a seguinte situação problema: para um passeio promovido pela escola **"Mundo Encantado"**, a aluna Bruna dispõe em sua gaveta de duas calças jeans, uma preta e outra azul. Também dispõe de quatro blusas diferentes: uma rosa, uma amarela, uma vermelha e uma verde. Bruna precisa estar vestida com uma calça e uma blusa. Determine quantas possibilidades de se vestir ela dispõe, as respostas estão expostas na Figura 2.

Figura 2 - Soluções apresentadas para a atividade 2



Fonte: Pereira, 2019, p. 30-31.

Com a aplicação destas atividades, percebemos o quanto a percepção e a criatividade do aluno precisam ser aguçadas, serem desafiadas. A grande vantagem de aplicarmos tarefas voltadas para esse propósito é que na condição de mediadores, também, aprendemos com as interações. Algumas observações realizadas no desenvolvimento das atividades e contribuíram para uma aprendizagem significativa:

No trabalho desenvolvido na sala de aula por professores de matemática, não é difícil encontrar aqueles alunos que por excesso de timidez, demostram insegurança e bloqueios na hora de exporem suas dúvidas, fazendo com esses mesmos alunos não desenvolvam suas intrínsecas potencialidades cognitivas. No decorrer das atividades, percebemos que alunos que sempre apresentaram um comportamento tímido e contido durante as aulas, se tornaram mais participativos nos grupos, opinaram, discutiram, se levantavam para perguntar sobre o seu raciocínio, sorriram, aprenderam sem medo. Um fator primordial do trabalho em grupos, é que eles proporcionam uma elevação da autoestima do aluno, pois agora ele se sente importante interagindo com outros alunos, ajudando na descoberta de um objetivo (*no nosso caso, encontrar soluções para os problemas de Análise Combinatória*).

Epistemologicamente concebemos a Educação como um processo social, e isto nos leva a compreensão de que a interação dos alunos nos grupos, é indispensável no seu desenvolvimento. O panorama delineado converge para o que Vygotski (1997) chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal, isto é, aquilo que o aluno ainda não desenvolveu ou não é manifestado de forma consciente. Logo, compreendemos que é por intermédio do coletivo que o aluno desenvolve ações cognitivas ainda não conscientes.

As múltiplas interações ocorrem no processo de ensino e aprendizagem, e na relação entre os protagonizadores do processo, ou seja, os que estão envolvidos, não somente os alunos, mas também os professores. A dialética em sala de aula acontece por meio de dois canais, por um lado os alunos que de alguma forma precisam da aquisição do conhecimento, e por outro, o professor com o conhecimento a ser compartilhado. Com as atividades propostas, observamos que a assimilação do conhecimento não se dá apenas pelo professor, mas também, pelos dos alunos.

A socialização de experiências na resolução de problemas de Análise Combinatória foi observada nas interações verbais entre os alunos, nas manifestações de criatividade apresentadas na resolução das atividades. Concluímos que as interações múltiplas proporcionam um melhor desenvolvimento das potencialidades cognitivas e metacognitivas dos sujeitos envolvidos, bem como nos conflitos múltiplos.

No desenvolvimento de qualquer atividade em grupo é inevitável os conflitos e as divergências quanto à formulação, a organização e expressão das ideias, sempre que é exigida a lógica matemática e criatividade individual de cada aluno. Assim, por diversas vezes foi preciso intervir nos conflitos que surgiram em decorrência das diferentes concepções manifestadas pelos alunos.

Acredita-se que os conflitos são interessantes e essenciais para o desenvolvimento lógico e interpretativo de cada aluno. Quando esses conflitos são evidenciados e interpretados pelo professor de forma negativa, haverá uma intervenção de negação, fuga ou violência, seja ela verbal, física ou psicológica. Rozemberg (2018, p. 2), afirma que "[...] os conflitos funcionam como alavanca para aperfeiçoar a cooperação, o diálogo e o ambiente de convívio", neste sentido, quando percebemos o conflito como algo positivo reagimos a ele de forma construtiva, e por mais que incomodem, as divergências abrem portas para que mudanças aconteçam e relacionamentos sejam fortalecidos.

Por outro lado, Rozemberg (2018, p. 3), destaca que, "por mais que cause incômodos, (os conflitos) possibilitam a abertura de portas para solidificação das ideias, o respeito mútuo, a cooperação, o diálogo e o ambiente de convívio". Reforçamos que, todas estas possibilidades só serão possíveis quando o professor interpretar de forma positiva os conflitos, e usas as oportunidades como alavanca de aprendizado e crescimento mútuo.

4.2 Percepções Diferentes para Resolução de um mesmo Problema

Conforme Van Walle (2009), o professor deve apresentar os problemas e desafiar os alunos a buscarem soluções, sem uma orientação prévia. O teórico defende que a sala de aula deve ser "[...] um ambiente onde fazer matemática não seja ameaçador e onde todos os estudantes sejam respeitados por suas ideias" (VAN DE WALLE, 2009, p. 33).

Compete ao professor, promover um ambiente que desafie os alunos a buscar respostas para os problemas propostos, permitindo que os alunos possam testar suas ideias, levantar hipóteses, desenvolver raciocínios e justificar os resultados alcançados. Condição necessária, segundo Van de Walle (2009, p. 33), para "criar este espírito de pesquisa, de confiança e de expectativa. [...] (onde) os estudantes são convidados a fazer matemática".

O teórico afirma que,

> O foco está nos estudantes ativamente compreenderem as coisas, testarem ideias e fazerem conjecturas, desenvolverem raciocínios e apresentarem explicações. Os estudantes trabalham em grupos, em duplas ou individualmente, mas eles estão sempre compartilhando e discutindo suas ideias. O raciocínio é celebrado quando os estudantes defendem seus métodos e justificam suas soluções (VAN de WALLE, 2009, p.33).

Tomou-se essa concepção como elemento basilar da investigação pedagógica, para a aplicação das atividades. A experiência permitiu observarmos diferentes concepções metodológicas, empregadas pelos alunos, ao resolverem a mesma questão. Foi possível perceber um turbilhão de ideias diferentes, que convergiam para um mesmo objetivo: de encontrar a resposta correta.

Como já citado neste trabalho, os alunos participantes das atividades não tinham nenhum conhecimento prévio sobre Análise Combinatória, não tinham fórmulas ou qualquer outra informação que lhes servisse de argumento para o desenvolvimento da tarefa, eles simplesmente puderam expressar suas diferentes percepções sobre o problema que lhes fora apresentado.

As diferentes percepções na resolução de um mesmo problema aconteceram entre os componentes do mesmo grupo, entre grupos diferentes e houve casos que a convergência se deu, entre um membro de um grupo e outro grupo, ou seja, as ideias (de alguns) não foram as mesmas do seu grupo, mas as de outro grupo. Portanto, reiteramos que a resolução de problemas de Análise Combinatória pode ser feita sem o uso técnicas, ou formalização “fechada”.

> Com o crescimento de novos modelos educacionais, em especial aquele que concebe a aprendizagem do ponto de vista construtivista, e diante das limitações dos problemas “fechados”, surgem as propostas de “problema aberto” e de “solução-problema”. Fazendo com que o aluno ao se deparar com essas propostas, realize tentativas, estabeleça hipótese, faça testes e valide seus resultados. (BRASIL,1997)

Tendo as diferentes percepções como uma característica peculiar de cada aluno, acreditamos ser positiva no âmbito de resolução de problemas, a liberdade concedida ao aluno, tendo em vista a plena expressão dos pensamentos sobre sua lógica de raciocínio.

4.3 Alto Nível de Concentração

Falar sobre concentração por parte dos alunos, quando nos referimos à Educação matemática, não é tarefa tão simples. O modelo adotado por grande parte dos educadores, ainda consiste na mera explanação de conteúdos no quadro, com poucos recursos que proporcionem uma melhor dinâmica de ensino.

Nas atividades propostas sobre a resolução de problemas de Análise combinatória, percebemos algo incomum nas aulas de matemática: Foi o *Alto Nível concentração* manifestado por todos os alunos. Ao se deparar com a situação de desafio, porém atraente, os alunos se lançaram na missão de resolverem a questão, de chegarem à resposta correta.

Atividades bem elaboradas e criativas proporcionam um melhor aproveitamento das aulas. E quanto canalizamos essas atividades para ensinar Análise Combinatória, elas têm o poder de quebrar o paradigma de que a Análise Combinatória trata de um conteúdo abstrato.

4.4 A Importância do Lúdico

Não é de se admirar que quando nos referimos ao ensino e aprendizagem da matemática, estamos nos deparando com um enorme paradigma criado de forma bilateral. Por parte dos alunos, os mesmos têm um grande receio pela disciplina, já por parte dos professores, é que não conseguem “prender” a atenção dos alunos para suas aulas. Em nossas atividades descritas, percebemos a grande importância do lúdico, de como os alunos ficam livres diante de uma abordagem matemática, porém prazerosa, dinâmica divertida. Queremos ressaltar aqui a importância do lúdico na Ensino da Análise Combinatória dentro das salas de aula, pois por mais que os alunos tenham tido pouco contato com o conteúdo abordado, que foi o caso das nossas atividades. Percebemos que os mesmos(alunos) já trazem do seu cotidiano um conjunto de conceitos e percepções que lhes dão ampla possibilidades de expressarem-nas nas resoluções de situações-problema. Como ressalta DANTAS, RAIS, JUY (2012, p.8):

> A criança já traz para o ambiente escolar algumas definições numéricas estabelecidas de forma singular, usadas no seu cotidiano, como por exemplo o número da sua casa, e fica ao encargo da escola incentivar a criança possibilitando que ela tome posse do sistema numérico de forma prazerosa e satisfatória. (DANTAS, RAIS, JUY, 2012, p. 8).

O lúdico no processo de ensino e aprendizagem é a forma de desenvolver o conhecimento de forma criativa, utilizando-se de importantes recursos como os jogos, as brincadeiras, a música, a pintura, o desenho, e outras formas de arte. O objetivo é ensinar por meio da diversão. Segundo Vygotsky, o lúdico proporciona um melhor desenvolvimento da criança, pois é através das atividades prazerosas que a criança tem a capacidade de agir, tem sua curiosidade aguçada, adquire autoconfiança e melhor fluidez do raciocínio e da concentração.

Em nossas atividades desenvolvidas, percebemos a demonstração por parte dos alunos do prazer em aprender, a satisfação em construir algo palpável, na vontade de enfrentar seus próprios desafios de forma livre, sem precisarem sentirem-se pressionados. Portanto, reiteramos neste trabalho que as atividades lúdicas produzem conhecimentos de forma prazerosa e harmoniosa. Por isso, o ensino da Análise Combinatória no ensino fundamental pode e deve ser exercido neste contexto. O que torna natural, sensível e prazeroso o ensino da matemática, diz (BRITO 2001, p.43).

No entender de Borin (1996)

> A introdução de jogos (O lúdico) na educação matemática tem outra grande importância, que é amenizar os bloqueios que muitos alunos apresentam por temerem a matemática, deixando-os assim incapacitados para aprendê-la. Dentro do lúdico, onde o comportamento passivo é inexistente e a motivação é grande, notamos que os alunos se adaptam à linguagem matemática e apresentam desempenho e atitudes bem mais positivas diante dos processos da aprendizagem. (BORIN, 1996, p.9)

O certo é que trazer o lúdico para dentro das aulas de matemática, infelizmente ainda é um notável entrave para muitos educadores. Muitos demonstram uma exacerbada preocupação em cumprir com uma grade curricular *(vale ressaltar que consideramos o cumprimento da grade curricular muito importante,* na qual acreditamos que a mesma não deve ser um entrave para o professor desenvolver suas aulas de forma lúdica.

Percebemos também as criações próprias de estratégias para resolverem as questões, os desentendimentos que proporcionam interação, e algo muito comum em todos os grupos: o direito de errar! Sim, antes das equipes chegarem ao resultado desejado, todos erraram, tiveram que recomeçar, reprogramar suas ideias, por isso, estaremos falando um pouco sobre a teoria ou pedagogia do erro neste próximo capítulo, com o objetivo de ressaltar a importância dos alunos serem orientados e aprenderem com seus erros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que nos motivou a desenvolver este trabalho, foi perceber que depois de muito tempo dentro da sala de aula, lecionando o conteúdo de Análise Combinatória, convivendo com outros profissionais da área e compartilhando do mesmo pensamento e experiências: de que ensinar este conteúdo é abstrato e muito difícil de ser ensinado. Pensamento que ecoa, quando analisamos a aprendizagem dos alunos, visto que, apresentam grande dificuldade, pois os mesmos são levados a prenderem por mera aplicação e memorização de fórmulas, que na maioria das vezes não proporcionam nenhuma condição de reflexão e produção de novos conceitos.

Assim, o trabalho propôs uma reflexão do conteúdo abordado, dentro do ensino fundamental sem a necessidade do uso de fórmulas. Uma oportunidade, principalmente, para reforçar a independência dos alunos na forma organizar suas ideias, para resolverem situações-problema diversas utilizando a Análise Combinatória como ferramenta. Concepção destacada em (BATENERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA E NAVARRO, 2001), quando ressaltam que o avanço do ensino de Análise Combinatória, especificamente, do ensino fundamental, precisar levar o alunado a usufruir das construções de diversos agrupamentos, sem que ele recorra a sistematização do estudo.

Tendo como referenciais os teóricos já citados neste trabalho, foram elaboradas algumas atividades práticas que dispensavam o uso de formulações matemática, para aplicação em sala de aula. Ao analisar a produção dos alunos, verificou-se que o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, possibilita o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico a partir das construções, dos próprios alunos.

Com a aplicação das atividades, alguns fatores e comportamentos importantes para o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, se revelaram espontaneamente e outros precisam ser provocados. Como: a percepção e a criatividade que precisam sempre ser aguçada e desafiada. Destacou-se, também, o valor das interações múltiplas, os conflitos, as diferentes abordagens perceptivas na resolução de um problema, o alto nível de concentração.

A forma de apresentação das atividades, precisa ser observada, e o lúdico, tem sua importância, pois proporciona, aos alunos, liberdade e descontração diante da abordagem matemática. Acreditamos que apesar de todos os desafios que existem no processo de ensino e aprendizagem quanto a este conteúdo, podemos concluir, que além das diversas aplicações, a Análise Combinatória, fortalece no aluno um espírito crítico, investigativo e criativo, bem como, um senso de responsabilidade, possibilitando-o a adquirir condições para progredir com segurança no trabalho ou em estudos futuros.

REFERÊNCIAS

BATANERO, Carmen. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP;1996

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, **LDB. 9394/96**. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. MEC. Brasília, DF, 2017.

BRITO, Marcia Regina Ferreira de. (org.). **Psicologia da Educação Matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

GARCIA, Vera Clotilde. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Porque Ensinar? Como se ensina e como se aprende? In: **Revista Educação**. vol. 32. nº 2. Porto Alegre, 2009. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5516

PEREIRA, Gedilson Pacheco. Uma Abordagem reflexiva sobre o Ensino da Análise Combinatória na Educação Básica. **Dissertação** (PROFMAT). Universidade Estadual do Maranhão. São Luís, 2019.

PÉREZ GÓMEZ. Angel Ignacio. A aprendizagem escolar: da didática operatória à reconstrução da cultura na sala de aula. In: SACRISTÁN, José Gimeno. **Compreender e transformar o ensino**. 4 ed. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 54-65.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001. Disponível em:

ROSEMBERG, Eduarda. **Conflitos Escolares**: 3 dicas para lidar de forma positiva. 2018. Disponível em: https://www.somospar.com.br/3-dicas-para-gestao-de-conflitos/. Acessado em 30/05/2019

STEVES, Inês. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8a série do ensino fundamental. 2001. 203 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. São Paulo: Cortez, 1986.

VAN DE WALLE, J.A. ***Elementary and Middle School Mathematics.*** 4. ed. New York: Longman, 2001. 478 p.

VERGNAUD, Gérard. ***El niño, las matemáticas y la realidad****: problemas de la enseñanza de las matemática en la primária*. Editorial trillas. México,1991

VYGOTSKI, Lev Semionovitch. (1997). **Obras escogidas** V. Madrid: Visor, 1997.

CAPÍTULO 8

CONJUNTOS NUMÉRICOS E SUAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Antônio Washington dos Santos Silva[1]

Lélia de Oliveira Cruz[2]

1 Mestre em Matemática, PROFMAT-UEMA, antoniowashington08@hotmail.com

2 Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UEMA, leliacruz@cesc.uema.br

RESUMO

O trabalho é parte de uma pesquisa que investigou a organização dos conjuntos numéricos e seus elementos, a partir da teoria dos conjuntos, mostrando sua importância e aplicação na Educação Básica, além de destacar os elementos que caracterizam cada conjunto. Como metodologia partiu-se da pesquisa bibliográfica para caracterizar cada ente estudado e fundamentar a pesquisa de campo, realizada com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública. A pesquisa de campo buscou verificar se os estudantes do último ano da Educação Básica apresentam os conhecimentos de conjuntos numéricos considerados essenciais para dar continuidade à aprendizagem de Matemática. Para coleta de dados, foi aplicado um questionário aos alunos, com questões abertas e fechadas. As respostas dos alunos, foram tabuladas e analisadas a partir do referencial teórico e os resultados apontam que existem lacunas de conhecimentos que poderão inviabilizar a compreensão de temas que exijam fundamentação em contagem, operações, estimativas e cálculo mental.

Palavras-chave: Surgimento dos Números. Conjuntos Numéricos. Educação Básica._

1. INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática dentre os diversos conteúdos que devem ser explorados na Educação Básica, destacamos os Conjuntos Numéricos, conjuntos formados por números e que foram sendo organizados e expandidos à medida que o homem e as civilizações evoluíam. Apesar dos conjuntos numéricos terem evoluído a partir da necessidade do homem, muitos alunos terminam o ensino fundamental sem compreender ou utilizar adequadamente os algoritmos das operações, sobretudo da divisão, e ainda apresentam dificuldades para representação e interpretação dos Números Reais (PONTE, 2006).

Mesmo aqueles alunos que dominam os algoritmos, apresentam dificuldades e/ou limitações quando precisam ler números ou separar os algarismos em classes, e comumente confundem vírgula e ponto, ao utilizar ou não algum recurso tecnológico para a realização de cálculos com números grandes ou pequenos. As constatações impulsionaram a organização do questionamento: como a concepção dos conjuntos numéricos podem viabilizar à compreensão dos alunos na Educação Básica? Na viabilidade de responder o problema de pesquisa, iniciamos um estudo com o objetivo de investigar os conjuntos numéricos e seus elementos, a partir do surgimento de cada um por seus diferentes contextos mostrando sua importância na matemática e sua aplicação na Educação Básica.

A ideia de realizar uma pesquisa para verificar à aplicabilidade dos conjuntos numéricos na Educação básica, surgiu da experiência docente e se fortaleceu na curiosidade de conhecer as origens e as criações de cada dos conjuntos. Além, da intenção de destacar pontos importantes para a metodologia de trabalho no ensino da Matemática na Educação Básica.

Consideramos de fundamental importância que os alunos compreendam os Números Reais. Este também pode servir de base para estudos mais profundos à medida que prosseguem na vida escolar, uma vez que, quem não desenvolver capacidade mínima para trabalhar com números e suas operações fica seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática.

2. SURGIMENTO DOS NÚMEROS

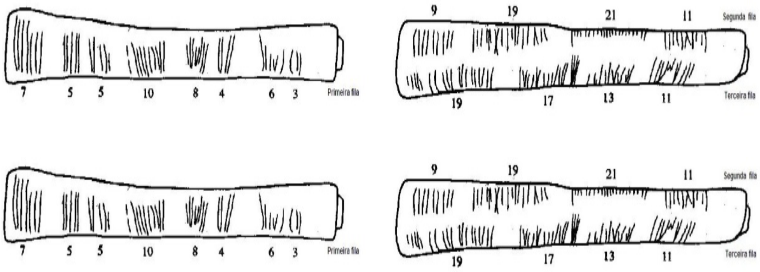
Os números surgiram com a necessidade de contar objetos. Essa necessidade começou com o desenvolvimento natural das atividades humanas, nos primórdios da civilização, conforme pontua Galvão (2014, p. 3), "[...] um estudo sobre como pensam os povos nativos, preconceitos à parte, verificou-se que vários povos primitivos analisados manifestavam distintas habilidades no que diz respeito à contagem, dependendo de suas necessidades". Outras pesquisas destacaram registros como, o osso de Ishango ou bastão de Ishango encontrado no Congo, nas proximidades da fronteira do Zaire e Uganda, datado com vinte mil anos a. C., é uma forte evidência, nele há sessenta cortes em um lado, sessenta no outro e no verso os números estão agrupados em quantidades iguais, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 - Osso de Ishago

Fonte: Galvão (2014, p. 2)

No osso está encravado um pedaço de quartzo, provavelmente utilizado para produzir as marcas, distribuídas em três filas, representadas na Figura 1. O Osso de Ishango tem em sua primeira fila, pequenos grupos de 3 e 6 marcas, outro grupo de 4, 8 e 10 marcas, um terceiro grupo de 5 e 5 marcas e finalizando 7 marcas. Na segunda fila, as marcas estão distribuídas em grupos de 11, 21, 19 e 9 marcas e na terceira fila com 11, 13, 17 e 19 marcas.

Figura 2 - Marcas nas três filas do Osso de Ishango



Fonte: Galvão (2014, p. 2)

Várias suposições são feitas a respeito das representações contidas no osso de Ishango, algumas delas são:

> - Primeira fila os grupos próximos estão relacionadas por duplicação 3 e 6, 4 e 8, 5 e 10.
> - Terceira fila as marcas podem ser reescritas da forma 10 + 1, 20 + 1, 20 - 1 e 10 - 9, dos quais representam os números primos entre 10 e 20.
> - Somando a segunda e a terceira fila obterem–se somas iguais a 60, ou seja, dois meses lunares.
> - Somar a primeira fila dá um total de 48 marcas, equivale há um mês e meio lunar. (GALVÃO, 2014, p. 2).

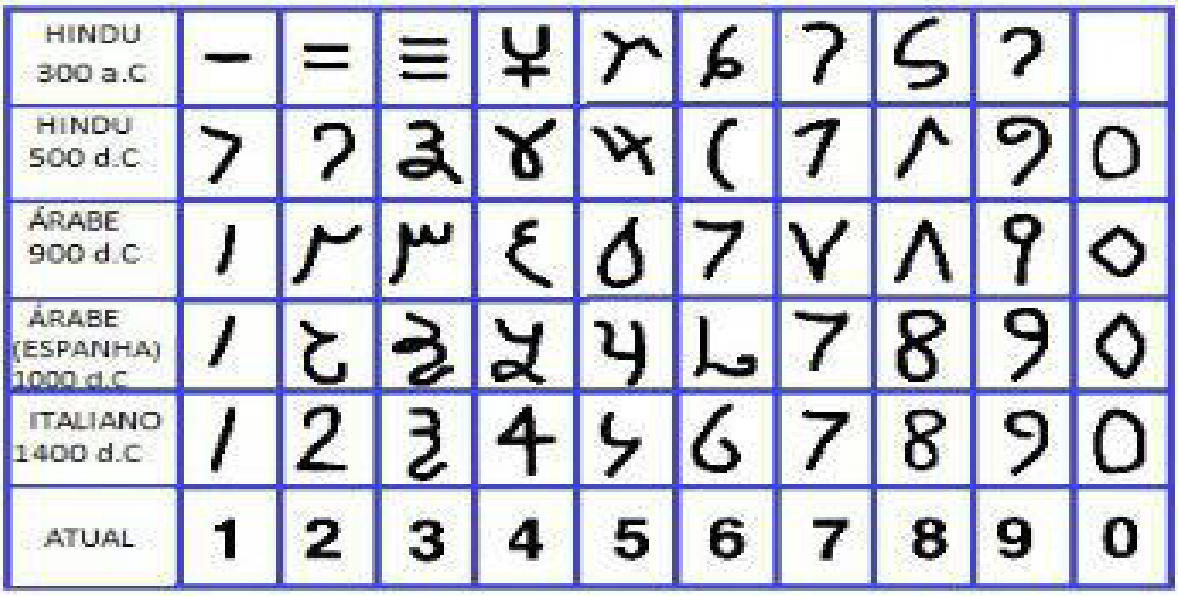
Com a evolução do homem pré-histórico, o modo de vida foi modificando. A procura de alimento para todos os membros do grupo foi ficando mais difícil, pois a população crescia e a caça ia ficando cada vez mais rara. Com isso, houve a necessidade de buscar formas mais eficientes de encontrar alimentos para atender às necessidades do grupo. Com agricultura e o pastoreio, veio à necessidade de uma nova forma de contagem, visto que, no pastoreio, o pastor usava várias formas para inspecionar seu rebanho.

Um exemplo conhecido é o da correspondência de uma pedrinha para cada ovelha, ou seja, pela manhã, cada ovelha que saía para o pasto correspondia a uma pedra que era guardada em um saco. Ao fim do dia, quando as ovelhas voltavam do pasto, era feita a contagem inversa, ou seja, para cada ovelha que retornava, era retirada uma pedra do saco, se sobrassem pedras, ficariam sabendo que alguma ovelha ficou desgarrada do bando e se faltassem pedras, saberia que o rebanho tinha aumentado. A palavra cálculo, usada atualmente, deriva da palavra em latim calculus, que significa pedrinha. Vale ressaltar, também, que a relação unidade a unidade não era feita somente com pedras, mas eram usados também nós em cordas.

Desta forma, o surgimento do agrupamento de várias pedrinhas deu ao início a ideia de conjuntos. Segundo Giraldo (2014, p. 53), um conjunto apresenta particularidades, ou seja, um agrupamento de termos com características parecidas no caso da matemática, os números são agrupados em conjuntos denominados numéricos para "[...] caracterizar um conjunto A quer dizer obter um conjunto de propriedades que sejam compartilhadas por todos os seus elementos, e de tal forma que qualquer outro conjunto que também as satisfaça seja (em certo sentido) equivalente a A".

No decorrer tempo, os números passaram por uma série de descobertas e mudanças, a última modificação comprovada deu origem aos números e ao sistema de numeração indo-arábico. Segundo Ifrah (1997), os hindus que viveram no vale do Rio Indo, atualmente o Paquistão, desenvolveram um sistema de numeração que reunia diferentes características, entre elas o sistema de numeração indo-arábico, que recebeu esse nome em homenagem aos povos Hindus que o inventaram e, também, devido aos árabes, que eram grandes comerciantes e viajavam por toda a Europa utilizando este sistema para representar quantidades, registrar valores de transações e também para realizar operações. Assim, eles o propagaram por toda a Europa.

Figura 3 - Sistema de numeração hindu-arábico em processo de evolução



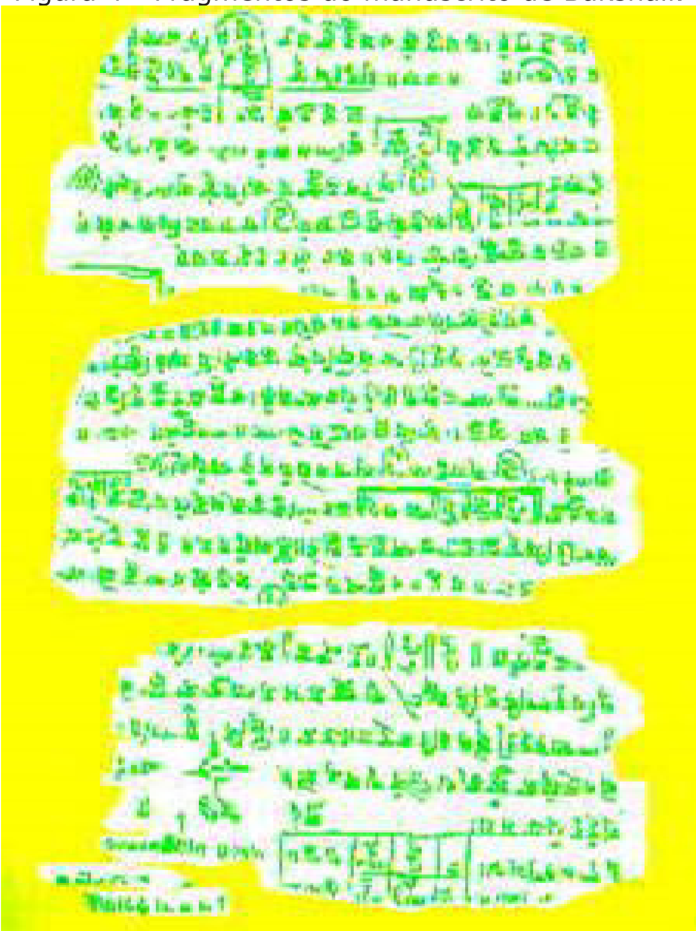
Fonte: Telecurso: Matemática: Volume 1, pág. 27.

Contudo, o sistema foi sendo aperfeiçoado ao longo da história, conforme a Figura 3, os cálculos eram efetuados facilmente, e tornaram-se mais eficientes com o aparecimento do símbolo para designar o zero.

Segundo Gundlach (1992), deve-se aos Hindus a geniosidade de inventar o zero no ano 500 D.C., conta à história que o símbolo conhecido hoje, tem seu primeiro registro em inscrições e manuscritos Hindus para assinalar um espaço em branco, e recebeu variadas denominações, como sunya, significando "lacuna" ou "vazio". Para os árabes, era conhecido como sifr, que significa "vago". Já no latim como zephirum ou zephyrum por volta do ano 1200, mantendo-se seu som, mas não seu sentido. Sucessivas mudanças dessas formas, passando inclusive por zeuero, zepiro e cifre, levaram as nossas palavras "cifra" e "zero". O significado duplo da palavra "cifra" hoje – tanto pode se referir ao símbolo do zero como a qualquer dígito.

Vários antropólogos procuraram explicar como pode ter surgido esta ideia do nada, tão importante para a matemática, uma das explicações mais interessantes parece ser a que liga o conceito do zero à ideia de “nada”, bem expressa no misticismo religioso Hindu pelo chamado Nirvana, encontrado nos manuscritos que apresentam os mil anos de cultura Matemática Hindu, através de um livro lendário, Lilavati de Bhaskara. A Figura 4 representa fragmentos do manuscrito, Bakshali, um dos mais antigos exemplares de textos matemáticos Hindus.

Figura 4 - Fragmentos do manuscrito de Bakshali.



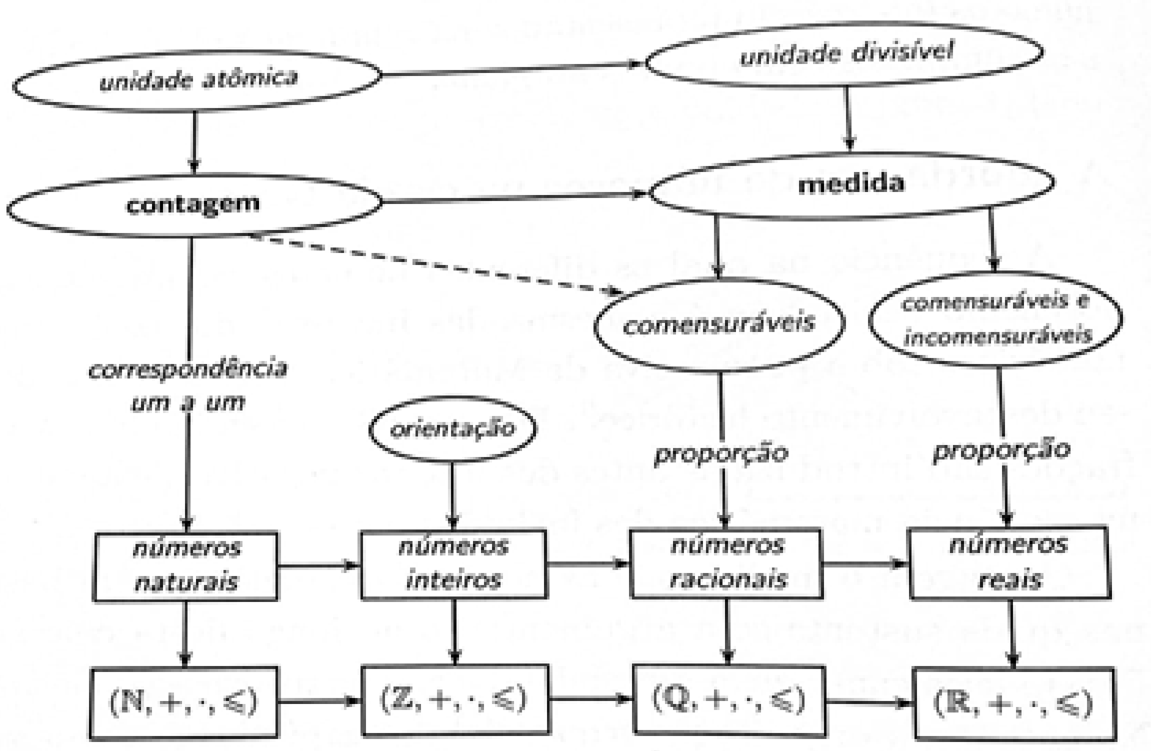
Fonte: IFRAH, 1997, p. 319.

O manuscrito Bakhshali é um trabalho antigo do século IV da Matemática hindu, embora parte desse material indubitavelmente já fosse conhecida muitos séculos antes. Consiste em cerca de 70 folhas de casca de árvore contendo problemas matemáticos e suas soluções o que faz dele a primeira origem registrada no subcontinente indiano para o símbolo zero.

Segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016) a contagem e as medidas são noções fundamentais com base nas quais se sustenta a argumentação ao longo deste tópico. Essas ideias constituem a espinha dorsal das reflexões propostas, no entanto, a organização sequencial deste trabalho é parte da abordagem dos conjuntos numéricos, que segue a ordem de suas inclusões, na forma como se encontra estruturada na matemática contemporânea.

O desenvolvimento de conceito matemático de número, na forma como foi estruturado neste trabalho, apoiou-se no desenvolvimento de conceito de número organizado por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016) e apresentado no diagrama da Figura 5.

Figura 5 - O desenvolvimento do conceito de número



Fonte: RIPOLL; RANGEL; GIRALDO (2016, p.36)

Observando a Figura 5, percebe-se que a organização dos conjuntos numéricos teve como ponto de partida os números naturais. Segundo Ripoll; Rangel; Giraldo (2016, p.36), "[...] principiando com os números naturais, uma estrada que nos leva aos números reais". Nessa caminhada, sucessivamente, as estruturas numéricas foram sendo ampliadas, alcançando a organização: $N \subset Z \subset Q \subset R$ e $I \subset R$

Os números naturais dão a ideia da quantidade de objetos que um conjunto possui e foi o primeiro conjunto organizado pelos homens, contudo os números naturais não têm fim, ou seja, o conjunto dos números naturais é dito um conjunto infinito.

> [...] Os Axiomas de Peano, proposto pelo matemático italiano Giuseppe Peano no final do século XIX, foi à primeira construção matemática formal do conjunto dos naturais. A estrutura dos Axiomas de Peano baseia-se em uma ideia elementar central: a de sucessor. Essencialmente, o conjunto dos números naturais é construído tomando-se progressivamente sucessor, a partir de um elemento inicial. Isto é, o (IN) é obtido como o conjunto que se obtém como resultado do processo de se partir de um elemento, acrescentar seu sucessor, o sucessor de seu sucessor, a assim por diante. (GIRALDO 2014, p.47).

Pesquisadores como, Maciel e Lima (2005) admitem a existência de um conjunto não vazio IN, para o qual vale alguns axiomas. Destacamos o axioma conhecido como Princípio da Indução, um método de demonstrações de proposições dos números naturais.

Se o conjunto $X \subset N$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, ou seja, se $n \in X$ implica $s(n) \in X$ então $X = N$.

A partir deste ponto abandonaremos a notação s(n) para denotar o sucessor de n e escrevemos sempre, n + 1 como sucessor de n.

O axioma 4 é conhecido como Princípio da Indução, um método de demonstrações de proposições a respeito dos números naturais. A proposição P(n) é válida para todos os números naturais n, se:

1. P(1) é válida;

2. Se P(n) é válida então P(n + 1) é válida.

Esta última condição quer dizer que: supondo a proposição P(n) válida para um natural n, se for possível mostrar que ela é válida para o sucessor n + 1, então podemos garantir que ela é válida para todos os números naturais. A hipótese de P(n) ser válida denomina-se Hipótese de Indução.

Exemplo 3.1.1. Mostra que a proposição: $P(n) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2n - 1) = n^2$, é válida para todo n natural.

Solução: Percebe-se que para n = 1 é válida a proposição, ou seja, $P(1)$: $1 = 1^2$. A hipótese de indução é que a proposição: $P(k) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2k - 1) = k^2$, para todo k natural, também é verdadeira.

Adicionando 2k + 1 a ambos os membros desta igualdade, obtemos:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + . . . + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k + 1)^2
\end{aligned}
$$

Isto nos diz que a proposição é verdadeira para P(k +1). Logo, pelo Princípio da Indução, a proposição P(n) é verdadeira para todo natural n. O conjunto dos números naturais é definido por duas operações fundamentais: adição e multiplicação. Logo, se **a** e **b** são números naturais, então se define adição: **a + b**; e multiplicação: **a • b**.

A abordagem será essencialmente axiomática, isto é, segue uma lista de propriedades básicas dos números naturais e das duas operações, adição e multiplicação de acordo Hefez (2016).

1. A adição e a multiplicação são bem definidas: $\forall a, b \in N$.

$$\mathbf{a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow a + b = a' + b \quad \text{e} \quad a \bullet b = a' \bullet b'.}$$

2. A adição e a multiplicação são comutativas: $\forall a, b \in N$,

$$\mathbf{a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \bullet b = b \bullet a.}$$

3. A adição e a multiplicação são associativas: $\forall a, b, c \in N$,

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).}$$

4. A multiplicação possui elementos neutros: $\forall a \in N$

$$\mathbf{a \bullet 1 = 1 \bullet a}$$

5. A multiplicação é distributiva com relação à adição: $\forall a, b, c \in N$.

$$\mathbf{a\,(b + c) = a \bullet b + a \bullet c.}$$

6. Tricotomia: Dados $a, b \in N$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

(i) $a = b$;

(ii) $\exists c \in N,\ b = a + c$;

(iii) $\exists c \in N,\ a = b + c$.

A relação de ordem no conjunto dos números naturais é definida em termos da adição. Dados quaisquer $a, b \in N$ dizemos que a é menor do que b e escrevemos $a < b$, existe $c \in N$ tal que $b = a + c$, o que é verificado no item (ii) acima. Da mesma forma, dizer que a é maior do que b e escrevemos $a > b$, o que é verificado no item (iii).

Se $a > b$ significa que **a** é maior do que ou igual a **b**. A relação "menor do que" goza das seguintes propriedades:

1. Transitividade: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \quad \text{e} \quad b < c \Rightarrow a < c$$

2. A adição é compatível e cancelativa: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

3. A multiplicação é compatível e cancelativa: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \Rightarrow ac < bc.$$

Relacionamos a ideia das propriedades com números de modo que possamos operar as propriedades a rigor dessas operações no conjunto dos números naturais, das quais foram enunciadas, mas apesar de usadas frequentemente, não recebem maior atenção, isto parece explicável, porque os números naturais gozam das propriedades estabelecidas em situações propostas dentro das leis básicas da aritmética.

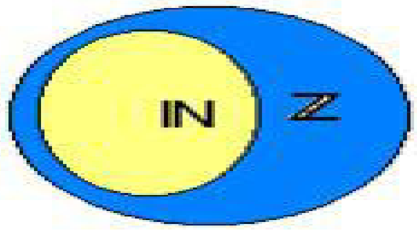
2.1 Números Inteiros

Com o passar dos anos, a expansão mundial do comércio fez surgir uma necessidade cotidiana que implicou a uma nova concepção de número. No século XVIII, no auge das ciências modernas, com o entendimento do zero, ampliou-se o uso dos números negativos que somados às intenções comerciais, de certa forma, inspiraram os matemáticos da época na forma de representar outro conjunto numérico, o conjunto dos números inteiros, representado pela letra **Z**. Vale destacar que, "[...] a letra **Z** corresponde à letra inicial da palavra alemã Zahlen, que significa números" (DOMINGUES, 2016, p.21).

O conjunto dos números inteiros é formado por todos os números naturais, todos os seus números simétricos negativos e o zero. O conjunto, em epígrafe, não possui início nem fim, ao contrário dos naturais, que possui um início e não possui fim.

Neste sentido é possível afirmar que, dentre os subconjuntos dos números inteiros, encontra-se o conjunto dos números naturais, ou seja, $N \subset Z$, conforme expressa a Figura 6.

Figura 6 - Representação do diagrama do conjunto dos números inteiros (Z)



Fonte: estudopratico.com.br/numeros-inteiros

Segundo Hefez (2016), o conjunto Z dos números inteiros se define pelas operações de adição e multiplicação, válida para as propriedades dos inteiros, citadas para o conjunto dos números naturais. Assim, seguem mais algumas propriedades fundamentais para o conjunto dos números inteiros. Sejam **a**, **b** e **c** inteiros quaisquer, então:

1. A adição possuem elementos neutros:

$$\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$$

2. Integridade: Tem-se que a, b $\in$ Z.

$$\mathbf{a \bullet b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad ou \quad b = 0.}$$

A relação "menor do que" listada para os naturais também satisfaz para os inteiros, segundo Hefez (2016), citamos mais propriedades que são validas para conjunto dos inteiros:

1. Se a $\in$ Z com a $\neq$ 0, então a < 0 ou 0 < a;

2. Se a, b, c $\in$ Z com a < b e c > 0, então ac < bc;

3. Se a, b, c $\in$ Z com a < b e c < 0, então ac > bc.

Dados dois números inteiros **a** e **b** com a $\neq$ b, sabemos que existe um número inteiro **c** tal que b = a + c. Neste caso, definimos o número **b** menos **a**, denotado por b - a, como sendo o número **c**. Em símbolos:

$$b - a = c.$$

Dizemos que **c** é o resultado da subtração de **a** de **b**. Portanto, temos por definição.

$$c = b - a, \text{ se somente se, } b = a + c.$$

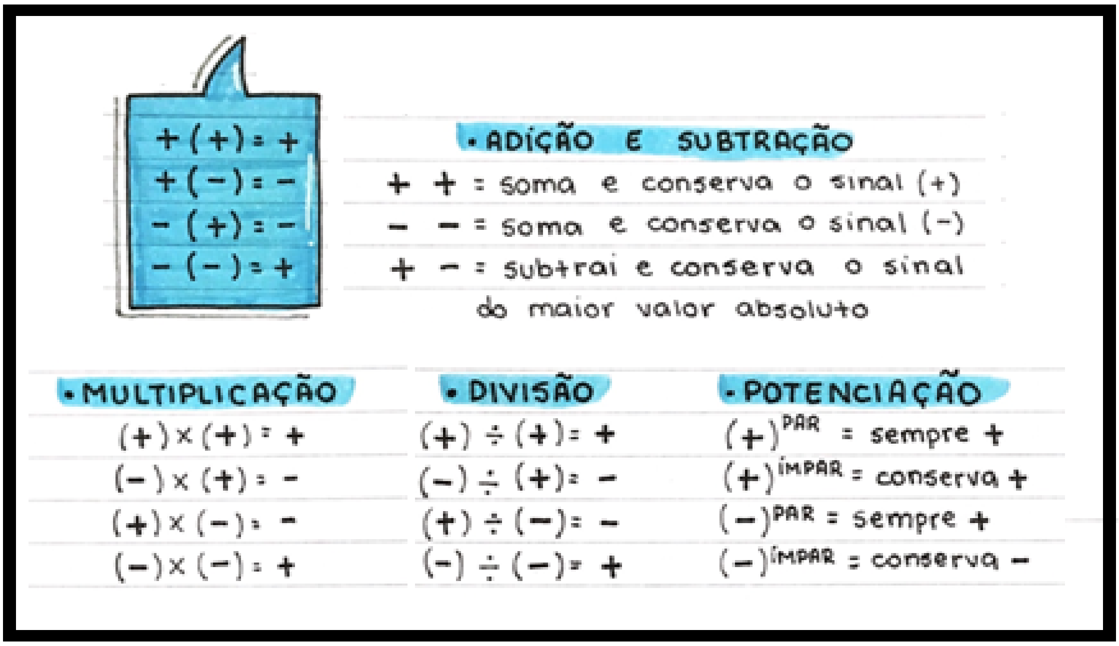
O número **c** é denotado por inverso aditivo conhecido como subtração entre dois números inteiros. Generalizando, diz-se que **a** é o inverso aditivo de **a** quando.

$$a + (- a) = (- a) + a = 0.$$

Assim, tendo os naturais como universo numérico, existe a necessidade de criar a subtração de dois números quaisquer. Daí surgiu à ideia de construir novas propriedades para garantir a construção dos números negativos, segundo Giraldo, (2014). "Desta forma qualquer conjunto em que essas propriedades elementares valham todas as suas consequências também valerão".

O modo como ficaram conhecidas às regras usadas para decidir o sinal do resultado das operações matemáticas básicas é o jogo de sinais, apresentados na Figura 7.

Figura 7 - Representação dos jogos de sinais



Fonte: passeidireto.com/arquivo/60848130/matematica-jogos-de-sinais

A origem da regra dos sinais, conforme afirma Dassie et al (2010, p.10) é imputada a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C).

> Apesar [...] do autor não fazer qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" Diofantes escreve '*O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta' (grifo do autor)*, aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças.

Contudo, duraram séculos para que os matemáticos percebessem que a regra de sinais conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações não pode ser provada. Elas foram criadas para darem liberdade operatória, pelo simples fato de preservar as propriedades fundamentais da Aritmética.

De acordo com Ripoll; Rangel e Giraldo (2016, p. 93),

> [...] os números inteiros quando é introduzido na escola, o aluno provavelmente já lidou com definições antes, como algumas figuras geométricas, a noção de paralelismo, números primos, ou mesmo as operações de adição e subtração com naturais. Mas em todos os casos, de alguma forma, pode ser estabelecida uma relação com o universo familiar do aluno ou com estruturas lógicas já conhecidas e realizadas. Porém, no caso do produto de dois números negativos, é difícil conseguir referências concretas que sejam familiares aos alunos para sustentar suas definições.

Às vezes, algumas analogias são usadas como "macetes" para memorização para regra dos sinais. Entretanto, essa generalização pode não ser tão direta para os alunos do ensino fundamental, e são importantes que eles experimentem diversos exemplos que ilustrem as regras gerais, com fatores positivos e negativos, explorando a interpretação das operações matemáticas de maneira ampliada como reflexão na representação na reta numerada.

2.2 Números Racionais

Segundo Boyer (1996), os números racionais tiveram origem no Egito antigo em forma de frações, mas apenas foram aceitas com a expansão comercial e a evolução da matemática. Por exemplo: uma fatia de um bolo, um pedaço de terreno e outras situações eram difíceis de ser representado, o que levou os homens a buscarem formas de representação surgindo às frações.

Para incluir os números ~~ditos~~ fracionários junto com os já existentes, criaram-se o conjunto dos números racionais representados por Q, tal como o nome já indica, são números que se podem representar por uma razão, ou seja, uma divisão de dois números inteiros. O conjunto dos números racionais engloba: os números naturais e inteiros; os números fracionários finitos e as dízimas periódicas.

Portanto, todo número que tem representação decimal finita ou infinita e periódica são chamados de números racionais.

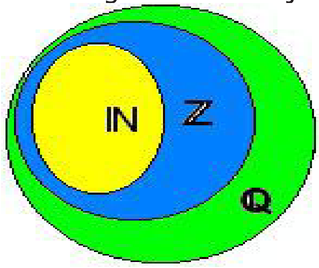
$$\mathbb{Q} = \left\{ ..., -3, ..., \frac{-3}{2}, ..., -1, ..., 0, ..., \frac{1}{2}, ..., \frac{3}{2}, ... \right\} ...$$

O conjunto dos números racionais, simbolizado pela letra Q, é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de uma fração $\frac{a}{b}$, com **a** e **b** inteiros quaisquer com **b** diferente de zero.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in Z \ e \ b \in Z* \right\}$$

O conjunto dos números racionais é a ampliação do conjunto dos números inteiros, onde se definem outros subconjuntos de Q. Assim, podemos observar que IN é subconjunto de Z, que, por sua vez, é subconjunto de Q; isto é, todo número natural é também número inteiro, e todo inteiro é também número racional, conforme representado, pela Figura 10.

Figura 10 - Representação do diagrama do conjunto dos números racionais (Q).



Fonte: todamateria.com.br/numeros-racionais

Segundo Guidorizzi (2001), as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são sempre possíveis no conjunto dos números racionais. Assim, se **a** e **b** são números racionais, então gozam das seguintes propriedades:

$$(a + b) \in Q,\ (a - b) \in Q,\ (a \cdot b) \in Q,\ (a \div b) \in Q, \text{ com } b \neq 0.$$

Ainda, de acordo com Guidorizzi (2001), dizemos que o número racional $\frac{p}{q}$ é positivo se **p • q** $\in$ N. Se **p • q** $\in$ e **p** $\neq$ 0 dizem, então, que $\frac{p}{q}$ é estritamente positivo. O número racional **a** é estritamente menor que o número racional **b**, ou que **b** é estritamente maior que **a**, e escrevemos a < b, ou respectivamente b > a, se existir um número racional **t** estritamente positivo, tal que b = a + t. A notação a $\leq$ b é usada para indicar a afirmação "a < b ou a = b". A notação a $\geq$ b é equivalente a $\leq$ b. Observe que **a** positivo equivale **a**, a $\geq$ 0 e que se a $\leq$ 0, dizemos que **a** é negativo.

Fundamentado no estudo realizado por Galdino (2011), os números racionais x, y e z, a quádrupla (Q, +, • , $\leq$) satisfaz as seguintes propriedades:

- Associativa: (A1) (x + y) + z = x + (y + z); (M1) (xy)z = x(yz).
- Comutativa: (A2) x + y = y + x; (M2) xy = yx
- Existência de elemento neutro: (A3) x + 0 = x; (M3) x 1 = x.
- Existência de oposto: (A4) Para todo racional **x** existe um único racional **y** tal que x + y = 0. O **y** denomina–se oposto de **x** e indica–se por **– x**. Logo, x + (-x) = 0.
- Existência de inverso: (M4) Para todo racional x ≠ 0 existe um único racional y tal que x y = 1. O **y** denomina–se inverso de **x** e indica–se por $\mathbf{x^{-1}}$ ou $\frac{1}{x}$. Logo, x • x^{-1} = 1.
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: (D) x(y + z) = xy + xz.

- Reflexiva: (O1) x ≤ x.
- Antissimétrica: (O2) x ≤ y e y ≤ x então x = y.
- Transitiva: (O3) x ≤ y e y ≤ z então x ≤ z.
- Quaisquer que sejam os racionais x e y: (O4) x ≤ y ou y ≤ x.
- Compatibilidade da ordem com a adição: (OA) Se z > 0 e x ≤≤ y ⇒ x + z ≤ ≤ y + z.
- Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém.
- Compatibilidade da ordem com a multiplicação: (OM) Se z > 0 e x ≤ y ⇒ xz ≤ yz.
- Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém.
- O símbolo (⇒) que aparece em (OA) e (OM) significa "então" ou "implica".

Seja K um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos e suponhamos que em K, estejam definidas duas operações indicadas por + e; se a terna (K, +,) satisfaz as propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) e (D), diremos que (K, +,) é um corpo. Se, além disso, se K estiver definida uma relação (6) de modo que a (K, +, 6) satisfaça todas as 15 propriedades anteriormente listadas, então diremos que (K, +, 6) é um corpo ordenado. Consequentemente (Q, +, 6) é um corpo ordenado, ao passo que (Z, +, 6) não é um corpo ordenado, pois é fácil ver que (M4) não se verifica. (GALDINO, 2011, p. 7-9).

2.3 Números Irracionais

Segundo Boyer (1996), a primeira descoberta deste número é atribuída a Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras. O que se sabe é que não dá para representar $\frac{p}{q}$ como uma fração de números inteiros com q ≠ 0, pois tem infinitas casas depois da vírgula da qual é chamada de dízima aperiódica. É formado por todos os números que, ao contrário dos racionais, não podem ter uma fração de números inteiros. Esse conjunto é representado pelo símbolo I, onde podemos mostrar o mais famoso número irracional, conhecido como número pi (π = 3, 141592...), e alguns outros.

Daí uma nova pergunta foi feita aos matemáticos da época "os racionais cobrem toda a reta numérica". Essa pergunta foi solucionada a mais de 2500 anos, por Pitágoras e seus discípulos. Estes observaram, com surpresa, que a diagonal de um quadrado de lado unitário é $\sqrt{2}$. Logo, não poderia ser expressa por um número racional, pois o número $\sqrt{2}$ não pertencia ao conjunto numérico dos racionais, daí surgiu à necessidade de ampliar esse conjunto. A nova reorganização mais tarde foi chamada de conjuntos dos números irracionais.

Portanto, se um número for racional, não pode ser irracional, e vice-versa. Da qual podemos acrescentar que o conjunto dos números irracionais foi uma das invenções considerada como um marco nos estudos da trigonometria e geometria.

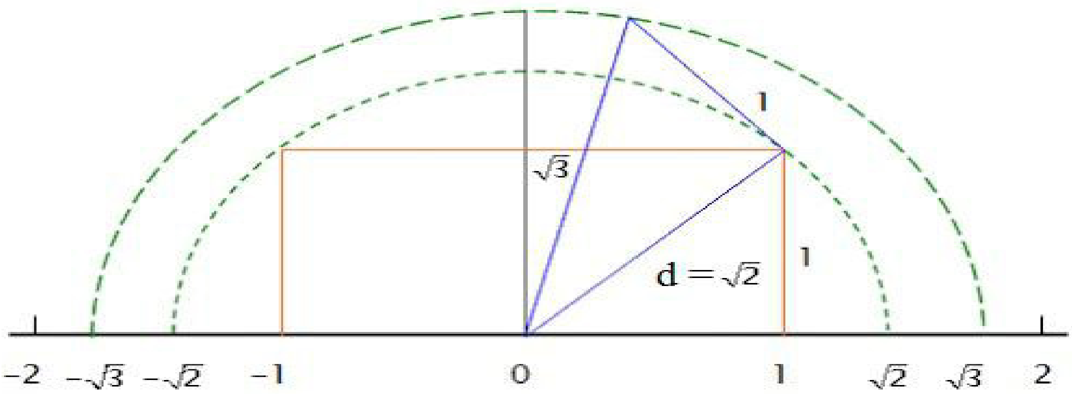
Assim, como existem as dízimas periódicas, também existem as dízimas não periódicas que são justamente os números irracionais, uma vez que elas nunca poderão ser expressas como uma fração do tipo $\frac{a}{b}$. Deste modo, podemos relacionar as dízimas não periódicas a números decimais infinitos que depois da vírgula não ocorrem período.

Exemplo 3.4.1 0, 93274908736549263937494123644 4974. . ..

Alguns desses números não exatos ganharam nomes, sendo eles: número pi, número áureo e número de Euler.

A representação dos números irracionais na reta numérica é atribuído a um quadrado na reta numérica de lado 1, com um dos vértices na origem, a medida da diagonal é calculada pelo teorema de Pitágoras, onde "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", representado assim, pela a Figura 11.

Figura 11 - Representação da criação dos números irracionais a partir da diagonal de um quadrado



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 4)

Modo de resolução para determinar a diagonal de um quadrado:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 1 + 1$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Logo, podemos concluir que a diagonal do quadrado é um número irracional que mede $\sqrt{2}$.

Os conjuntos dos números irracionais se classificam em transcendentes e algébricos.

Transcendentes: São números aperiódicos.

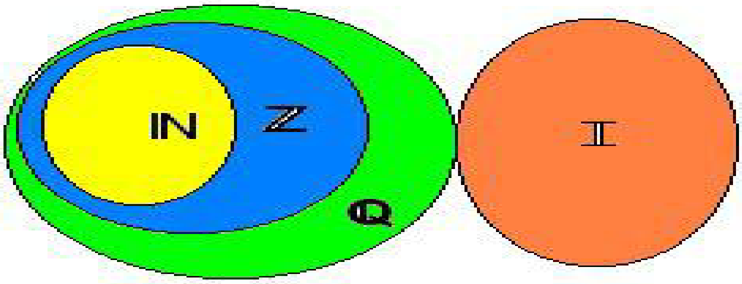
- O número pi, com seu valor = 3, 14159265358979323846. . . representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro.
- O número de Euler, com seu valor e = 2, 7182818285. . . é uma constante que surge em várias aplicações científicas.
- O número de áureo, chamado por Phi (θ) com seu valor = 1, 618033. . .é um número irracional, constante e real, que representa matematicamente a perfeição na natureza.

Algébricos: São equações algébricas de coeficientes inteiros.

- A raiz cúbica de $\sqrt[3]{2}$ pode ser escrita como sendo $x^3 - 2 = 0$.

Portanto, podemos supor que as representações dos conjuntos dos números irracionais são diferentes dos conjuntos dos números racionais de acordo com o diagrama da Figura 12.

Figura 12 - Representação do diagrama do conjunto dos números irracionais (I)



Fonte: matematicadidatica.com.br/ConjuntosNumericos

2.4 Números Reais

Com a união dos números racionais e os irracionais, obtemos um novo conjunto numérico chamado de números reais. A união descrita chamou a atenção de inúmeros matemáticos dos quais Hermann Hankel (1839 - 1873) o primeiro matemático a atribuir aos números reais à condição de "Estruturas intelectuais e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides" (BOYER, 1996, p. 409)". Outra abordagem completamente diferente foi dada pelo alemão Richard Dedekind, em 1872, na sua obra "A continuidade e os números irracionais".

Dedekind desenvolveu o conceito de continuidade através da aritmética, sem usar a geometria como guia, pois considerava esse método mais rigoroso. O conjunto dos números reais através dos famosos cortes de Dedekind foi uma importante contribuição para a compreensão dos conceitos atuais dos números reais.

POSTULADO DE DEDEKIND. Todo subconjunto não vazio de R, constituído de elementos positivos tem um ínfimo.

O postulado de Dedekind realmente determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. O corpo R assim definido contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto Q dos racionais. Na realidade, essa correspondência goza da propriedade de preservar as operações de adição e multiplicação; correspondências biunívocas desse tipo tomam o nome de isorfismos.

Para todos os efeitos, podemos simplificar essa questão do isomorfismo e simplesmente dizer que R contem Q. A reta R é um belo modelo geométrico para o corpo R: cada ponto R representa um real e, vice-versa, a cada real corresponde um ponto de R. As verificações dos seguintes fatos que decorrem diretamente do postulado de Dedekind (FIGUEIREDO, 1996. p. 9).

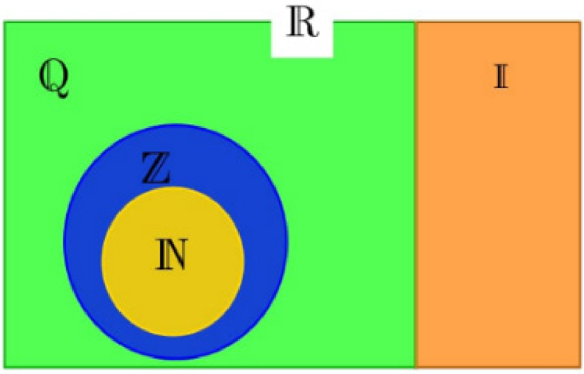
Portanto, podemos afirmar que o conjunto dos números reais, simbolizado pela letra R, é formado pela união dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

R = $\{x \text{ é } racional \text{ ou } x \text{ é } irracional\}$

Desse modo todos os conjuntos numéricos (N, Z e Q), bem como o conjunto dos números irracionais são subconjuntos de IR. Da mesma forma destacam-se os outros subconjuntos dos números reais.

Tomando como referência os fatos estabelecidos, podemos então apresentar o diagrama da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais que formam o conjunto dos números reais, conforme apresentado na Figura 13.

Figura 13 - Representação do diagrama do conjunto dos números reais (R)



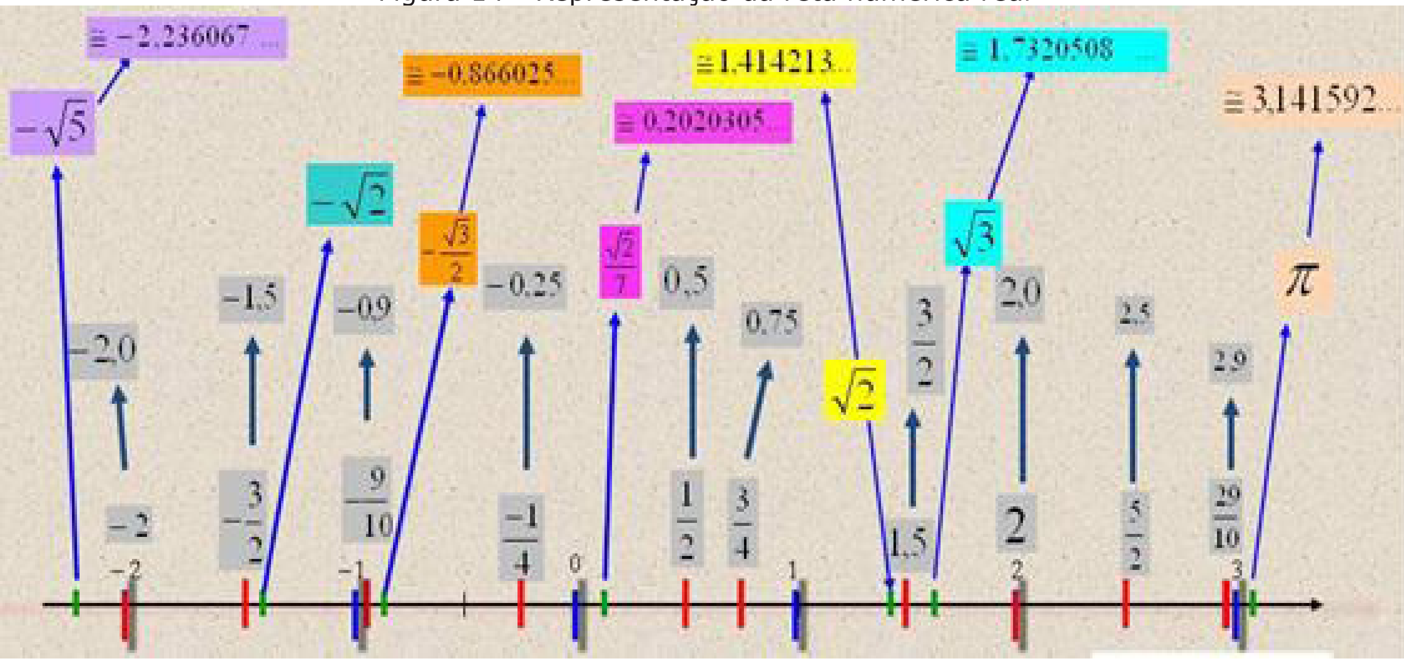
Fonte: matematicadidatica.com.br/números-reais

Notemos que $N \subset Z \subset Q \subset R$ e $I \subset R$, assim, podemos afirmar que as quatros operações matemáticas serão sempre válidos no conjunto dos números reais, bem como: adição, subtração, multiplicação e divisão.

$$(a + b) \in R,\ (a - b) \in R,\ (a \bullet b) \in R,\ (a \div b) \in R, \text{ com } b \neq 0.$$

Uma reta numérica é uma reta na qual foram colocados todos os números reais. Essas retas são construídas com base no conceito de distância entre dois pontos, uma vez que toda distância é representada por um número real e quanto maior esse número, maior a distância que ele representa. A Figura 14 é uma representação da reta real.

Figura 14 - Representação da reta numérica real



Fonte: slideplayer.com.br/slide/1367566/

De acordo com Guidorizzi (1996), os intervalos numéricos são subconjuntos especiais dos números reais. Nas definições a seguir, consideram-se **a** e **b** dois números reais, tais que

a < b.

I. Intervalo Fechado de extremos **a** e **b**: [a, b] = $\{x \in R / a \leq x \leq b\}$

II. Intervalo aberto de extremos **a** e **b**:] a, b[= (a, b) =$\{x \in R / x \leq a \ ou \ x \geq b\}$

III. Intervalos semiabertos de extremos **a** e **b**: [a, b[= [a, b) = $\{x \in R / a \leq x < b\}$

(a, b] =] a, b] = $\{x \in R / a < x \leq b\}$

IV. Semirretas:

[a, +∞) = [a, +∞[= $\{x \in R / x \geq a\}$

] a, +∞ [= (a, +∞) = $\{x \in R / x > a\}$

] - ∞, b] = (-∞, b] = $\{x \in R / x \leq b\}$

] - ∞, b[= (-∞, b) =$\{x \in R / x < b\}$

V. Reta:

] - ∞, +∞ [= (-∞, +∞) = R

3. PERCURSO METODOLÓGICO

Segundo (CEZAR, 2013, p.2), a ideia de número existe independentemente de estarmos na escola. No entanto, é na escola que a criança inicia o processo de formalização e é nesse momento que o professor de Matemática tem a grande tarefa de orientar o aluno para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números reais de forma adequada, a fim de possibilitar uma aprendizagem significativa.

3.1 Trajetórias da Pesquisa

Tendo como base o pressuposto anterior, realizamos uma pesquisa de campo com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Teresina – Piauí, na intenção de verificar se os estudantes do último ano da Educação Básica apresentam os conhecimentos de conjuntos numéricos considerados essenciais para dar continuidade à aprendizagem de Matemática sem muitas deficiências, visto que, os conjuntos numéricos são um dos pré-requisitos chave para o bom entendimento dos conteúdos da matemática.

Para concretização da pesquisa, visitamos uma escola pública municipal, em Teresina Piauí, para formalização da solicitação da pesquisa junto à direção, no momento apresentamos o projeto de trabalho, primeiro para a direção da escola e em seguida para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio do turno noturno. Como os alunos em sua maioria, eram pessoas que já tinham maioridade, com faixa etária entre 17 a 28 anos, estabelecemos um diálogo com o objetivo de sensibilizá-los a participarem da pesquisa. Convite aceito demos prosseguimento as atividades planejadas.

Vale ressaltar a pesquisa foi realizada em três momentos: No primeiro momento, foi apresentado um breve contexto histórico e algumas explicações sobre particularidades de cada conjunto numérico. O assunto explanado abordava somente o conceito e seus tópicos básicos, a fim de mostrar a necessidade do estudo dos conjuntos numéricos.

No segundo momento, foi aplicado o questionário de pesquisa que continha dez questões. Após a distribuição o pesquisador resolveu uma questão, no quadro, explicando e mostrando dicas que ajudariam na resolução das outras. Na sequência os alunos puderam responder as nove questões da maneira que sabiam. Os questionários foram recolhidos e corrigidos, os acertos e erros foram tabulados e analisados a luz do referencial teórico.

No encontro seguinte (terceiro momento), entregamos a resolução impressa do questionário e os questionários corrigidos. Em seguida solicitamos que comparassem as duas respostas, a fim de identificarem possíveis dúvidas e avaliassem o próprio desenvolvimento, muitos questionamentos surgiram e, na medida do possível, foram esclarecidos. Solicitamos ainda, que os alunos escolhessem cinco questões para serem respondidas e explicadas.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que "[...] a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático" (BRASIL, 1999, p. 41). Na intenção de verificar se os alunos do terceiro ano do Ensino Médio construíram conhecimentos necessários sobre os conjuntos numéricos, ou se consolidaram e/ou aprofundaram as ideias essenciais (conceitos) sobre os conjuntos estudados no ensino Fundamental e Médio, conforme orienta a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias.

> [...] propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018).

Neste sentido as respostas dos alunos, coletadas mediante atividade aplicada em sala de aula, foram analisadas. Vale destacar, que mesmo os alunos tendo assumido o compromisso de contribuírem com a pesquisa, não foi o que ocorreu, visto que, no momento da aplicação da atividade, somente 22 alunos se encontravam em sala de um total de 38 que frequentam as aulas regularmente.

Dos que se encontrava em sala quatro alunos se recusaram a resolver a atividade depois de verificarem as questões, sete alunos zeraram ou deixaram em branco toda a lista, 11 conseguiram resolver menos de 5 questões, nenhum aluno conseguiu responder mais de 5 questões. Confirmando a tese de Ponte (2006, p. 8), ao afirmar "[...] muitos alunos têm grandes dificuldades nos Números e suas operações. Outros, [...], conseguem um nível de desempenho razoável neste campo, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na aprendizagem da Álgebra".

Fundamentado na concepção de Ponte (2006), cada resposta foi analisada, e permitiu concluir que muitos alunos não conseguiram absorver os conhecimentos necessários na sua vida escolar para responder as questões, ou não se deram a oportunidade de tentar, alegando que as questões eram complicadas e difíceis de serem entendidas por isso nem tentaram.

Como o índice de questões respondidas por aluno não ultrapassou os 50%, foi entregue a cada participante da atividade uma lista impressa contendo todas as respostas. Dando continuidade as ações propostas, solicitamos que os alunos escolhessem cinco questões das que tiveram mais dúvidas para verificarem seus erros, estabelecendo comparação com as respostas recebidas. Depois de alguns minutos, solicitamos que escolhessem cinco questões para respondermos no quadro, e discutir as possibilidades de resolução, uma forma de reavivarem os conhecimentos que poderiam estar adormecidos e/ou construir alguns conhecimentos novos relativos aos conjuntos trabalhados. As questões indicadas foram as de números dois (2), três (3), seis (6), sete (7) e nove (9).

Ao iniciar a resolução os alunos comentavam incrédulos que não era possível, e exclamavam "que coisa fácil, era só lê". Como cada questão pedia uma avaliação quanto os níveis de dificuldades e que, quase todas as questões tinham sido consideradas com um nível muito difícil, independente de terem sido respondidas ou não. Os resultados comprovaram que os estudantes não assimilaram os conteúdos nos anos escolares precedentes, contudo, imediatamente a entrega das folhas de respostas os alunos verificaram que esses assuntos (conteúdos) foram vistos nos anos anteriores.

Verificamos ainda, mediante conversas com os alunos, certa frustração/decepção dos que não tentaram, pois, os resultados apontam pouco ou nenhum aprendizado dos conhecimentos abordados na investigação. As lacunas de conhecimento podem ter várias causas, uma apontada na pesquisa de Silva (2011) pode estar relacionada à abordagem didática dos professores da Educação Básica, conforme destaca, "[...] é importante que o professor tenha acesso a abordagens adequadas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, tomando certos cuidados didático para desenvolver um bom trabalho com os Números Reais" (SILVA, 2011, p. 286).

Ponte (2006), também evidencia aspectos que podem dificultar a aprendizagem dos Conjuntos Numéricos. "[...] alunos que terminam o Ensino Fundamental sem compreender ou utilizar adequadamente os algoritmos das operações, sobretudo da divisão", outros aspectos apontados por Ponte (2006) referem-se às dificuldades de representação e interpretação dos diversos números reais. Mesmo aqueles que dominam os algoritmos, não sabem ler os números ou separar os algarismos em classes e comumente confundem vírgula e o ponto, quando utilizam ou não algum recurso tecnológico para a realização de cálculos com números grandes ou pequenos.

É de fundamental importância que os alunos compreendam os Números Reais. O domínio destes conjuntos pode servir de base para estudos mais profundos feitos mais adiante, pois aquele que não tiver capacidade mínima para trabalhar com números e suas operações, fica seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, foram trabalhadas as construções formais dos conjuntos numéricos estudados desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio, partindo do conjunto dos números naturais até o conjunto dos números complexos. Também pudemos vivenciar as propriedades, dicas e exemplos de cada um desses conjuntos, bem como, verificar após análise em livros e fontes diversificadas, que não existe a preocupação de muitos autores em repassar ao leitor um contexto histórico desses conjuntos numéricos e nem mesmo de citar os abusos de notação que após as imersões de um conjunto no outro.

É fato, que desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, quando é apresentada a ideia de conjuntos, podemos verificar que este conteúdo vem perdendo espaço nos livros didáticos, com o presente trabalho foi possível observar o distanciamento existente entre a matemática apresentada em sala de aula e aquela mais exigida no dia a dia. Observou-se também, que alguns alunos na iminência de conclusão do Ensino Médio, viram estes conteúdos de uma forma superficial. No entanto, quando se trata da percepção dos alunos que não haviam respondido o questionário completo isso foi preocupante, pois o questionário trabalhado fazia parte do dia a dia de um ser humano.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base nacional comum curricular**: educação infantil e ensino fundamental. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em 14 dez. 2018.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DA SILVA, Benedito Antônio; PENTEADO, Cristina Berndt. Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.11, n.2, pp.351-371, 2009. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/1860/1808.

GALDINO, André Luis. **Análise:** uma introdução. Ouvidor, 2011. UFG – Campus Catalão.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **As origens da matemática**: dos processos de contagem aos sistemas de numeração. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2014. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao(Texto%20MariaElisa).pdf>.

GIRALDO, Victor. **Livro Companheiro do Professor de Matemática** – Números. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula, V.I).

HEFEZ, Abromo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT, x).

IFRAH. Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo. **A introdução à análise real**. Campina Grande: EDUEPB, 2005.

PONTE, João Pedro. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; BARBOSA, Ana; FONSECA, Lina; SANTOS, Leonor; CANAVARRO, Paula (Org.). **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 5-27. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf. Acessado em: março/2019.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**: números inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

CAPÍTULO 9

CÁLCULO DE ÁREAS: uma abordagem através do geogebra no ensino médio

Vilson Morais de Sousa[1]

Sandra Imaculada Moreira Neto[2]

1 Mestre em Matemática (PROFMAT-UEMA), Instituto Federal do Maranhão, vilson.sousa@ifma.edu.br
2 Doutora em Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, ymaculada@gmail.com

RESUMO

A dificuldade na interpretação de ideias geométricas, muitas vezes tratadas de maneira abstrata e sem uma boa representação gráfica, pode gerar um aprendizado limitado. Partindo da hipótese de que o uso da tecnologia em sala de aula pode ser um grande aliado para superar tais dificuldades, este trabalho apresenta uma proposta de abordagem de alguns tópicos do cálculo de áreas, por meio de atividades desenvolvidas através do *software* Geogebra. A proposta aborda conceitos que vão desde a noção intuitiva de área, passando pela área do triângulo, até o cálculo da área do círculo utilizando a noção do método de exaustão. Como forma de validar a proposta foi realizado um minicurso com um grupo de 30 estudantes da primeira série do ensino médio, para o grupo foram apresentados conceitos e atividades, por meio de um estudo dirigido com foco em atividades dinâmicas e interativas.

Palavras-chave: Área. Geometria. Dinâmica. Geogebra. Plana.

1. INTRODUÇÃO

Vivemos em tempos de difusão tecnológica em massa, há cada vez mais tecnologia em residências, na mobilidade urbana, na comunicação, na indústria e na agricultura, a tecnologia pode ser percebida em praticamente todos os lugares e na sala de aula não pode ser diferente, o uso da tecnologia como recurso pedagógico deve ser implantado, testado e aprimorado.

Em contrapartida os resultados da aprendizagem no Brasil, mais especificamente da Matemática, são alarmantes, segundo dados do exame PISA (sigla em inglês para Programa de Avaliação Internacional de Estudantes) realizado em 2018, o Brasil ficou na 70º posição de um total de 79 países participantes, o que mostra a urgência em repensar as práticas de ensino.

Há necessidades óbvias de mais investimento governamental, mas, há também que ocorrer mudanças no processo de ensino-aprendizagem, devem-se buscar novos métodos e propostas, que unam a tecnologia disponível e metodologias inovadoras.

Na tentativa de mesclar a disseminação da tecnologia com os desafios da aprendizagem, buscamos saber se a aprendizagem da Matemática, e em especial do cálculo de áreas, é mais significativa quando se utiliza recursos computacionais como o *software* Geogebra. Neste texto serão apresentadas algumas aplicações do *software* no ensino do cálculo de áreas, desenvolvendo e testando atividades de caráter complementar, bem como investigando os efeitos de seu uso, na visão de um grupo de 30 estudantes participantes de uma oficina/minicurso, atividades detalhadas no texto.

Este trabalho se apoiana necessidade de aliar a realidade da difusão tecnológica que ocorre na sociedade ao ensino da Matemática, trazer para o ambiente da sala de aula novos recursos como o Geogebra.

Vale observar que o presente texto representa um resumo da dissertação de mestrado de mesmo título defendida e aprovada em 17 de abril 2018.

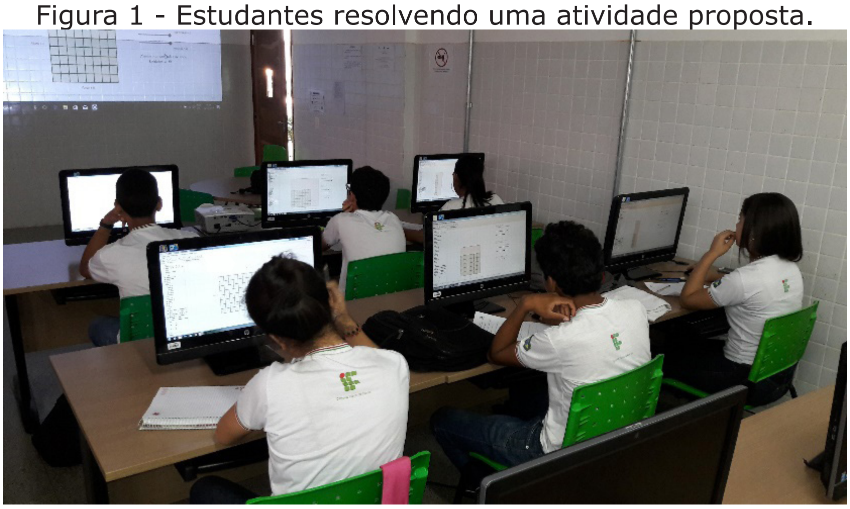
2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A obtenção dos dados da pesquisa deu-se através de algumas atividades realizadas fazendo uso do software Geogebra. Elas abordaram de maneira intuitiva e dinâmica deduções de fórmulas para o cálculo de áreas de algumas figuras planas, partindo de conhecimentos básicos como o da unidade de área e alcançando até noção intuitiva de limite para a obtenção da área do círculo.

Como forma de validar qualitativamente as atividades propostas, foi realizado um minicurso com duração de 16 h/a, nos dias 07, 14, 21 e 28 de outubro de 2017, com um grupo composto por 30 estudantes dos cursos técnicos integrados de nível médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – Campus Barra do Corda (IFMA - Barra do Corda). Foram convidados estudantes da 1ª série do ensino médio, matriculados nos cursos integrados de Química e Informática.

Inicialmente foi apresentado ao grupo o *software* Geogebra, destacando-se suas principais ferramentas, características e funções. Posteriormente foram desenvolvidas, na forma de tutorial, atividades de familiarização, de modo a facilitar a compreensão dos princípios básicos de funcionamento do software.

Figura 1 - Estudantes resolvendo uma atividade proposta.



FONTE: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Aos estudantes participantes da pesquisa foram aplicados dois questionários.

O primeiro questionário foi aplicado antes do início do minicurso e da apresentação do Geogebra, onde buscou-se fazer um panorama da utilização de recursos computacionais durante a vida estudantil dos participantes.

O segundo questionário foi aplicado após a realização do minicurso, a fim verificar a receptividade das atividades, bem como se o uso software Geogebra influenciou positivamente no processo de ensino-aprendizagem do cálculo de áreas.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As dificuldades de aprendizagem estão aí, presentes no cotidiano escolar, às referentes à Matemática provavelmente são as mais comuns. Isso se dá, muitas vezes, em virtude da forma como a Matemática é apresentada aos estudantes. A abordagem demasiadamente teórica, sem aplicações palpáveis, sem uma explicação gráfica adequada e intuitiva pode fazer com que ela seja vista como uma disciplina enfadonha e sem sentido.

> A cada ano, a sensação de incongruência, de distanciamento entre a educação desejada e a real aumenta. A sociedade evolui mais do que a escola e, sem mudanças profundas, consistentes e constantes, não avançaremos rapidamente como nação. Não basta colocar os alunos na escola. Temos de oferecer-lhes uma educação instigadora, estimulante, provocativa, dinâmica, ativa desde o começo e em todos os níveis de ensino. Milhões de alunos estão submetidos a modelos engessados, padronizados, repetitivos, monótonos, previsíveis, asfixiantes (MORAN, 2012, p. 8)

Em sala de aula, o professor encontra as mais diversificadas situações, entre os principais problemas está o descontentamento dos alunos para com a escola, a desmotivação e a falta de significado no que está sendo estudado.

> Entramos no século XXI ainda com um modelo predominantemente de professor focado em conteúdo e currículo, num processo engessado e estático. No entanto, este papel deve ser dinâmico e de superação constante, precisando, portanto, modificar-se. As tecnologias de informação e comunicação provocam uma vertiginosa necessidade de superação constante do saber, de modo que devemos buscar novos caminhos de abertura e fluência do conhecimento para encontramos pontos de equilíbrio dinâmicos tanto para alunos como para professores (GABRIEL, 2013, p. 110).

Uma das alternativas de mudança na educação atual é introduzir o uso das tecnologias na escola. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 43) “As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas”. O uso da tecnologia em sala de aula pode ser um forte incremento no processo de ensino-aprendizagem, já que seu uso possibilita ao professor e ao aluno uma nova forma de analisar e resolver problemas.

> [...]Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 1997, p. 43-44).

A escola deve se adaptar, ser melhorada, ser de fato um local que desperte no aluno a vontade de buscar o conhecimento, a curiosidade e para isso devemos usar todos os meios disponíveis, como jogos, materiais manipuláveis e principalmente a informática.

As informações e o conhecimento na atualidade circulam de maneira muito mais dinâmica, para Gabriel (2013), a troca de conteúdos e informações foi modificada após o surgimento da era digital.

Tabela 1 - Troca de conteúdos e informações antes e durante a era digital

Antes da era digital	Conteúdo/informação →Professores (filtro) →Alunos
Na era digital	Conteúdo/informação →Professores e alunos

Fonte: GABRIEL, 2013.

Como mostra a Tabela 1, antes do surgimento da era digital o professor era detentor de todo o conteúdo/informação e funcionava como um filtro, pois ele selecionava as informações até então importantes e posteriormente a lecionava para seus alunos. Já na era digital o professor e o aluno recebem simultaneamente uma grande quantidade de conteúdo e o professor com isso perde o título de detentor único do saber, professor e aluno devem trabalhar juntos.

Entramos no século XXI ainda com um modelo predominantemente de professor focado em conteúdo e currículo, num processo engessado e estático. No entanto, este papel deve ser dinâmico e de superação constante, precisando, portanto, modificar-se. As tecnologias de informação e comunicação provocam uma vertiginosa necessidade de superação constante do saber, de modo que devemos buscar novos caminhos de abertura e fluência do conhecimento para encontramos pontos de equilíbrio dinâmicos tanto para alunos como para professores (GABRIEL, 2013, p. 110).

É possível mesmo com poucos recursos, construir atividades que deem um novo significado ao aprendizado de conceitos e aplicações, e que junto a isso, facilitem a aprendizagem do aluno e ao mesmo tempo faça com que o professor consiga aprofundar conceitos. Uma figura antes estática e muitas vezes mal representada graficamente, agora pode ser representada e manipulada dinamicamente através de um software. O aluno pode fazer verificações, resolver problemas, testar teoremas, há uma infinidade de possibilidades, tudo de maneira dinâmica.

A informática é importante para a aprendizagem da Matemática, não se excluí a relevância de outras ferramentas ou métodos. A informática surge como uma alternativa complementar para o ensino-aprendizagem. Não se pode adotar a ideia de que uma única metodologia de ensino seja suficiente, para Borba e Penteado (2012) a informática não irá terminar com a escrita ou com a oralidade, nem a simulação acabará com a demonstração em Matemática.

Nossa mente as vezes precisa de um auxílio, pois, muitos problemas da Matemática não podem ser resolvidos totalmente de forma mental, é necessário utilizar ferramentas para registrar, calcular, simular etc. O auxílio de uma ferramenta por mais simples que ela seja, contribui na realização de cálculos e na organização de ideias.

> [...] a própria mídia lápis e papel estava presente em toda nossa educação e que não obrigávamos a criança a utilizar apenas a oralidade para lidar com todos os conteúdos da escola.[...] (LEVY apud BORBA e PENTEADO, 2012, p.47).

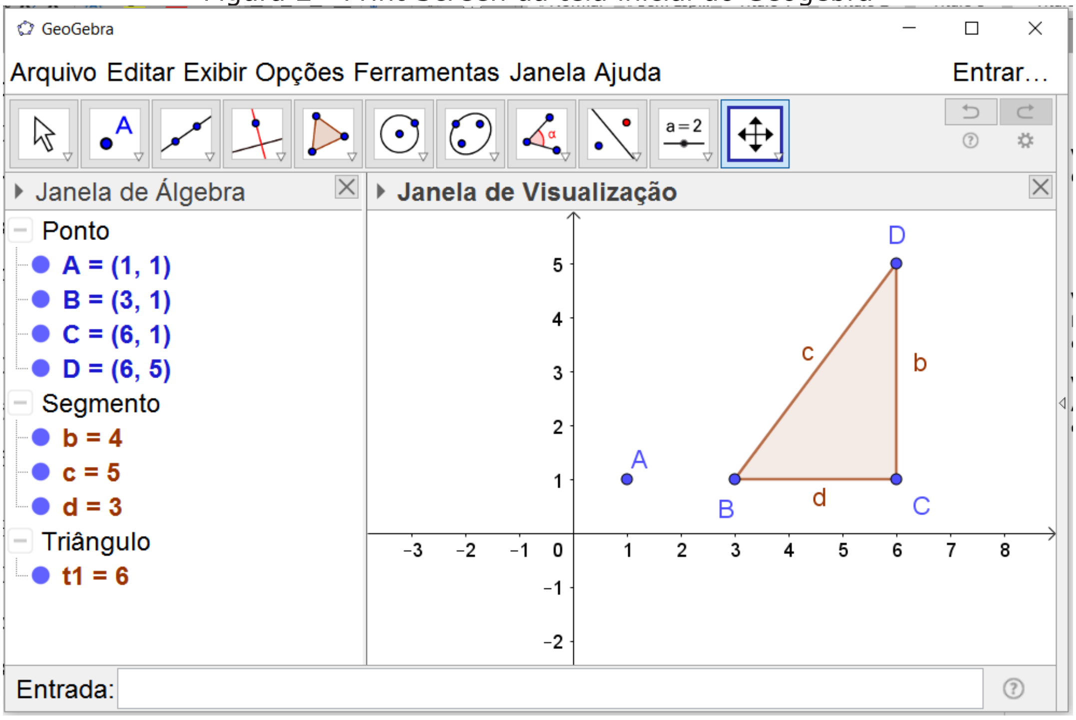
Um software de grande utilidade para tal é o Geogebra, ele é uma ferramenta auxiliar que pode facilitar e significar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Trata-se de um software de Matemática dinâmica que possui recursos que relacionam elementos de Geometria e Álgebra, segundo o site oficialdo Geogebra[1], o *software* apresenta recursos que vão desde calculadora gráfica para funções, passando por elementos de geometria, álgebra, cálculo, estatística e elementos gráficos em 3D.

Segundo o Instituto Geogebra São Paulo, o Geogebra é um *software* livre, distribuído sob uma licença GPL (*General Public License*), ele foi criado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria, no ano de 2001, como sua tese de doutorado. A popularidade do software vem aumentando significativamente nos últimos anos, ele já foi traduzido para mais de 60 idiomas, incluindo o português do Brasil.

Há disponível versões do Geogebra para computadores com *Windows*, *MACOS*, *Linux* e *ChromeOS*, versão online disponível para navegadoresde internet, versões mobile para*smartphones* e*tablets* com *Android* e *iOS*, a disponibilidade para diversos sistemas operacionais e dispositivos proporciona uma excelente difusão do software.

1 O software GeoGebra está disponível para download em <https://www.geogebra.org>. Outros materiaise manuais também estão disponíveis.

Figura 2 - Print Screen da tela inicial do Geogebra

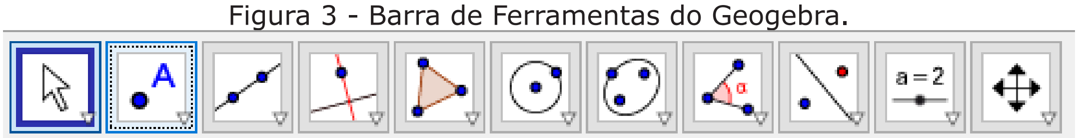


Fonte: Próprio autor.

A entrada de dados no Geogebra pode ocorrer de duas formas, uma ocorre de maneira bem intuitiva a partir do uso de ferramentas e a outra forma é a através da escrita de comandos.

Barra de ferramentas: As ferramentas presentes no Geogebra facilitam a introdução de informações, pois apresentam ícones intuitivos e organizados em blocos de semelhança. A inserção de dados ocorre em dois passos básicos, primeiro seleciona-se a ferramenta e depois clica-se sobre a Janela de Visualização para utilizá-la.

Figura 3 - Barra de Ferramentas do Geogebra.



Fonte: Próprio autor.

Campo de entrada: Permite a entrada de comandos por meio de texto. Algumas funções do Geogebra só podem ser ativadas por meio de comandos.

Basicamente qualquer uma das ferramentas da Barra de Ferramentas pode ter sua função ativada por meio de comandos.

Figura 4 - Campo de Entrada do Geogebra.

Fonte: Próprio autor.

Janela de Visualização: É onde os objetos criados têm sua representação gráfica. Por exemplo, na Figura 1, a Janela de Visualização apresenta graficamente o ponto A e o triângulo BCD, com lados b, c e d.

Janela de Álgebra: Nela os objetos criados têm sua representação algébrica. Por exemplo, na Figura 1, a Janela de Álgebra apresenta o ponto A, B, C e D por meio de suas coordenadas cartesianas, os lados (segmentos) b, c e d do triângulo são representados por seus comprimentos e o triângulo BCD é representado por sua área (denotado por $t_1 = 6$).

Para melhor exemplificar, um ponto, por exemplo $A(1, 1)$, pode ser criado de dois modos, o primeiro é selecionando a ferramenta Ponto e clicando sobre a janela de visualização exatamente na posição de coordenadas cartesianas $(1,1)$. O outro modo é por meio de comandos, para isso basta digitar no Campo de Entrada $A = (1,1)$. Ambas as formas geram exatamente o mesmo resultado, tanto a representação gráfica quanto a algébrica.

Uma das grandes vantagens em se utilizar o Geogebra é a dinamicidade de suas construções, pois mesmo após definir um objeto ele poderá ser modificado dinamicamente alterando suas características.

Se deseja conhecer mais a respeito da usabilidade e potencialidades do *software* Geogebra deixamos recomendado aqui, como sugestão, o link para o site do projeto Geogebra (disponível em: <https://oGeogebra.com.br/site/apresentacao.php>, acesso em 20 de outubro de 2020), que é um projeto de colaboração de vários professores brasileiros, lá você encontra minicursos e outras informações valiosas.

Nada adianta manipular o Geogebra sem conhecer os fundamentos matemáticos que justifiquem tais procedimentos. Para as construções geométricas usaremos 4 axiomas da geometria plana, que são aceitos sem demonstração, são eles:

> Axioma 1: A toda região poligonal corresponde um número maior que zero. Axioma 2: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões. Axioma 3: Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes tem áreas iguais. Axioma 4: se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto: $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$. (BARBOSA, 2012, p. 120).

Determinar a área de polígonos de modo geral não é uma tarefa complicada, mas ao se deparar com figuras planas de fronteiras não retilíneas como o círculo ou outra figura qualquer, o problema muda de forma.

Para se chegar a uma boa aproximação de uma área não poligonal podemos recorrer ao método de exaustão de Eudoxo (c. 408-355 a.C), que é usado para obter a área de uma figura não convencional, consiste basicamente de aproximar a área de um polígono com um número razoável de lados da área procurada, podendo ser escolhido polígonos cujas áreas se aproximem cada vez mais da área em questão, tanto por falta como por excesso, ou seja, um polígono inscrito e outro circunscrito respectivamente, possibilitando que a diferença entre as áreas dos polígonos se tornem tão pequenas quanto de deseje, determinando assim a uma boa aproximação para a área procurada. O método de exaustão trouxe para a matemática novas possibilidades e contribuiu para o que mais tarde seria base para a geometria analítica e o cálculo.

> A grande contribuição de Eudoxo para o desenvolvimento da matemática – que poder considerada o primeiro passo no caminho que conduziria à teoria do cálculo diferencial e integral – esteve no cálculo do comprimentos, áreas e volumes de figuras curvilíneas, através do seu método de exaustão. A ideia de calcular medidas de figuras definidas por curvas usando polígonos inscritos com um grande número de lados já existia. No entanto, foi Eudoxo quem forneceu as ferramentas técnicas para executar esse tipo de procedimento de maneira rigorosa. (MOL, 2013, p. 40).

O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419)

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

O propósito do primeiro questionário foi investigar se durante a vida estudantil, considerando apenas até o 9º ano do Ensino Fundamental, os estudantes tiveram algum contato com recursos computacionais na escola e como esses recursos foram utilizados.

Acerca da existência de laboratórios de informática em suas antigas escolas 70% dos estudantes afirmaram que sim, havia laboratório de informática, entretanto, destes, 76,2% afirmaram que o laboratório era pouco ou nada utilizado. O que mostrou que mesmo tendo um certo avanço no sentido da informatização das escolas a utilização dos recursos disponíveis é ainda limitada.

Segue algumas das respostas dadas pelos estudantes, que por motivo de privacidade serão nomeados apenas com um número.

> *"Nunca foi usado pelos alunos." (Estudante 1)*
>
> *"Tinha laboratório, mas a gente não usava." (Estudante 2)*
>
> *"Tinha laboratório, mas os professores nunca levavam a gente." (Estudante 3)*
>
> *"Eu nunca usei o laboratório da minha antiga escola." (Estudante 4)*

Através de algumas respostas foram notados a subutilização dos recursos disponíveis, além da falta de estrutura de rede e Internet, manutenção e suporte técnico. Conforme os relatos:

> *"Era mais para ver as notas." (Estudante 5)*
>
> *"Fomos poucas vezes, tipo uma vez por mês e os computadores travavam muito." (Estudante 6)*
>
> *"A gente usava o laboratório de informática para mexer no Excel e Word." (Estudante 7)*
>
> *"Não tinha internet e alguns computadores não ligavam." (Estudante 15)*

Ao serem questionados sobre a utilização do laboratório de informática durante as aulas de Matemática, apenas 13,3% afirmaram que já utilizaram, mas a utilização na aula de Matemática relatada foi sobretudo para jogar. No caso, apenas jogos do estilo perguntas e respostas, principalmente sobre as 4 operações básicas. Como relatado por um dos estudantes participantes:

> *"Um jogo do pinguim, em que se errasse as respostas ele era congelado, as contas que apareciam eram básicas, ou seja, eram continhas de subtração, adição, multiplicação e divisão." (Estudante 6)*

Percebeu-se que quando houve a utilização do computador, pelo menos para a disciplina de Matemática, o foco na resolução de exercícios/treino de operações básicas.

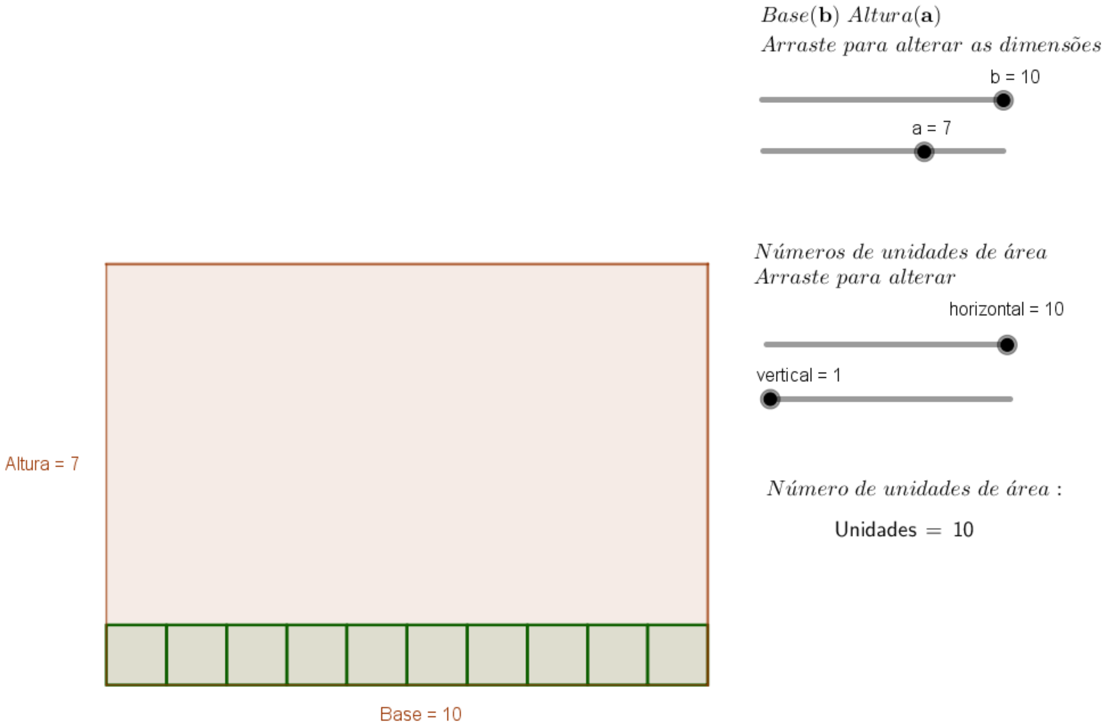
No que se refere ao Geogebra, especificamente, nenhum dos estudantes participantes conhecia previamente o *software*. O que reforçou a necessidade de durante o minicurso serem exploradas atividades de familiarização.

As atividades propostas desenvolvidas através do Geogebra abordam conceitos do cálculo de áreas de maneira dinâmica e intuitiva. Antes da realização de cada atividade foram expostos alguns conceitos sobre o assunto abordado, bem como a explicação do funcionamento da atividade dinâmica. Durante a realização foram aplicadas algumas perguntas direcionadas, que tinham como objetivo nortear e avaliar o desenvolvimento da atividade.

4.1 Atividade Proposta 1: Área do retângulo

Nessa atividade propõe-se uma dinâmica que explore o ato de comparar a unidade de área com a área de um retângulo dado, espera-se que a partir dela o estudante consiga compreender melhor a fórmula que é usada para calcular a área de um retângulo. A atividade está disponível em: <https://www.Geogebra.org/m/c4E6vN54> Acesso em 25 de outubro de 2020.

Figura 5 - Print Screen da atividade proposta 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Através de controles deslizantes podem ser definidos a base (controle deslizante b) e a altura (controle deslizante a) de um retângulo, conforme a Figura 5.

Após definir base e altura pode-se, por exemplo, determinar quantas unidades de área (quadrado verde) cabem horizontal e verticalmente, possibilitando o preenchimento parcial ou completo do retângulo definido.

Por se tratar de uma atividade intuitiva e simples os estudantes não apresentaram dificuldade de compreender a ideia da unidade de área, o entendimento da fórmula da área foi realizado por todos os estudantes.Veja um dos relatos:

> *"Para calcular a área do retângulo basta multiplicar o número de quadrados que cabem na base pelo número de quadrados que cabem na altura, ou seja, basta multiplicar base vezes altura." (Estudante 15)*

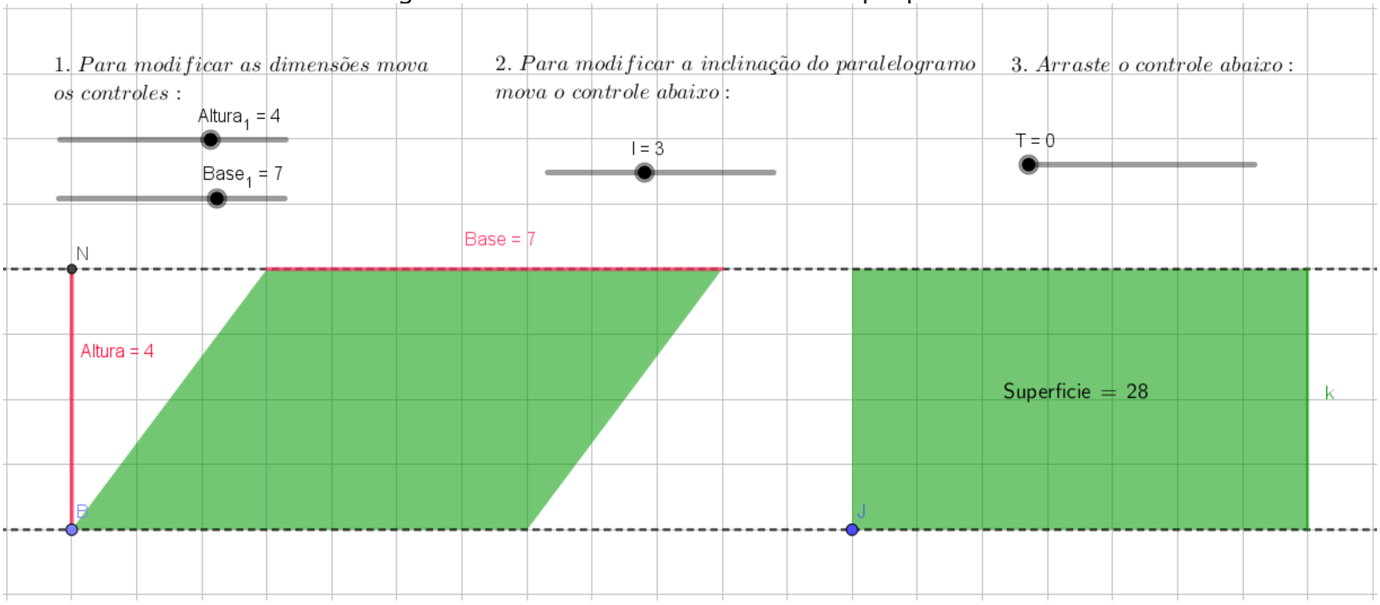
4.2 Atividade Proposta 2: Área do paralelogramo (não retângulo)

Esta atividade explora a relação entre a áreas de um paralelogramo e um retângulo, que tenham a mesma base e mesma altura, espera-se ao final que o estudante perceba que a área das duas figuras é igual. A atividade está disponível em:<https://www.Geogebra.org/m/cf6scphk>. Acesso em 25 de outubro de 2020.

É importante frisar que antes de realizar a atividade foram revisados a definição de paralelogramo e suas propriedades.

Nesta atividade proposta o estudante pode dinamicamente, através de controles deslizantes, determinar as dimensões (base e altura) de um paralelogramo, além de poder aumentar ou diminuir sua inclinação, conforme a Figura 6.

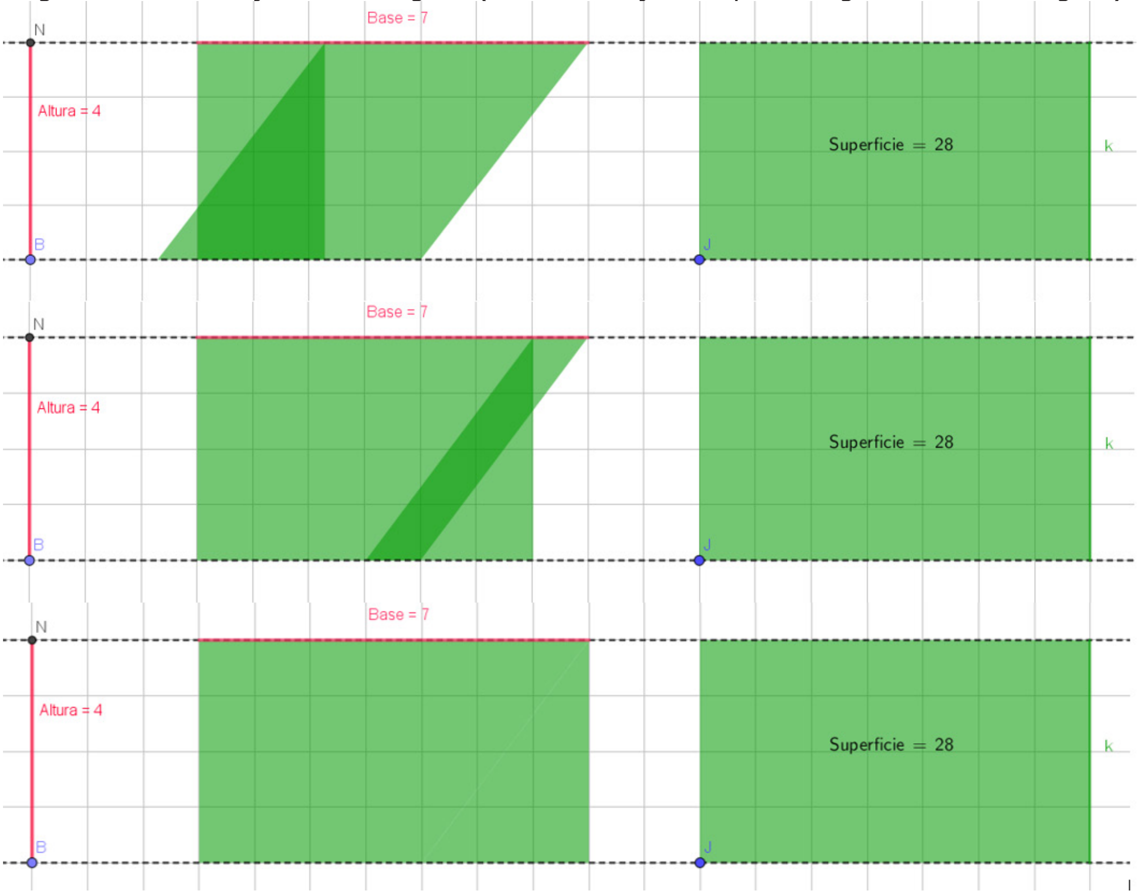
Figura 6 - Print Screen da atividade proposta 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após determinar as dimensões e a inclinação, o estudante poderá através de um quarto controle deslizante efetuar a translação de parte da figura (um triângulo), transformando o paralelogramo em um retângulo, conforme a Figura 7.

Figura 7 - Translação do triângulo (transformação do paralelogramo em retângulo)



Fonte: Elaborado pelo autor.

A dedução da fórmula da área do paralelogramo foi também atingida por todos os estudantes, eles compreenderam que a área do paralelogramo é igual a área do retângulo de mesma base e altura e que modificar a inclinação do paralelogramo não modifica sua área. Veja alguns relatos:

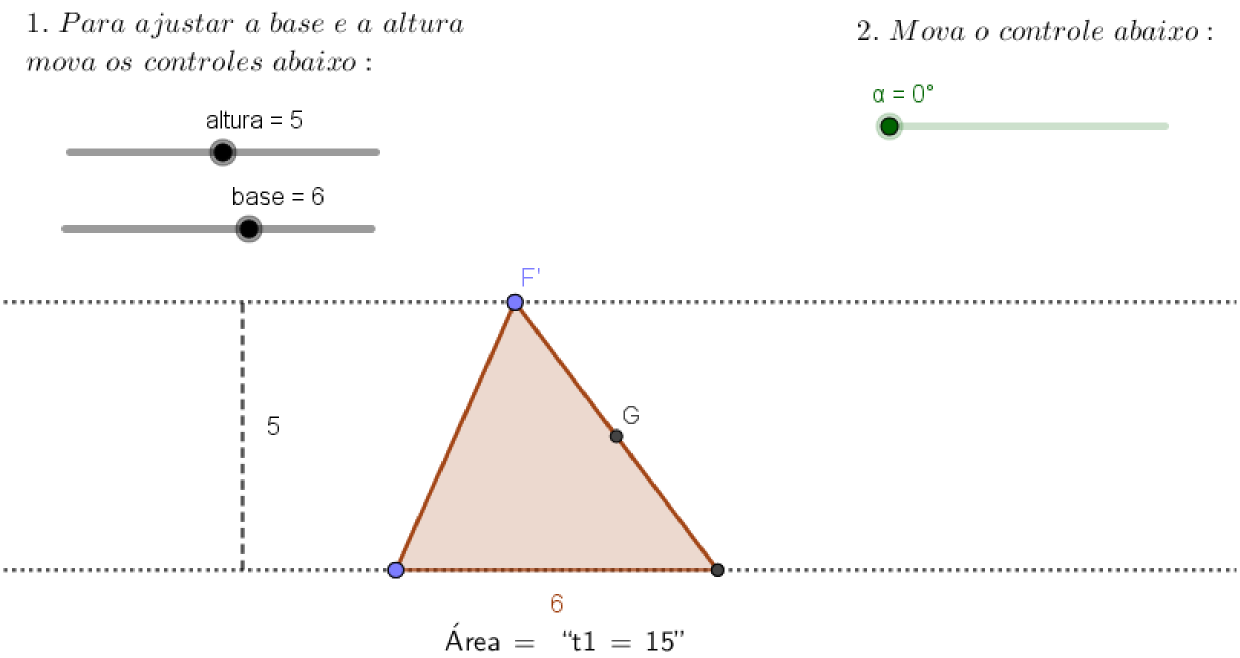
> *"Mudar a inclinação não muda a área do paralelogramo." (Estudante 13)*
>
> *"A área do paralelogramo é igual a área do retângulo, basta multiplicar a base pela altura." (Estudante 15)*

4.3 Atividade Proposta 3: Área do triângulo

Esta atividade tem como principal objetivo mostrar que a área de um triângulo pode ser obtida a partir da área de um paralelogramo, que tenha mesma base e mesma altura. A atividade está disponível em:<https://www.Geogebra.org/m/k7nkyetr> Acesso em 25 de outubro de 2020.

Nessa atividade os estudantes podem modificar a base (b) e a altura (h) de um triângulo por meio de controles deslizantes, além de poder modificar sua inclinação alterando a posição do ponto (F), conforme a Figura 8.

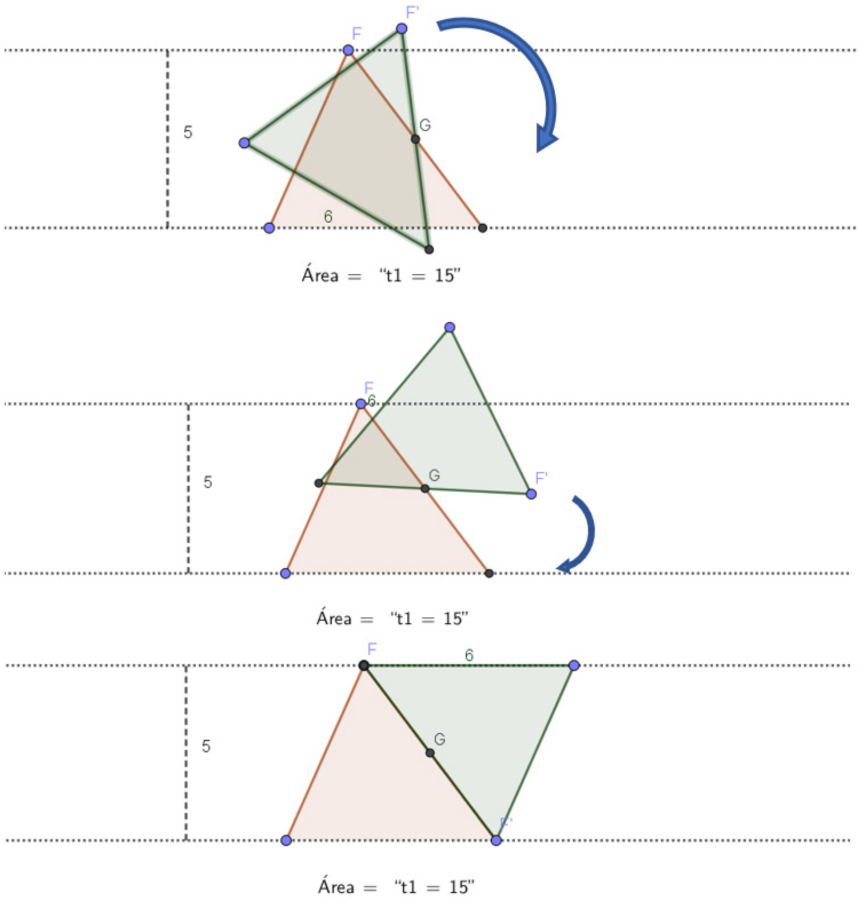
Figura 8 - Print Screen da atividade proposta 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após definir uma base e uma altura os estudantes podem acionar, por meio do controle deslizante α, uma rotação de uma cópia do triângulo em relação ao ponto G que é ponto médio de um dos lados do triângulo. Após efetuar a rotação de $180°$ é possível perceber que a figura formada pela justaposição dos dois triângulos é um paralelogramo, conforme a figura 9.

Figura 9 - Rotação do triângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os estudantes puderam compreender a relação entre a área do triângulo e do paralelogramo de mesma base e altura, conforme relato:

> *"A área do triângulo é metade da área do paralelogramo." (Estudante 22)*
>
> *"A área do triângulo é* $A = \frac{bh}{2}$*." (Estudante 8)*

4.4 Atividade Proposta 4: Área de uma região poligonal

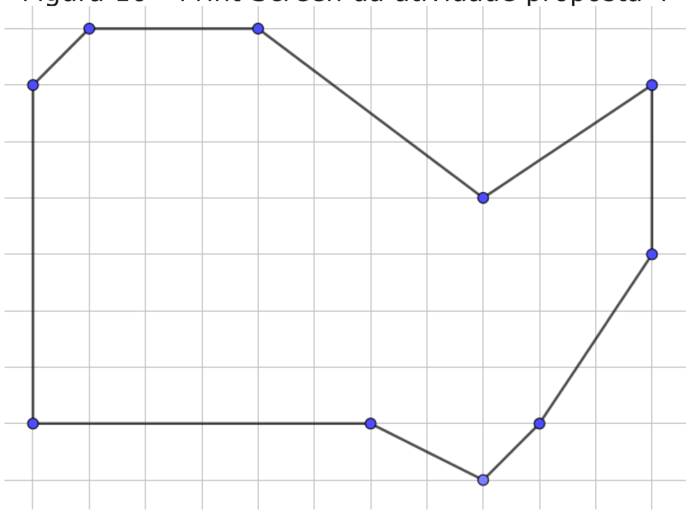
Nesse caso, o objetivo é mostrar que a partir da justaposição de triângulos pode-se determinar a área de um outro polígono, efetuando-se a soma das áreas dos triângulos usados. Uma atividade similar está disponível em:<https://www. Geogebra.org/classic/hjhtfumd> Acesso em 25 de outubro de 2020.

Ao propor esta atividade foi explicado aos estudantes o conceito de região poligonal, tornado claro que para o resultado obtido ser correto não devem existir pontos internos ao polígono que não pertençam a um dos triângulos e que os triângulos não devem ter pontos em comum.

A atividade consiste em utilizando apenas a ferramenta polígono, construindo apenas triângulos, determinar a área da região poligonal, representada na Figura

10. Vale ressaltar que a malha quadriculada da questão está baseada em quadrados de lado 1 u.c. (unidades de comprimento).

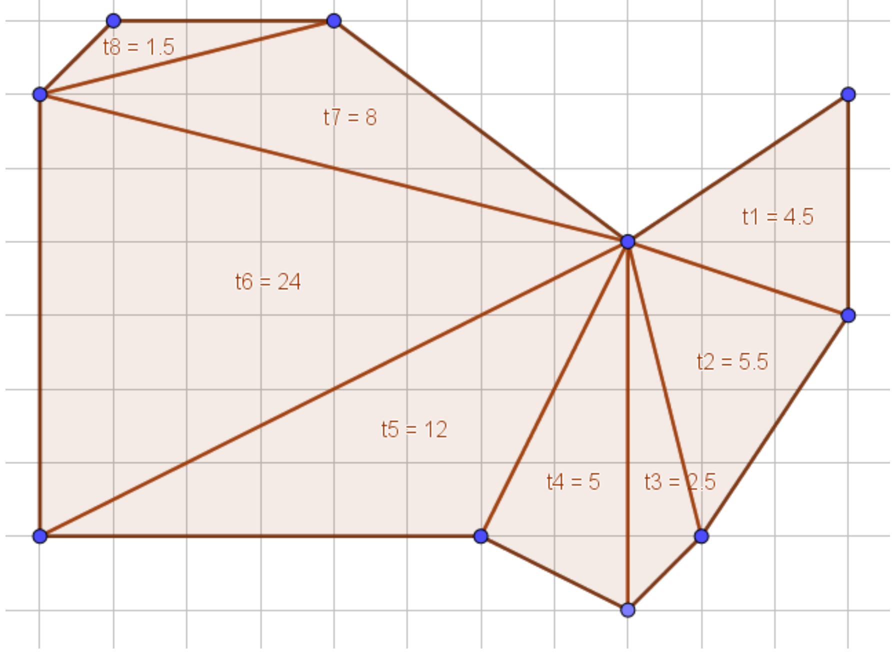
Figura 10 - Print Screen da atividade proposta 4



Fonte: Elaborado pelo autor.

A atividade foi considera simples por grande parte dos estudantes, que apresentaram a resposta correta, mudando apenas a ordem e a posição dos triângulos construídos por cada um deles. Na Figura 11 pode-se observar o registro da atividade realizada por um dos estudantes, o mesmo obteve como solução 63 u.a. (unidades de área), sendo resultado da soma das áreas dos 8 triângulos construídos (4,5+5,5+2,5+5+12+24+8+1,5=63), o mesmo resultado foi obtido sem problemas por 80% dos estudantes.

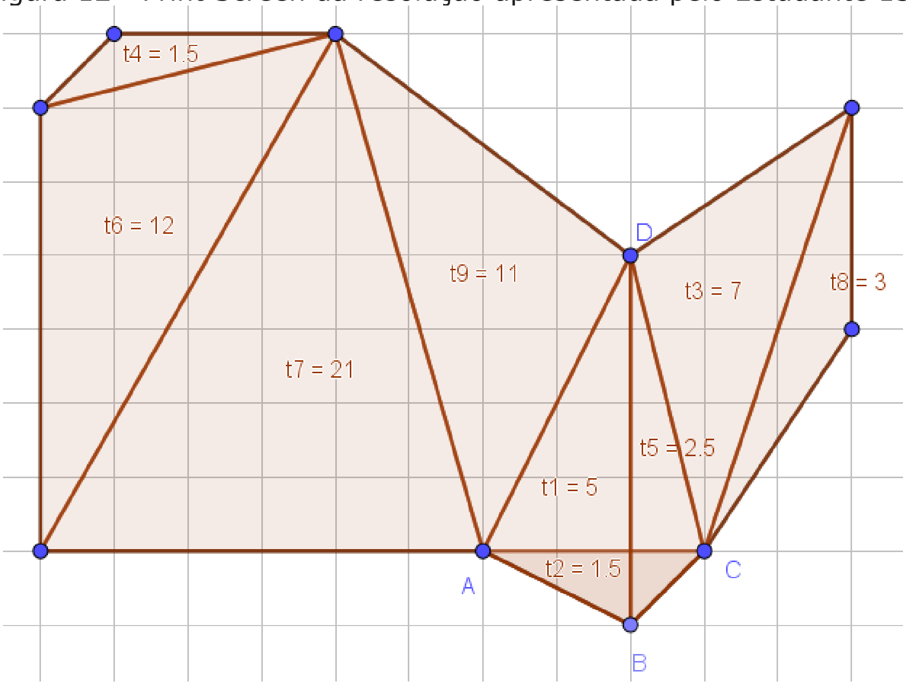
Figura 11 - Print Screen da resolução apresentada pelo Estudante 6



Fonte: Estudante 6 (Adaptado pelo autor).

Inicialmente, 20% dos estudantes apresentaram alguma dificuldade na realização da atividade, a principal foi a construção de triângulos com pontos interiores em comum, conforme a solução apresentada na Figura 12. Nesse caso o estudante obteve 9 triângulos, mas conforme a imagem é possível perceber que os pontos internos do triângulo ABC também são pontos internos dos triângulos ABD e BCD, o que faz com que a área dessa região fosse computada duas vezes, assim a resposta obtida foi 64,5 u.a., o que resulta em 1,5 u.a. a mais que a área correta.

Figura 12 - Print Screen da resolução apresentada pelo Estudante 13.



Fonte: Estudante 13 (Adaptado pelo autor).

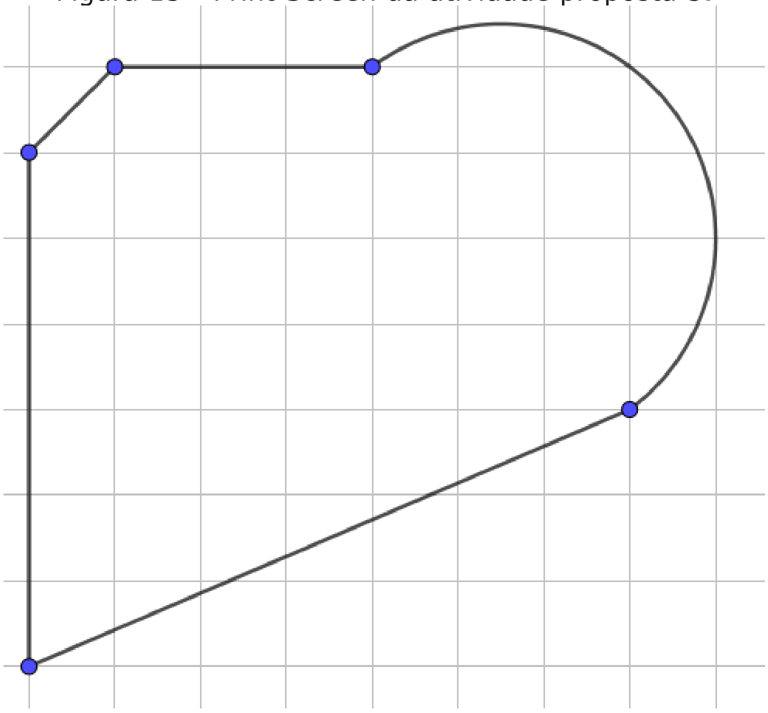
Com o grupo de alunos que apresentou a resposta incorreta foi feito um reforço no conceito de área da região poligonal, explicando a importância de não sobrescrever os triângulos e também no auxílio de operação do Geogebra, para que eles conseguissem completar a atividade, após isso, ao ser proposto um problema similar todos eles conseguiram obter a resposta correta.

4.5 Atividade Proposta 5: Área de uma região não poligonal

Nesta atividade a proposta o objetivo é trabalhar o conceito de aproximação de áreas, já introduzindo noções do método de Exaustão. Assim como na atividade proposta anterior, aqui o estudante deverá por meio da construção de triângulos calcular o valor aproximado da área de uma figura não poligonal. Uma atividade similar está disponível em:<https://www.Geogebra.org/classic/ggzwwn5n> Acesso em 25 de outubro de 2020.

Aos estudantes foi solicitado a área aproximada da região não poligonal representada na Figura 13. A região é delimitada por lados retos e por uma semicircunferência de raio 5 cm, sendo sua área total aproximadamente 41,817 u.a. Para facilitar a obtenção da soma das áreas dos triângulos, o Geogebra foi configurado para apresentar o resultado com 3 casas decimais e foi reforçado que o valor obtido seria apenas uma aproximação da área real.

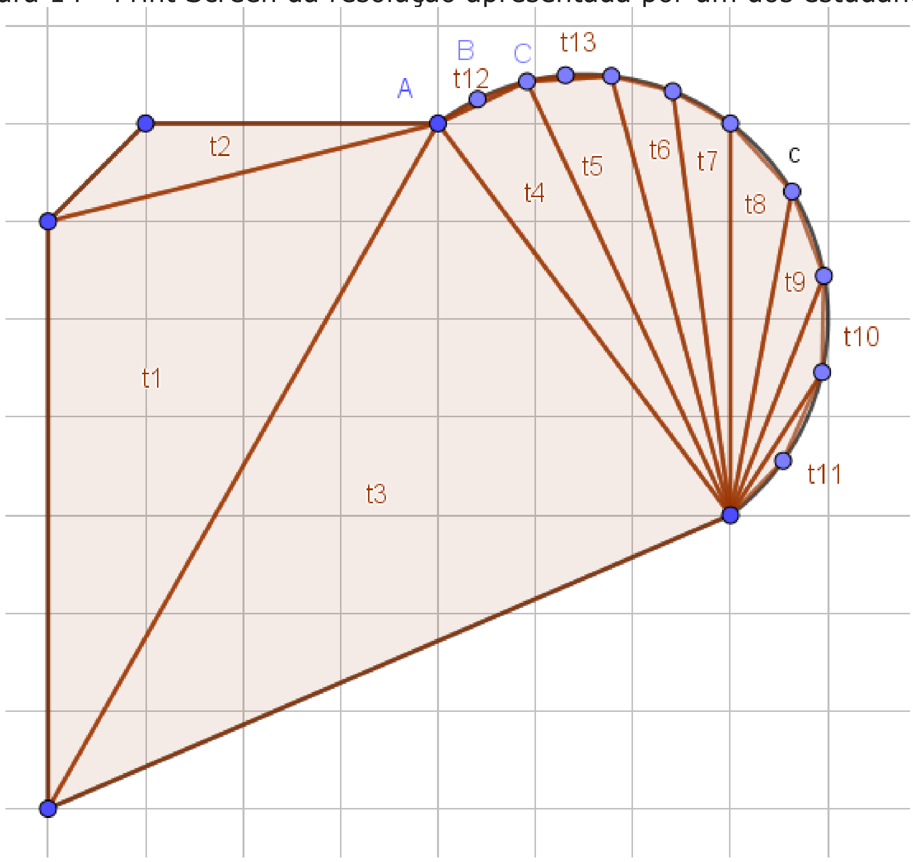
Figura 13 - Print Screen da atividade proposta 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 14 está representado os triângulos construídos por um dos estudantes, neste caso ele utilizou 13 triângulos para obter a aproximação da área e obteve como resultado o valor 41,690 u.a.

Figura 14 - Print Screen da resolução apresentada por um dos estudantes.



Fonte: Estudante 12 (Adaptado pelo autor).

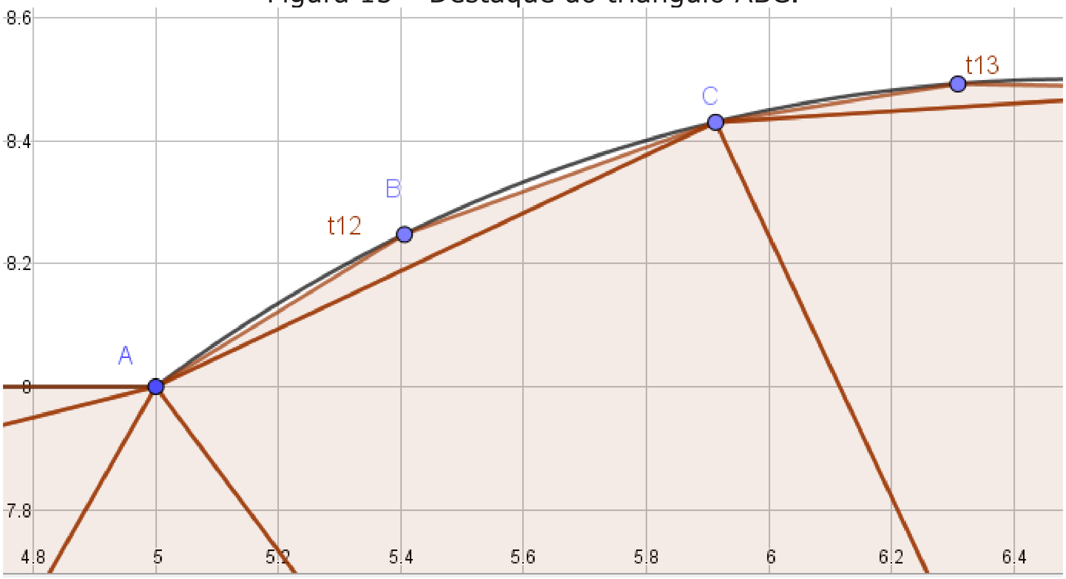
Veja alguns relatos:

> *"Quanto mais triângulos usarmos melhor será a aproximação da área."(Estudante 10)*
>
> *"Criando mais triângulos nas áreas que não foram preenchidas ainda."(Estudante 12)*
>
> *"Para melhorar a aproximação devemos criar mais triângulos."(Estudante 23)*

De fato, o principal objetivo da atividade, compreender que por meio da inclusão de mais triângulos a aproximação da área melhoraria ainda mais foi alcançado.

Conforme a Figura 15 percebe-se que o Estudante 12, criou triângulos em espaços relativamente pequenos, por exemplo o triângulo ABC que foi criado em uma região entre a semicircunferência e um outro triângulo, melhorando a aproximação da área obtida.

Figura 15 – Destaque do triângulo ABC.

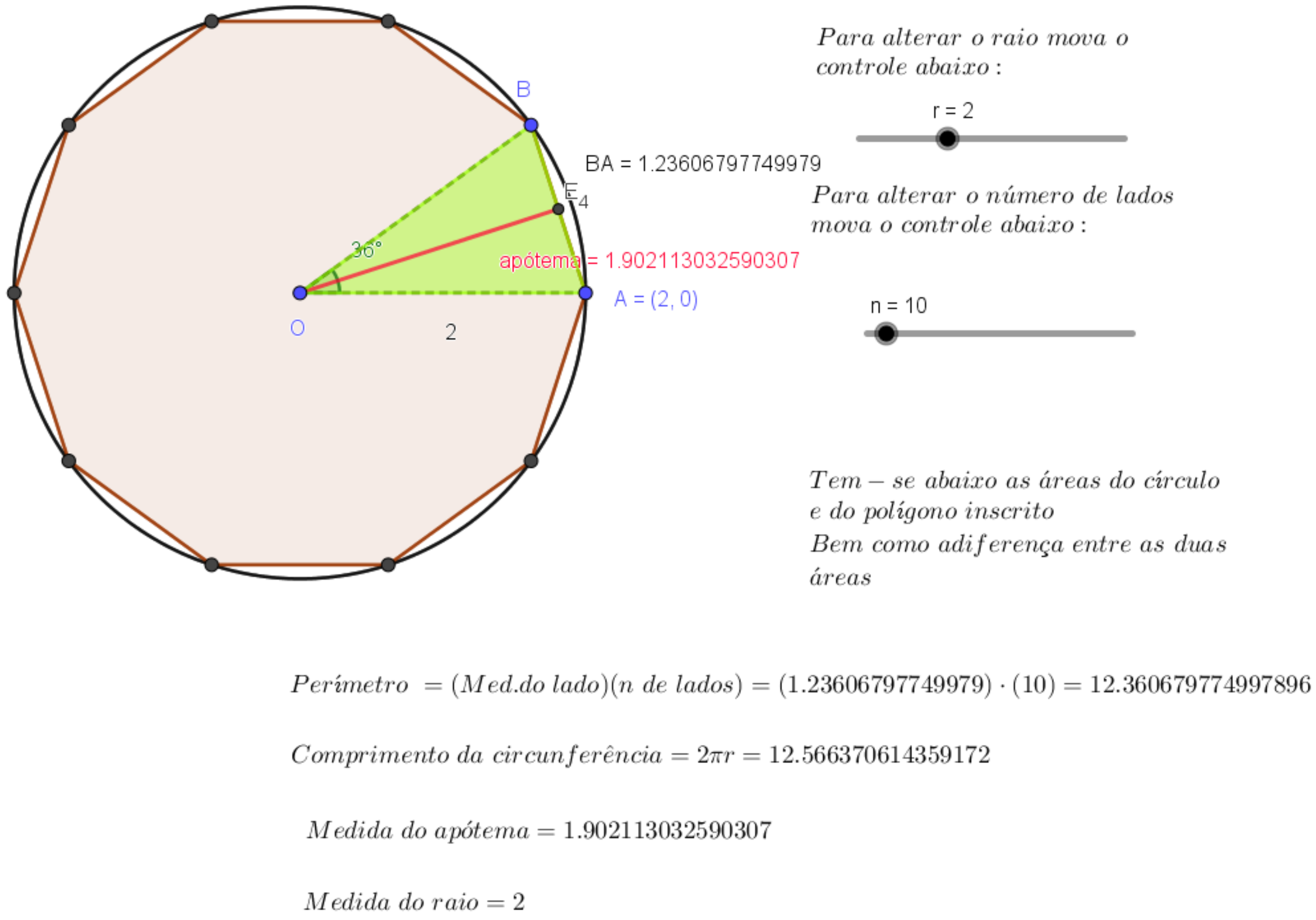


Fonte: Estudante 12 (Adaptado pelo autor).

4.6 Atividade Proposta 6: Descobrindo a área do círculo

Esta atividade tem como principal objetivo auxiliar na dedução, por meio da ideia do método de exaustão, da fórmula usada para se obter a área do círculo. Aqui tem-se um polígono regular inscrito em uma circunferência e através de controles deslizantes os estudantes poderão modificar dinamicamente o número de lados(n) do polígono e o raio(r) da circunferência, poderão acompanhar as medidas do perímetro e do apótema, conforme a Figura 16. A atividade está disponível em:<https://www.Geogebra.org/m/jwradxnc> Acesso em 25 de outubro de 2020.

Figura 16 - Print Screen da Atividade proposta 8 (polígono com 10 lados).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que a atividade efetivamente ajude na dedução da fórmula da área do círculo o estudante deve perceber algumas características dos elementos formadores da figura, que podem ser investigadas por meio de perguntas direcionadas. Vale observar ainda que para que todos os estudantes obtivessem o mesmo resultado foi solicitado, inicialmente, que eles definissem o raio da circunferência como 1 u.c.

Seguem as perguntas direcionadas e alguns das respostas apresentadas pelos estudantes:

Pergunta 1: Qual a medida do apótema quando n=3? n=10? n=30? n=100?

As respostas obtidas foram respetivamente 0,5; 0,95105...; 0,99425... e 0,99950....

Como essa pergunta é padronizada e bem simples, nenhum dos estudantes apresentou dificuldade para resolver, diferenciando suas respostas apenas no número de casas decimais adotado.

Pergunta 2: Quando se aumenta o número de lados do polígono indefinidamente, qual a relação entre a medida do apótema do polígono e a medida do raio da circunferência?

Observando a resposta anterior, bem como a representação gráfica, ficou fácil perceber que a medida do apótema tende a aproximar-se da medida do raio da circunferência, conforme um dos relatos:

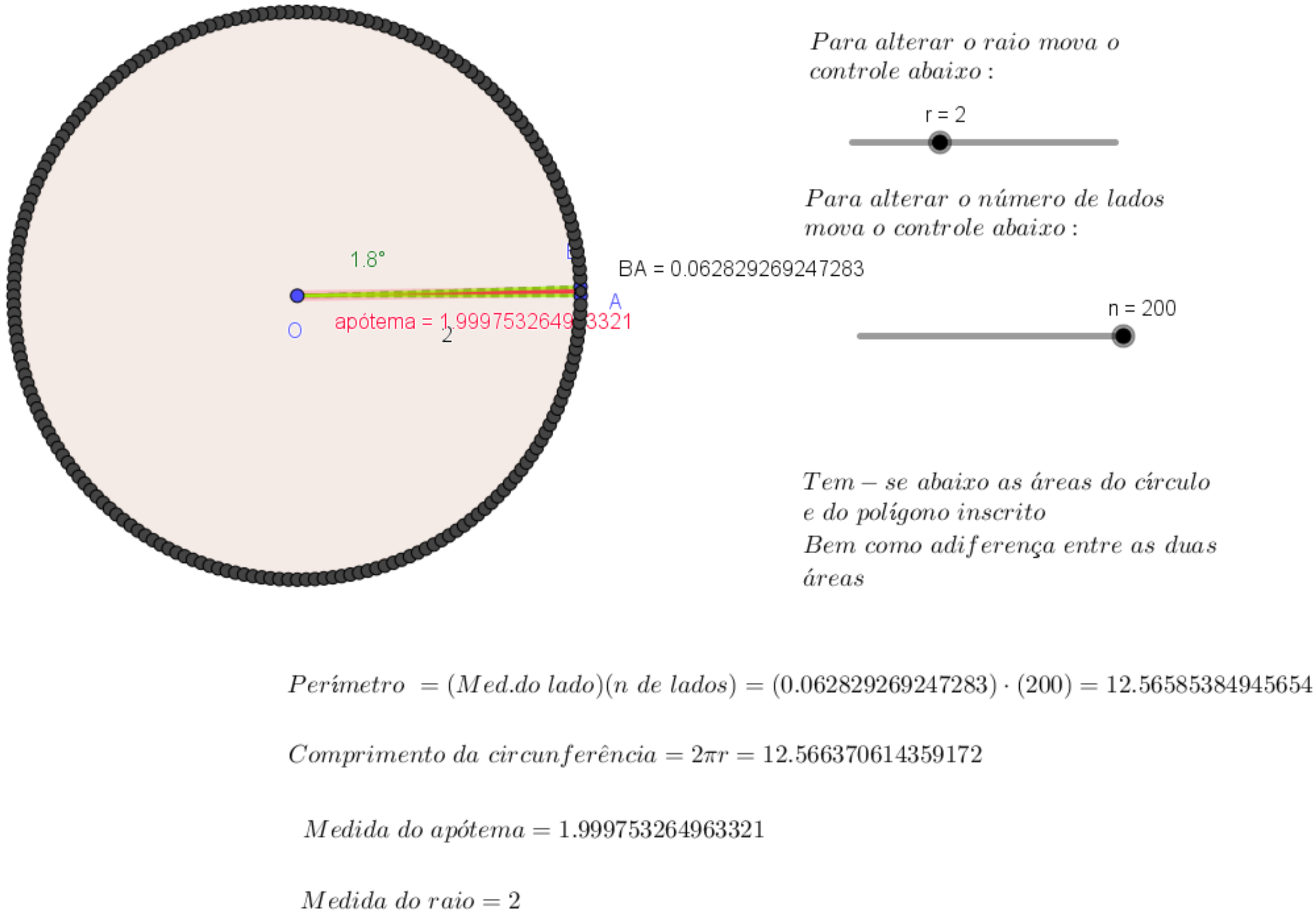
> *"O valor do apótema aproxima-se cada vez mais do raio, de acordo com o aumento do número de lados." (Estudantes 18)*

Pergunta 3: Quando o número de lados do polígono aumenta indefinidamente, é aceitável dizer que o perímetro do polígono é igual ao comprimento da circunferência? Justifique.

> *"Sim, pois a diferença é muito pequena, então consideramos o mesmo valor." (Estudante 21)*

Conforme a resposta acima, fica claro que parte dos estudantes compreenderam, pelo menos intuitivamente, o conceito de limite, fato que foi facilitado pelo uso do Geogebra. A Figura 17 mostra um polígono de 200 lados, seu formato já é muito próximo do formato de um círculo, o que facilitou responder à pergunta.

Figura 17 - Print Screen da Atividade proposta 8 (polígono com 200 lados)



Fonte: Elaborado pelo autor.

As perguntas 4, 5 e 6 tem como objetivo relembrar e dar significado a fórmula utilizada para calcular a área de um polígono regular qualquer.

Pergunta 4: Em quantos triângulos isósceles iguais ao triângulo ABO (veja Figura 15) é possível dividir um polígono regular de 3 lados? 10 lados? 40 lados? n lados?

A resposta foi obtida sem muita dificuldade, sendo respetivamente 3, 10, 40 e n triângulos.

> *"Um polígono de 3 lados pode ser dividido em 3 triângulos, um de 10 lados pode ser dividido em 10 triângulos, assim um polígono de $ lados pode ser dividido em n triângulos." (Estudante 2)*

Pergunta 5: Como calcular a área de um triângulo de base l e altura a?

A área de um triângulo (A_t) de base l e altura a, é:

$$A_t = \frac{la}{2}$$

Nenhum estudante teve dificuldade de responder a esta pergunta, até mesmo por terem revisado a área do triângulo recentemente.

Pergunta 6: Dado um polígono regular com n lados, cuja medida do lado seja l e do apótema seja a, como justificar que a área de um polígono regular é obtida pela fórmula $A_n = \frac{nla}{2}$?

Veja alguns relatos dos estudantes:

> *"Na fórmula o $\frac{la}{2}$ representa a área do triângulo e o n representa o número de triângulos." (Estudante 14)*
>
> *"O $\frac{la}{2}$ é igual a área de cada um dos triângulos que formam o polígono, já o n representa a quantidade de triângulos, ou seja, a fórmula representa a área do polígono." (Estudante 29)*

Para responder às perguntas 7 e 8 foi solicitado que os estudantes admitissem que o número de lados do polígono inscrito está aumentando indefinidamente (tendendo ao infinito). Na expressão $A_n = \frac{nla}{2}$, o produto nl representa o perímetro do polígono e *a* representa a medida do apótema.

Pergunta 7: Como pode ser justificada a igualdade $nl = 2\pi R$? E a igualdade $a = r$?

A partir da Figura 17 e da resposta obtida na pergunta 3, é fácil justificar que as igualdades são válidas. Veja alguns relatos:

> *"Um polígono com infinitos lados é igual a uma circunferência, logo seu perímetro será igual ao comprimento da circunferência e seu apótema será igual ao raio." (Estudante 3)*

> *"Quando aumenta o número de lados do polígono o perímetro fica cada vez mais próximo do comprimento da circunferência e a medida do apótema fica cada vez mais próximo da medida do raio." (Estudante 20)*

Pergunta 8: Substituindo nl por $2\pi R$ e a por R, na expressão $A_n = \frac{nla}{2}$, obtém-se uma nova expressão. Qual é a expressão obtida? Para que ela serve?

Efetuando se as substituições solicitadas na pergunta se têm:

$$A_n = \frac{nla}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$$

> *"($A = \pi R^2$)É a fórmula para a área do círculo." (Estudante 3)*

> *"($A = \pi R^2$) Serve para calcular a área da circunferência[2]." (Estudante 18)*

> *"($A = \pi R^2$) Serve para obter a área do círculo." (Estudante 28)*

O resultado foi obtido por todos os estudantes participantes, entretanto alguns deles apresentaram dificuldades pontuais, principalmente na parte de manipulações algébricas, sendo necessário um reforço individual para superar tais dificuldades.

Ao final do minicurso foi solicitado que os estudantes respondessem a outro questionário, que avaliou a execução das atividades.

Inicialmente foi solicitado que os estudantes classificassem o minicurso em muito bom, bom, regular ou ruim, onde 60% dos estudantes classificaram como muito bom e 40% classificaram como bom. O que mostra que a proposta foi bem aceita.

Foi questionado se os estudantes acreditam que a utilização do Geogebra como recurso complementar às aulas tradicionais de Matemática tornou o conteúdo mais atrativo/compreensível?

A resposta a esta pergunta foi unânime, todos os participantes responderam sim. Veja algumas considerações:

> *"Ele influencia o aluno a aprender Matemática." (Estudante 4)*

> *"O uso do computador facilita e é mais participativo." (Estudante 7)*

> *"Havia fórmulas que não conhecia, através dessas aulas aprendi muitas coisas." (Estudante 13)*

---

2 O estudante confundiu circunferência com círculo.

> *"Por ser algo novo e dinâmico." (Estudante 19)*
>
> *"Porque é mais fácil de aprender usando o Geogebra." (Estudante 21)*
>
> *"Ele facilita mais a aprendizagem em Matemática." (Estudante 22)*
>
> *"Fica mais compreensível para entender os cálculos." (Estudante 25)*

Em seguida, foi solicitado que respondessem a seguinte pergunta: Se você pudesse propor alguma alteração na forma como o minicurso foi executado, quais seriam?

> *"Nenhuma. Pois na forma que foi executado, teve grande eficácia, aprendendo passo a passo. É a melhor forma de ser executado." (Estudante 13)*
>
> *"Abordava mais assuntos da Matemática." (Estudante 6)*

Os relatos acima corroboram que a abordagem de assuntos da Matemática através do Geogebra foi bem recebida pelos estudantes e que eles anseiam por mais atividades em formatos similares.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado uma proposta de abordagem de assuntos de Geometria, relacionados ao cálculo de áreas, por meio de atividades dinâmicas e interativas, realizadas através do Geogebra. Essa temática foi escolhida em virtude da necessidade de tornar o conhecimento matemático (geométrico) mais compreensível e palpável. O principal questionamento motivador foi se a aprendizagem de conceitos relacionados ao cálculo de áreas é mais significativa e eficiente quando se utiliza o Geogebra.

A principal hipótese apontava que o uso de *softwares* educacionais, como o Geogebra, fortalece o processo de ensino-aprendizagem, pois, além de agilizar o trabalho do professor, tornam o conteúdo mais atrativo, fazendo assim que os estudantes fiquem mais motivados, e como pode ser observado tal hipótese foi corroborada.

Este trabalho apresentou algumas aplicações do Geogebra no ensino do cálculo de áreas, que exploraram conceitos como a noção intuitiva de área do triângulo, do paralelogramo e do retângulo. Também foram abordadas atividades que, pelo menos intuitivamente, trabalharam o conceito como o de limite e do princípio do método de exaustão, atividades que permitiram obter a fórmula da área do círculo.

Através do minicurso realizado foi possível avaliar a eficácia da utilização do Geogebra como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem do cálculo de áreas. De fato, os objetivos propostos foram alcançados, já que constatou-se que a utilização do Geogebra facilitou a compreensão dos conteúdos.

A ideia de que o uso do computador/tecnologia pode modificar a maneira como os estudantes veem e compreendem os conteúdos trabalhados foi confirmada, já que para todos os estudantes participantes a utilização desses recursos foi considerada eficaz e motivadora.

No que se refere ao uso do computador é importante frisar que a realização de aulas em ambientes como uma sala de informática precisa ser feita de maneira planejada e consciente, com objetivos claros e regras bem definidas. Assim é possível conciliar aulas tradicionais com aulas que utilizam o recurso computacional, uma combinação de metodologias que beneficia professor e aluno.

A inclusão de novas metodologias no cotidiano de sala de aula deve ser explorada pelos professores, pois isso permite aguçar a curiosidade e a criatividade do estudante, dando-lhes a possibilidade de interagir com os recursos computacionais disponíveis, possibilitando-lhes de fazer experimentações, deduções e implicações, transportando o aluno da posição de mero espectador para a de construtor do próprio conhecimento.

Este trabalho é importante, pois pode motivar professores a refletirem sobre suas metodologias e analisarem a possibilidade de incluir em suas aulas a utilização do Geogebra, permitindo a existência de aulas mais atrativas e dinâmicas, estimulando a curiosidade e a busca do conhecimento pelos estudantes.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana.** 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BORBA, M. D. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** 5ª. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

GABRIEL, M. **Educar a (r)evolução digital na educação.** 1ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática.** Belo Horizonte: CAED:UFMG, 2013.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos novos desafios e como chegar lá.** Campinas: Papirus, 2012.

SÃO PAULO, I. G. **Sobre o Geogebra.** Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (PUC-SP). Disponível em: <http://www.pucsp.br/Geogebrasp/Geogebra.html>. Acesso em: 20 de outubro de 2020.

SOUSA, V. M. Cálculo de Áreas: Uma abordagem através do GeoGebra no Ensino Médio. 2018, 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual do Maranhão, MA, 2018.

CAPÍTULO 10

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: uso da HP 12 C na resolução de problemas de Matemática financeira com alunos do 3º ano do ensino médio

Marcelo da Silva Penha[1]

Raimundo J. Barbosa Brandão[2]

1 Mestre em Matemática. Especialização em Estatística, Professor da rede pública do Estado do Maranhão. E-mail: marcelo.penha79@gmail.com

2 Doutor em Educação Matemática, professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC. E-mail: raimundobrandao.brandao@professor.uema.br; professorbrandao.uema@yahoo.com.br

RESUMO

O objetivo deste estudo é apresentar, de forma clara, os principais recursos disponíveis na calculadora HP 12 C, em especial operações algébricas, envolvendo porcentagem, juros, descontos, amortização e recursos aplicáveis à Matemática financeira. O estudo pretende, também, contribuir, com conhecimentos de Matemática financeira a partir da resolução de problemas, utilizando como ferramenta a calculadora HP 12 C. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, com intervenção, e para isso utilizou-se a calculadora financeira HP 12 C como ferramenta pedagógica para a resolução de problema. Com essa estratégia a investigação propôs-se a preparar os alunos para o exercício da cidadania, resolvendo situações do cotidiano, bem como subsidiar informações e conhecimentos que poderão ser úteis no mercado de trabalho. Apresentam-se aos sujeitos de investigação conceitos básicos relacionados ao tema proposto, com exemplos contextualizados, especificando os principais agentes que facilitam o entendimento do conteúdo. Palavras--chave: Resolução de problema. Matemática financeira. Calculadora Financeira HP 12 C.

Palavras-chave: Resolução de problema. Matemática financeira. Calculadora Financeira HP 12 C.

1. INTRODUÇÃO

A Matemática financeira desempenha, na atualidade, um papel relevante na vida familiar do cidadão e na economia da sociedade. O cidadão, por exemplo, ao adquirir um bem precisa ser letrado em Matemática financeira para tomada de decisão. Dentre outros objetos de estudo da Matemática financeira, ele precisa ter conhecimento de juros simples e compostos, descontos simples e compostos, amortização e série de pagamentos.

Segundo Roman e Santos (2016, p. 3), a Matemática financeira, se trabalhada de forma suficiente, pode influenciar na transformação da realidade socioeconômica das pessoas. A falta de domínio básico desse conteúdo vem prejudicando a sociedade e possibilitando que, cada vez mais, seja explorada pelas ciladas comerciais preparadas para o aumento das vendas, levando cidadãos desinformados a quadros graves de endividamento pessoal.

Nessa perspectiva, optou-se por este estudo de modo a proporcionar aos estudantes de matemática, do 3º ano do ensino médio, conhecimentos básicos em matemática financeira. Durante a realização desta investigação procurou-se responder à seguinte questão de pesquisa: os professores de ensino médio reconhecem a necessidade da educação matemática financeira por meio da calculadora HP 12 C?

Esta investigação tem uma abordagem qualitativa com intervenção. Na primeira seção, introdução, faz-se a apresentação da investigação, destacando-se a importância da educação em matemática financeira para o exercício da cidadania, organização do orçamento familiar e economia da sociedade.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo teve uma abordagem qualitativa com intervenção. A pesquisa qualitativa (GODOY, 1995) caracteriza-se por ter o ambiente natural como fonte direta da coleta de dados e o pesquisador como instrumento essencial. A pesquisa qualitativa tem, ainda, um caráter descritivo com enfoque indutivo e valoriza o significado dado a tudo que existe, possa existir ou ser apropriado pelo pesquisador. Esse tipo de abordagem valoriza o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada (GODOY, 1995).

A intervenção neste estudo deu-se com a realização de oficinas com alunos do 3º ano do ensino médio com o propósito de apresentar a calculadora HP 12 C e conhecer as funções utilizadas na resolução de problemas de matemática financeira. Durante as oficinas procurou-se interpretar os significados atribuídos pelos sujeitos da pesquisa observando a sua participação. A população envolvida no estudo era composta por 89 alunos do 3º ano do ensino médio das turmas 300, 301 e 302, do turno vespertino, da escola pública do Estado do Maranhão, o Centro de Ensino São José Operário, localizada em São Luís - MA, no bairro Cidade Operária. Os sujeitos de pesquisa, 30 alunos (10 alunos de cada turma) escolhidos de maneira aleatória correspondendo a 33,71% do universo pesquisado. Realizou-se uma oficina com o propósito de apresentar a calculadora HP 12 C e o seu manuseio.

Os alunos aprenderam as funções básicas e úteis necessárias a resolução de problemas de objeto deste estudo. Fez parte da pesquisa de intervenção de ensino os seguintes conteúdos: porcentagem, juros simples e compostos, descontos simples e compostos e o sistema de amortização com a utilização da calculadora HP 12 C. As atividades foram realizadas com um grupo de alunos do 3º ano do ensino médio da escola pública estadual Centro de Ensino São José Operário.

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolver problemas pelo homem (BRANDÃO, 2009) é um desafio constante ao longo de sua existência. Desde o primórdio da humanidade o indivíduo se encontra envolvido nessa arte. Para Soistak e Pinheiro (2017), os problemas com o ensino e aprendizagem da Matemática são antigos e atuais. Tão antigos que na Idade Média alguns teoremas de geometria eram chamados de pons asinorum, que em latim significa “ponte dos asnos” (jumentos).

A resolução de problemas, conforme George Polya (1945, 2003), constitui-se um dever muito importante do professor de matemática no processo de ensino e aprendizagem. No cotidiano do cidadão, e/ou na profissão das pessoas em geral, resolver problemas de matemática faz-se presente e necessário.

Do ponto de vista da aprendizagem, para Facim e Leineker (2016)

> A resolução de problemas e a Matemática têm uma longa trajetória desde a antiguidade, pois sempre esteve presente na base da criação dos processos de contagem e do conceito de número. Do ponto de vista da aprendizagem a resolução de problemas teve fases muito limitadas, nas quais predominava o ensino baseado na memorização e repetição. Em contraposição a essa concepção emergem outras formas de ensino para levar o aluno a compreender os conceitos matemáticos de modo a tornar a aprendizagem mais significativa. (FACIM e LEINEKER, 2016, p.3 - 4)

É de suma importância que os professores compreendam como trabalhar essa metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico

Polya (1977, p. 1) propõe a seguinte definição:

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.

Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) que a metodologia de resolução de problemas contribui para melhor mobilização das informações já existentes no conhecimento prévio do aluno e desenvolve a capacidade de administrar esses saberes.

Polya (1978) propõe quatro fases para a resolução de um problema: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano; fazer o retrospecto ou a avaliação.

1ª fase - Compreender o problema

Para resolver um problema o ponto inicial é a sua compreensão, sem a qual o aluno não consegue avançar na resolução. Para essa etapa inicial é preciso uma cuidadosa e atenciosa leitura, tentando relacionar todas as informações presentes e as que faltam de forma direta e indireta. Se faltar ao aluno a compreensão do problema proposto, o professor deve ajudá-lo fazendo comentários com situações semelhantes ao problema, para que, por analogia, o aluno possa compreender e partir para a elaboração de um plano.

2ª fase - Elaborar um plano

Uma vez identificadas as informações que faltam, no caso o termo ou termos desconhecidos ou incógnitas, o aluno vai procurar relacioná-los com os demais dados do problema, tentando lembrar-se de outros problemas ou situações já resolvidas ao longo da vida escolar. Deve, então, elaborar um plano com estratégias conhecidas ou não, procurando sempre ter ações criativas.

3ª fase - Executar o plano

Nessa etapa executa-se o plano elaborado seguindo todos os passos e estratégias, efetuando todos os cálculos. Segundo Echeverría e Pozo (1998), esse passo consiste em desenvolver o plano que havia sido previamente elaborado e transformar o problema a partir das regras conhecidas.

Quando as atividades são realizadas em grupo é importante todos ouvirem o ponto de vista de cada membro, pois, a troca de informações é fundamental para lembrar conteúdos prévios que poderão auxiliar na resolução do problema, além de aprimorar as estratégias a serem traçadas.

4ª fase - Fazer o retrospecto ou a avaliação

Para Polya (1978), após a resolução do problema deve-se verificar se está correto e se os argumentos se fundamentam cientificamente. Após a retrospectiva é fundamental que o professor valide as resoluções dos alunos, inclusive promovendo reflexões se o modelo utilizado poderá ser aplicado na resolução de outras situações.

4. USO DA CALCULADORA HP 12 C NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A HP 12 C é uma calculadora financeira programável, projetada e lançada em 1981 pelo engenheiro Dennis Harms com a finalidade de facilitar cálculos em matemática financeira (BRUNI; FAMÁ, 2004). Na atualidade, a HP 12 C é bastante utilizada por professores dos cursos de engenharia, contabilidade, administração e economia, dentre outros.

Para Bruni e Famá (2004), a calculadora financeira HP 12 C tem uma boa aparência. Dentre suas características citam-se como principais a robustez, pois bem cuidada a máquina dura indeterminadamente, e a simplicidade, por ser fácil de operar, com as principais funções necessárias na matemática financeira.

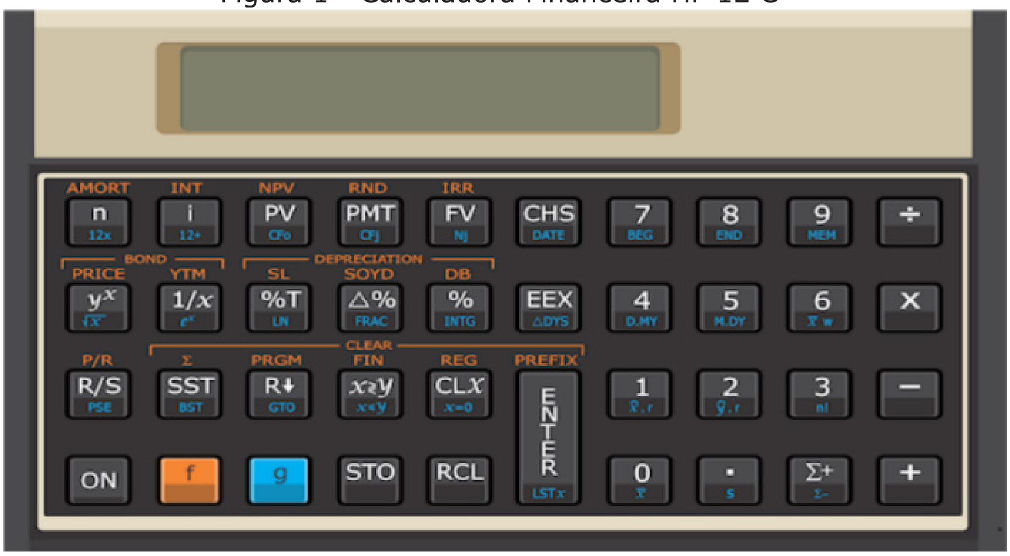
A HP 12 C não conta com uma das principais teclas de calculadoras algébricas comuns, que é a tecla de igualdade. A razão dessa inexistência consiste no fato de a HP 12 C trabalhar com uma lógica matemática diferente: a lógica RPN. Enquanto em uma operação algébrica comum os operandos devem ser intercalados por operadores, na lógica RPN os operandos devem ser colocados primeiramente e, depois, devem ser colocados os operadores (BRUNI; FAMÁ, 2004).

A utilização de tecnologias faz parte do cotidiano do cidadão e dos alunos de modo geral, seja na escola ou no cotidiano. Nessa perspectiva, na educação básica, nos estudos de porcentagem e juros, a HP 12 C também é bastante utilizada por professores e alunos.

As novas tecnologias surgem em diversas áreas do conhecimento. Em se tratando de educação, a evolução não acontece de modo diferente. Ao longo do tempo surgem diferentes metodologias, correntes, teóricas e equipamentos diversos, sempre buscando proporcionar melhorias significativas no processo ensino-aprendizagem.

4.1 Apresentação e Funções da Calculadora HP 12 C

Figura 1 - Calculadora Financeira HP 12 C



Fonte: Penha

A calculadora financeira HP 12 C conta com um número bastante expressivo de funções específicas, acima de 120. Neste estudo, por se trabalhar com um objeto reduzido de estudo matemático (conteúdos), apresentam-se algumas dessas funções.

Madeira Martins, Martins e Rehfeldt (2016) indicam os primeiros passos para operacionalizar a HP 12 C:

1º) Ligar e desligar a calculadora financeira HP 12 C. Para começar a operá-la pressiona-se a tecla ON e para desligá-la pressiona-se a mesma tecla, que funciona como liga/desliga. Castelo Branco (2010) lembra que caso a deixem ligada, sem pressionar nenhuma tecla por um período mais longo, entre 8 e 17 minutos, ela se desligará automaticamente (MARTINS; MARTINS; REHFELDT, 2016).

2º) Caso a bateria esteja fraca, aparecerá um indicador [*] asterisco piscando no canto inferior esquerdo. Bruni e Famá (2004, p. 75) citam que para manter a vida útil da bateria por mais tempo "deve-se evitar colocar a calculadora próximo a fontes de campos eletromagnéticos, como aparelhos de som, tesouras, alto-falantes automotivos, televisores, etc.".

3º) No teclado da calculadora HP 12 C a maioria das teclas efetua duas ou três funções. Conforme Bruni e Famá (2004, p.74), o propósito é a economia de teclas, e esclarecem que: "algumas teclas apresentam legendas em branco (função principal), em amarelo ou em azul. Para empregar uma função 'amarela' é necessário pressionar a tecla f antes e para a função 'azul' é necessário pressionar a tecla g antes"

Dentre as demais funções têm-se:

- CLX , que apaga o que tem no visor;
- [f] REG, que apaga o conteúdo de todos os registros;
- [f] FIN, que apaga o conteúdo dos registros financeiros;
- [f] ΣΣ , que apaga o conteúdo dos registros estatísticos;
- [f] [número de casas decimais desejado] , para fixar a quantidade de casas decimais;
- [número] ENTER, para introduzir um número;
- [número] ENTER [%], para calcular porcentagem;
- [número] ENTER [número] [ΔΔ%], para calcular a variação percentual;

- [número total] ENTER [número secundário] [%T], para calcular quantos % do número total representa o número secundário;
- [número] ENTER [número] [operação], para efetuar cálculos simples;
- [número] ENTER [número] [$y^x y^x$], para calcular potências;
- [número] ENTER [número] [1/x] [$y^x y^x$], para cálculos de radiciação;
- [número] ENTER [STO], para armazenar o número na memória; e
- [número] ENTER [RCL], para recuperar o número que foi armazenado na memória.

As principais teclas utilizadas nas funções financeiras na HP 12 C constam na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 - Principais teclas utilizadas nas funções financeiras na HP 12 C

Tecla	Indicação no inglês	Indicação no português
N	Number	Número de períodos
I	Interest Rate	Taxa de juros
PV	Present Value	Valor presente
PMT	Periodic Payment Amount	Valor de cada pagamento na série uniforme
FV	Future Value	Valor futuro
CHS	Change Sing	Troca o sinal
AMORT	Amortization	Amortização
INT	Interest	Juros
NPV	Net Present Value	Valor Presente Líquido
IRR	Internal Rate Return	Taxa Interna de Retorno
CLX	Clear X	Limpar o conteúdo da memória
STO	Store	Guardar
RCL	Recall	Chamar
CF	Cash Flow	Fluxo de Caixa

Fonte: adaptada de (MADEIRA MARTINS; MARTINS; REHFELDT, 2016).

Nas funções de calendário têm-se as seguintes teclas:

- D.MY, que configura as datas no padrão brasileiro (dia/mês/ano);
- M.DY, que configura as datas no padrão americano (mês/dia/ano);
- DATE, que verifica em qual dia da semana ocorreu uma determinada data; e
- ΔDYS, para calcular a quantidade de dias (exatos e comerciais) entre duas datas conhecidas.

As funções de calendário são secundárias em uma tecla e seus caracteres estão impressos em azul. Antes de usá-las deve-se, primeiramente, pressionar a tecla g.

Nas funções estatísticas têm-se as seguintes teclas:

- $\Sigma+$, para acrescentar dados;
- $\Sigma-$, para retirar dados;
- $\bar{x}$, para calcular a média aritmética dos dados;
- s, para calcular o desvio padrão dos dados;
- $\bar{x}w$, para calcular a média aritmética ponderada; e
- $\hat{x}$,**r e** $\hat{y}$,**r** , para fazer estimações lineares.

Observação: com a exceção da tecla $\Sigma+$, que está impressa em branco, as demais teclas citadas estão impressas em azul, e para utilizá-las deve-se primeiramente pressionar a tecla g.

4.2 Exemplo de Utilização da Calculadora

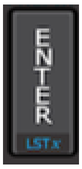
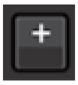
A seguir seguem algumas aplicações envolvendo as principais funções da calculadora HP 12 C. A primeira é a realização de aritméticos elementares. Essa realização compreende dois números e uma operação: adição, subtração, multiplicação ou divisão.

Para Gimenes (2013, p. 35), "na HP 12C, os números devem ser informados primeiro e depois o sinal da operação”. As respostas são obtidas quando as teclas de operação ([+], [-], [x], ou [¸]) são pressionadas. Após pressionar a tecla [ENTER], dois zeros aparecerão depois do ponto decimal.

De acordo com Madeira Martins, Martins e Rehfeldt (2016), isso se deve ao fato de a calculadora estar configurada para mostrar duas casas decimais para todo número entrado ou calculado. Essa configuração poderá ser modificada a qualquer momento, bastando para isso pressionar a tecla [f] seguida do número de casas desejado.

Segundo o Guia do Usuário da HP (2008, p. 19): “apertando [ENTER] você indica à calculadora que terminou de digitar o número, terminando a entrada de dígitos. Não é necessário apertar [ENTER] depois de digitar o segundo número, pois as teclas ([+], [-], [x], ou [¸]) também terminam a entrada de dígitos”.

Exemplo 1 - Calcular 20 + 25.

Teclas	Visor
20	20,
	20,00
25	25,
	45,00

Resposta: 45

Observações:

1ª) Ressalta-se mais uma vez que após apertar a tecla ENTER**,** ao concluir a operação aparecerão duas casas decimais devido ao fato de a HP 12 C estar configurada para esse fim. Para determinar o número de casas decimais, o procedimento consiste pressionar a tecla f e, posteriormente, o número desejado, que varia de 0 a 9.

2ª) Para realizar uma nova operação é necessário, antes, limpar a memória HP 12 C apertando as teclas f e CLX.

Para realização de cálculos aritméticos complexos, quando se conclui uma operação e a resposta encontra-se no visor, a partir dessa resposta pode-se executar uma outra operação com esse número, simplesmente digitando o segundo número e apertando a tecla da operação, não necessitando de pressionar a tecla ENTER novamente para separar o segundo número do primeiro.

Isso acontece, segundo Madeira Martins, Martins e Rehfeldt (2016) por que um número entra depois de apertar uma tecla de função, como, por exemplo, +, - ,x , :, etc. e por que o resultado do cálculo anterior está armazenado na memória da calculadora, como se a tecla ENTER tivesse sido apertada. A única situação em que se precisa apertar a tecla ENTER para separar dois números é quando for digitado um número logo após o outro.

Exemplo 2 - Calcular 50 + 25 - 18 - 30.

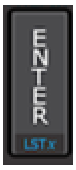
Teclas	Visor
50	50,
ENTER LSTx	50,0
25	25,
+	75,0
18	18,00
−	57,00
30	30,
−	27,0

Resposta: 27

Para cálculos de potenciação procede-se da seguinte maneira:

- Digita-se o primeiro número: a base;
- Pressiona-se a tecla ENTER para separar o segundo número, o expoente, do primeiro que é a base;
- Digita-se o segundo número, o expoente; e
- Pressiona-se a tecla $\mathbf{y^x}$ para calcular a potência.

Exemplo 3 - Calcular 3^4.

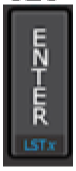
Teclas	Visor
3	3,
	3,00
4	4,
	81,00

Resposta: 81

Para calcular raiz quadrada de um número, procede-se da seguinte maneira:

- digita-se o número base (radicando);
- pressiona-se a tecla g;
- e pressiona-se a tecla y^x para calcular a raiz quadrada.

Exemplo 4 - Calcular $\sqrt[4]{625}$.

Teclas	Visor
625	625,
	625,00
4	4,
	0,25
	5,00

Resposta: 5

5. MATEMÁTICA FINANCEIRA

Nos primórdios da humanidade não havia unidade monetária, não havia moeda e a forma de realizar transações era por troca de mercadoria. Essa troca, chamada escambo, foi muito importante para o desenvolvimento do comércio, principalmente da agricultura, antes das moedas e dinheiro em papel.

Conforme AREF (2007):

> Escambo, permuta, troca direta ou, simplesmente, troca é a transação ou contrato em que cada uma das partes entrega um bem ou presta um serviço para receber da outra parte um bem ou serviço em retorno em forma de Crédito, sem que um dos bens seja moeda. Isto é, sem envolver dinheiro ou qualquer aplicação monetária aceita ou em circulação. Por exemplo, um agricultor com um marceneiro pratica escambo trocando dois cestos de frutas por uma cadeira, ou pela instalação de uma cerca em seu terreno (AREF, 2007, p. 01)

Era dessa forma que no início da civilização ocorriam transações comerciais. As pessoas produziam bens de consumo e o excesso da produção era colocado em pontos estratégicos para a prática do escambo. Os fabricantes e vendedores se constituíam como pessoas de alto poder econômico.

Atualmente pode-se dizer que a abordagem da educação financeira tem sido tratada como um dos temas centrais das grandes discussões internacionais. Organismos representantes de diferentes nações, autoridades governamentais, segmentos da iniciativa privada e organizações não governamentais (ONGs) têm sempre enfatizado a necessidade, do ponto de vista prudencial, de instruir financeiramente cada vez mais todos os cidadãos, indivíduos-consumidores de bens e serviços ativos ou não economicamente (CAMPOS, 2015).

6. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE ENSINO

A aplicação das atividades de ensino ocorreu em forma de oficinas e para sua realização foram definidos seis encontros. No primeiro encontro, realizado em 07 de outubro de 2019, o professor pesquisador aplicou um questionário aos alunos com o objetivo de analisar sua habilidade no uso da calculadora na resolução de problemas. Nesse encontro o professor baixou o aplicativo da calculadora HP 12 C, a Touch RPN Calculadora, e apresentou suas funções básicas e algumas aplicações.

Os cálculos matemáticos aplicados à área financeira ganharam muito em agilidade com o advento das calculadoras financeiras cujas funções, desenvolvidas especialmente nessa área, deixaram para trás as tão conhecidas tabelas financeiras (VANNUCCI, 2003).

Situação problema 1 - Um cliente foi a um restaurante e seu consumo ficou em R$ 150,00. Foi cobrada uma taxa adicional de 10% sobre o consumo, referente aos serviços de atendimento ao cliente. Qual é o valor dessa taxa adicional? Qual é o valor que o cliente realmente pagará?

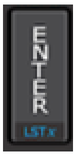
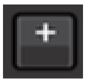
- Cálculo do valor da taxa adicional: 10% de 150 = 0,1 * 150 = 15. O valor da taxa adicional é de R$ 15,00.

- Valor pago pelo cliente: 150 + 15 = 165. O valor realmente pago pelo cliente foi R$ 165,00.

- Uma outra maneira de calcular o valor realmente pago pelo cliente é calcular diretamente 110% (100% + 10%) de 150.

- 110% de 150 = 1,1 * 150 = 165. Logo, o valor realmente pago pelo cliente foi de R$ 165,00.

Para calcular a taxa adicional e o valor realmente pago pelo cliente no restaurante utilizando a HP 12 C tem-se:

Teclas	**Visor**
150	150,
	150,00
10	10,
	15,00 (Valor da taxa adicional)
	165,00 (Valor realmente pago pelo cliente)

Há outra maneira de calcular o valor pago pelo cliente: seguem os comandos:

Teclas	**Visor**
150	150.
	150,00
110	110,
	165,00 (Valor realmente pago pelo cliente)

Situação problema 2 - Calcule o montante e o juro produzido por um capital de R$ 100.000,00 a uma taxa de juro composto de 25% ao ano, em dois anos.

Dados do problema:

C = 100000 i = 25% a.a. = 0,25 n = 2 anos M = ? J = ?

- Para calcular o valor do montante a juros compostos utiliza-se a fórmula: M = C* $(1+i)^n$

$$M = C * (1+i)^n$$

$$M = 100000 * (1+0{,}25)^2$$

$$M = 100000 * 1{,}25^2 \rightarrow M = 156250$$

O valor do montante produzido é de R$ 156.250,00. Sabe-se que o montante é o capital acrescido de juros, ou seja, M = C + J. Então, J = M - C. Logo:

$$J = M - C$$

$$J = 156250 - 100000$$

$$J = 56250$$

O valor do juro produzido é de R$ 56.250,00, e resolvendo o mesmo problema utilizando a HP 12 C tem-se:

Teclas	Visor
100000	100.000,
CHS	-100.000,
PV	-100.000,00
25	25,
i	25,00
2	2,
n	2,00
FV	156.250,00 (Valor do montante)
100000	100.000,
−	56.250,00 (Valor dos juros)

Situação problema 3 - Uma mercadoria custa R$ 5.600,00 à vista, podendo ser vendida em nove prestações iguais com taxa mensal de 3,45%. Determinar o valor de cada prestação, supondo que a primeira seja paga no fim do primeiro mês ou no ato da compra.

Coleta dos dados do problema:

C = 5600 n = 9 meses i = 3,45% a.m. = 0,0345 p = ?

Para encontrar o valor de cada prestação, supondo que a primeira prestação seja paga no final do primeiro mês (renda postecipada ou imediata) utiliza-se a fórmula: $C = p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n * i}$, em que: C -valor do capital; p - valor da prestação; i - taxa de juros; n - tempo

$$C = p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n * i}$$

$$p = C * \frac{(1+i)^n * i}{(1+i)^n - 1}$$

$$p = 5600 * \frac{(1+0{,}0345)^9 * 0{,}0345}{(1+0{,}0345)^9 - 1}$$

$$p = 5600 * \frac{(1{,}0345)^9 * 0{,}0345}{(1{,}0345)^9 - 1} \quad \rightarrow \quad p = 5600 * 0{,}13114 \quad \rightarrow \quad p = 734{,}40$$

O valor de cada prestação, supondo que a primeira prestação seja paga no final do primeiro mês, é de R$ 734,40.

Para encontrar o valor de cada prestação, supondo que a primeira prestação seja paga no ato da compra (renda antecipada), faz-se uso da fórmula:

$$C = p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n * i} * (1+i) \quad \text{ou} \quad C = p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} * i}$$

$$C = p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} * i}$$

$$p = C * \frac{(1+i)^{n-1} * i}{(1+i)^n - 1}$$

$$p = 5600 * \frac{(1+0{,}0345)^{9-1} * 0{,}0345}{(1+0{,}0345)^9 - 1} \quad \rightarrow p = 5600 * \frac{(1{,}0345)^8 * 0{,}0345}{(1{,}0345)^9 - 1}$$

$$p = 5600 * 0{,}12677 \quad \rightarrow \quad p = 709{,}91$$

O valor de cada prestação, supondo que a primeira prestação seja paga no ato da compra, é de R$ 709,91. Com o uso da HP 12 C para resolver o mesmo problema tem-se:

Teclas	Visor	
5600	5.600,	
CHS DATE	- 5.600,	
PV CFo	- 5.600,00	
9	9,	
n 12x	9,00	
3	3,	
.	3,	
45	3,45	
i 12÷	3,45	
PMT CFj	734,40	(Valor de cada prestação, sendo que a primeira seja paga no final do primeiro mês)

Para calcular o valor de cada prestação, com a primeira paga no ato da compra, não há necessidade de colocar novamente os dados na calculadora HP 12 C, pois já se encontram armazenados na memória.

Teclas	Visor	
g	734,40 g	
7 BEG	734,40 begin	
PMT CFj	709,91 begin	(Valor de cada prestação, sendo a primeira paga no ato da compra)

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão de pesquisa que norteou este estudo era conhecer como a calculadora HP 12 C contribui para o processo de ensino aprendizagem e identificar as dificuldades encontradas pelos alunos do 3º ano do ensino médio ao utilizá-la na resolução de problemas de matemática financeira.

Fez parte da pesquisa de intervenção de ensino os seguintes conteúdos: porcentagem, juros simples e compostos, descontos simples e compostos e o sistema de amortização com a utilização da calculadora HP 12 C. As atividades foram realizadas com um grupo de alunos do 3º ano do ensino médio da escola pública estadual Centro de Ensino São José Operário.

As reflexões geradas a partir das análises das atividades de ensino, a percepção dos alunos, corroboradas com a opinião dos professores de matemática da escola, permitiram observar que a utilização da HP 12 C no ensino e na aprendizagem de tópicos de matemática financeira é considerada muito importante, pois permite a resolução de problemas de forma rápida e segura.

Dentro da temática aqui abordada há muito há para se estudar, muito há para se conhecer, muito há para se aprofundar. Acredita-se, com este estudo, deixar uma contribuição que estimulará outras pessoas a se interessarem pelo assunto. Desse modo, ter-se-á nas universidades trabalhos da mesma área de estudo que enriqueçam o processo de ensino e aprendizagem da matemática a partir do uso de ferramentas tecnológicas.

REFERÊNCIAS

AREF, Jamel. **Escambo e permuta**: troca direta ao consumidor. 2007. Disponível em: http://escamboepermuta.blogspot.com.br/2012/05/troca-direta.html. Acesso em: 19 nov. 2019.

BRANDÃO, Hugo Pena. **Aprendizagem, contexto, competência e desempenho:** um estudo multinível. 2009. xi, 345., il. Tese (Doutorado em Psicologia Social, do Trabalho e das Organizações)-Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, 2018.

BRUNI, Adriano Leal; FAMÁ, Rubens. **Matemática Financeira com HP 12 C e Excel**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

CAMPOS, Adilson Rodrigues. **Educação Financeira em um curso de Orçamento e Economia Doméstica para professores**: uma leitura da produção de significados Financeiro-Econômicos de indivíduos-consumidores. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora-MG, 2015.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **O uso da calculadora.** 2001. Disponível em: www.ima.mat.br/ubi/pdf/uda_006.pdf. Acesso em: 10 fev. 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Informática, Ciências e Matemática. Disponível em: Acesso em: 10 fev. 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo: Editora Ática. 2007.

ECHEVERRÍA, Maria Del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, Juan Ignacio (org.). **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Traduzido por Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Art Med, 1998.

GODOY, Arida S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. In: **Revista de Administração de Empresas**, v.35, n.2, Mar./Abr. 1995.

MADEIRA MARTINS, Iomara de Albuquerque; MARTINS, Silvana Neumann.; REHFELDT,Márcia Jussara Hepp. **Principais funções e aplicações da calculadora HP 12C na Matemática Financeira para o Curso de Ciências Contábeis**. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado) Centro Universitário UNIVATES, LAJEADO-RS Lajeado-RS, 2016.

MARTINS, Madeira. MARTINS, Silvana Neumann. REHFELDT, Márcia Jussara Hepp. **Principais funções e aplicações da calculadora HP 12C na Matemática Financeira para o Curso de Ciências Contábeis**. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado) Centro Universitário UNIVATES, Lajeado-RS, 2017.

PÓLYA, G. 10. **Mandamentos para professores de Matemática**. University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

PÓLYA, G.. **Como resolver problemas** (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva, 2003.

POZO, J. I.; ANGÓN, Y. P. A solução de problemas como conteúdo Procedimental da Educação Básica. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 139-165.

POZO, J.I & ECHEVERRÍA, M.D.P.P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver a aprender. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ROMAN, Maria Janeth; SANTOS, Margarete A. dos. **O uso da matemática financeira na gestão do orçamento familiar**. Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor. PDE. Curitiba - Paraná, 2016.

SOISTAK, Maria Marilei; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. **Memorização**: atual ou ultrapassada no ensino-aprendizagem da matemática? In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA (SINECT), 1, 2009, Ponta Grossa (PR). Anais... Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Programa de Pós-Graduação e Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009, p. 971-983

VANNUCCI, L. R. **Cálculos Financeiros aplicados e avaliação econômica de projetos de investimento**. São Paulo: Texto Novo, 2003.

CAPÍTULO 11

A IMPORTÂNCIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DO PEDAGOGO: um estudo com discentes de pedagogia em uma instituição privada em Paço do Lumiar – MA

Darcio Pereira Damaceno[1]

Raimundo J. Barbosa Brandão[2]

1 Mestre em Matemática. Esp. em Segurança do Trabalho, Bacharel em engenharia Mecànica. Instituto Superior Franciscano (IESF). E-mail: darcioeng@hotmail.com

2 Doutor em Educação Matemática, professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC. E-mail: raimundobrandao@professor.uema.br; professorbrandao.uema@yahoo.com.br

RESUMO

O presente artigo trata-se uma pesquisa de campo realizada no ano de 2017, como os discentes de pedagogia do Instituto Superior Franciscano (IESF), como objetivo de aferir a percepção dos mesmos referente a formação matemática recebida e os reflexos na vida profissional, o trabalho é uma compilação da dissertação apresentada para obtenção do grau de mestre. Cabe ressaltar que a pesquisa mostrou-se bastante efetiva pois proporcionou a reformulação da grade do curso, no qual foi inserido uma nova disciplina voltada para o Letramento Matemático, com isso contribuindo para um formação mais sólida no que tange a matemática.

1. INTRODUÇÃO

Esta investigação teve o propósito de analisar a formação matemática do pedagogo para o ensino deste componente curricular nos anos iniciais do ensino fundamental. É um estudo de abordagem qualitativa, com uso da metodologia de engenharia didática complementado por pesquisa bibliográfica e documental.

O estudo foi norteado pelas seguintes questões de pesquisa:

Qual a percepção dos estudantes de pedagogia, sobre sua formação inicial matemática e a importância da disciplina, nos anos iniciais do ensino fundamental?

Quais seriam os conhecimentos matemáticos necessários à formação do pedagogo para ensinar matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental?

Os Fundamentos Teórico-Metodológicos da Matemática abordados no curso de pedagogia contribuem para formação do pedagogo, com conhecimentos sólidos voltados para a futura prática docente?

Historicamente o ensino da Matemática tem se tornado um problema para educação brasileira no que diz respeito à sua aprendizagem, formação de professores de matemática, e daqueles que ensinam matemática, como os casos dos pedagogos e bacharéis com formação pedagógica. A ciência de maneira geral, ao refletir as leis da sociedade, se constitui num importante instrumento para compreensão dos fenômenos da natureza e resolução de problemas, a eles relacionados seja através da modelagem matemática ou outros métodos de investigação.

A Matemática apesar de abstrata e rigorosa sob o ponto de vista do pensamento lógico, faz parte da vida cotidiana das pessoas, por esta razão deve ser vista e trabalhada a partir de ações, e processada através de intervenções concretas, formais e informais, mas de maneira significativa.

Nos PCN's, é reiterado:

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. [...] (BRASIL, 1997, p.19).

A ausência de uma Matemática crítica, que leve os alunos a irem além de um valor numérico como resposta de uma sentença, e que possibilite os estudantes analisarem, interpretarem e tomarem decisões no dia a dia, pode contribuir para as dificuldades do aprendizado.

Os reflexos da falta de aprendizagem significativa em matemática estão presentes em vários momentos da vida dos estudantes, um exemplo disso são as notas obtidas pelos os mesmos em exames, nacionais e internacionais, que aferem o grau de aprendizagem. É importante ressaltar que se tratando do cenário mundial, o desempenho de nossos estudantes está bem aquém de nações como: Singapura, Hong Kong e China.

Com base nas inquietações já mencionadas, decidiu-se realizar uma pesquisa no curso de pedagogia do Instituto de Ensino Superior Franciscano (IESF), no qual buscou-se os discentes que estavam na etapa final do curso, com o intuito de analisar a percepção dos mesmo acerca dos seus conhecimentos matemáticos e a importância da matemática para formação da criança, levando em consideração os conteúdos que devem ser ministrados nos anos iniciais do ensino fundamental, avaliar a formação inicial deste profissional, e apresentar uma reflexão acerca do conteúdo disponível no currículo sobre o ensino de matemática e das metodologias especificas no ensino de matemática nos cursos de pedagogia, tendo como base os estudantes de pedagogia da instituição.

Esta investigação tem uma abordagem qualitativa por entender que se trata de um estudo que tem como preocupação o aprofundamento da compreensão de um grupo social de uma organização. Buscou-se neste estudo explicar as razões das dificuldades dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, que possuem formação no curso de pedagogia.

Segundo Chizzotti, (2006, p. 28), "o termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais, que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma visão sensível".

Ainda de acordo Gerhardt e Silveira, afirmam que:

> As características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p.32)

Esta investigação foi desenvolvida no Instituto Ensino Superior Franciscano (IESF), uma instituição de ensino, particular, do estado do Maranhão, localizada no município de Paço do Lumiar. Os sujeitos da pesquisa foram vinte estudantes (que representa 3,7% dos discentes) do curso de pedagogia, dos dois últimos semestres no ano 2017.

Os instrumentos de coleta de dados foram:

a) Observação, por acreditar que a mesma possibilita ao pesquisador analisar todos os movimentos e relações promovidas durante a prática docente;

b) Questionários, pois os mesmos servem para coletar informações sobre a percepção do estudante de pedagogia acerca do seu conhecimento matemático;

c) Análise documental e bibliográfica, através de estudos das diretrizes curriculares da formação de professor, formação do pedagogo, parâmetros curriculares de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental e referências bibliográficas que contemplam o tema em estudo.

2. OBSTÁCULOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

As duas facetas do aprendizado da matemática, ensinar e aprender, não vêm sendo consideradas uma tarefa fácil, ainda mais quando associada à visão distorcida que a maioria dos educandos tem sobre a matéria, trazida muitas das vezes desde seus primeiros contatos com a disciplina.

Segundo MACHADO (2005),

> Considera-se que somente a partir da percepção clara dos mecanismos que relacionam o conhecimento matemático com a realidade concreta, da critica dos pressupostos conhecimentos matemáticos será possível repensar o ensino da matemática em sentido globalizante. (MACHADO 2005, pg. 17).

Seria no mínimo sensato pensar que o baixo desempenho dos estudantes na Matemática, está intimamente ligado com as dificuldades encontradas no aprendizado da disciplina. A problemática encontra-se em compreender o que leva o estudante ter dificuldade em aprender matemática, uma vez que tal distúrbio pode ocorrer por uma variedade de fatores, que podem aparecer isoladamente ou em conjunto. Tal dificuldade é normalmente atribuída, de forma errônea, à complexidade da disciplina conjuntamente com a falta de aptidão com a mesma, mas deve-se levar em conta também fatores mentais, psicológicos e pedagógicos.

ALMEIDA (2006) reflete que

> Falar de dificuldade em Matemática é simples quando dizem que se trata de uma disciplina complexa e que muitos não se identificam com ela. Mas essas dificuldades podem ocorrer não pelo nível de complexidade ou pelo fato de não gostar, mas por fatores mentais, psicológicos e pedagógicos que envolvem uma série de conceitos e trabalhos que precisam ser desenvolvidos ao se tratar de dificuldades em qualquer âmbito, como também em Matemática. (ALMEIDA 2006, pg. 01).

É preciso ter em mente, que não se pode mudar aquilo que não se conhece, para que professor assuma seu papel de conciliador do ensino, é necessário que o mesmo saiba suas limitações e conheça as dificuldades dos seus alunos, o primeiro passo será identificar o que leva os estudantes sentirem dificuldades na disciplina.

2.1 A importância da Matemática

É irrefutável a presença da matemática no cotidiano de qualquer cidadão contemporâneo, desde as pequenas relações comerciais, preparo de receitas, no simples ato de informar que horas são, e até quando se faz uso da calculadora. Sendo praticamente impossível dissociar a disciplina das interações sociais humanas atuais, que de tão presente acaba por ser despercebida, ao ponto de ser renegada sua importância, uma vez que se tem a concepção que a matemática está presente apenas nos cálculos avançados. É inegável que parte deste pensamento errôneo é responsabilidade da escola, pois a mesma não demonstra para o aluno a aplicabilidade da ciência.

Sobre o tema, PONTE relata que

> Para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina de Matemática resulta desta ser extremamente difícil de compreender. No seu entender, os professores não a explicam muito bem nem a tornam interessante. Não percebem para que serve nem porque são obrigados a estudá-la. Alguns alunos interiorizam mesmo desde cedo uma auto-imagem de incapacidade em relação à disciplina. Dum modo geral, culpam-se a si próprios, aos professores, ou às características específicas da Matemática. (PONTE 1992, p.2)

O professor que ensina matemática, atrelado a livros didáticos que retrata a disciplina de forma alheia a realidade local do aluno, contribui de forma significativa para que os alunos percam o interesse pela disciplina, uma vez que estes alunos não encontram nenhuma aplicabilidade prática para disciplina em sua vida, então que sentido faz aprender algo que não será utilizado.

Sobre o tema, PINHEIRO aborda que

> Pela forma com que vem sendo trabalhada a matemática, ela torna-se uma estranha ao mundo do aluno, e assim, dificilmente eles conseguem encontrar algum sentido no conhecimento matemático que seja possível relacionar com o seu cotidiano. (PINHEIRO, 2005, p. 137).

Não é estranho dizer que os avanços tecnológicos que a humanidade alcançou, deve-se em parte aos pensamentos matemáticos, pois a matemática é alicerce de qualquer ciência tecnológica, estando ela presente nos grandes momentos históricos da humanidade. Reforçando o pensamento da importância da matemática para homem como ser pensante.

Ainda sobre o assunto, OGLIARI nos aponta que

> A influência da Matemática em dados momentos históricos pode não ter sido evidente, como o foram as grandes revoluções nas Ciências, mas sempre foi a base subjacente a esses fatos. Um exemplo da importância da Matemática num momento decisivo da história da humanidade pode ser visto na Segunda Guerra Mundial, quando Einstein "lança" a equação $E = m.c^2$, que dá elementos para a criação da bomba atômica, artefato que abalou a sociedade e mudou o rumo da história. (OGLIARI 2008, p.50)

O mundo globalizado trouxe dentre outras comodidades, a facilidade de acesso às tecnologias, calculadoras, celulares, computadores, acesso à informação, internet, etc. Tais facilidades despertam no aluno a ideia equivocada de que os conhecimentos matemáticos não são mais tão necessários, já que os recursos tecnológicos são desenvolvidos para facilitar a vida do homem e com eles podemos realizar cálculos facilmente, o que é um equívoco, pois a inabilidade com a ciência produz a utilização inadequada dos recursos.

Ainda sobre o assunto, OGLIARI trata:

> [...] Enquanto isso, temos hoje muitos estudantes que acreditam não necessitar mais da bagagem de conteúdos de Matemática que lhes foi ensinada na escola. Rever o currículo e planejar reformas talvez não seja a solução para eles nesse momento. Além disso, o professor de Matemática parece ter perdido o contato com seus alunos, não sabendo mais o que realmente será útil para eles e como estariam compreendendo os conteúdos propostos em sala de aula. (OGLIARI 2008, p.10)

Do exposto, a Matemática está presente desde o desenvolvimento das grandes tecnologias até nas pequenas interações sociais, daí sua importância para qualquer indivíduo. Renegar a sua importância é um equívoco, que pode trazer consequências devastadoras na formação dos indivíduos.

2.2 Formação do Pedagogo

Graças á dinâmica proporcionado pelo sistema capitalista, no qual é caracterizado por um sistema de mudanças rápidas e transformações constantes, que houve uma ampliação do campo de visão sobre o campo de atuação profissional de pedagogia, que extrapolam o ambiente escolar, trazendo novas perspectivas de atuação profissional aos pedagogos, ou seja, o pedagogo é um profissional com habilidades para atuar nos mais variados ambientes não escolares, dado sua formação diversificada, voltando-se para o desenvolvimento educacional do ser humano. Contrariando a ideia mistificada que o profissional egresso do curso de pedagogia está fadado a atuar como docente.

Ainda sobre o assunto, LEMOS & CABRAL transcreve:

> A pedagogia, ao adaptar-se às necessidades impostas pela sociedade atual, que se caracteriza pelas rápidas mudanças e constantes transformações demandadas a partir da estrutura capitalista de produção derivada da revolução industrial, possibilitou aos estudiosos do campo educacional a ampliação da visão sobre o campo de atuação do pedagogo para além dos espaços escolares, estabelecendo uma nova perspectiva para atuação do profissional formado nos cursos de pedagogia. Esta nova configuração está desmistificando a ideia de que o ramo de atuação do egresso do referido curso encontrasse voltado apenas para atuar como docente, proporcionando, com isso, a ampliação dos espaços de atuação para o pedagogo, os quais passam a exercer sua atividade profissional em ambientes não escolares diversificados, por possuírem a atividade pedagógica como base para o desempenho de sua atividade laboral. (LEMOS & CABRAL 2015, pg.08)

Brasil (2006) Art. 2º As Diretrizes Curriculares para o curso de Pedagogia aplicam-se à formação inicial para o exercício da docência na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos cursos de Ensino Médio, na modalidade Normal, e em cursos de Educação Profissional na área de serviços e apoio escolar, bem como em outras áreas nas quais sejam previstos conhecimentos pedagógicos. § 1º Compreende-se a docência como ação educativa e processo pedagógico metódico e intencional, construído em relações sociais, étnico-raciais e produtivas, as quais influenciam conceitos, princípios e objetivos da Pedagogia, desenvolvendo-se na articulação entre conhecimentos científicos e culturais, valores éticos e estéticos inerentes a processos de aprendizagem, de socialização e de construção do conhecimento, no âmbito do diálogo entre diferentes visões de mundo. § 2º O curso de Pedagogia, por meio de estudos teórico-práticos, investigação e reflexão crítica, propiciará: I - o planejamento, execução e avaliação de atividades educativas; II - a aplicação ao campo da educação, de contribuições, entre outras, de conhecimentos como o filosófico, o histórico, o antropológico, o ambiental-ecológico, o psicológico, o linguístico, o sociológico, o político, o econômico, o cultural. Art. 3º O estudante de Pedagogia trabalhará com um repertório de informações e habilidades composto por pluralidade de conhecimentos teóricos e práticos, cuja consolidação será proporcionada no exercício da profissão, fundamentando-se em princípios de interdisciplinaridade, contextualização, democratização, pertinência e relevância social, ética e sensibilidade afetiva e estética. Parágrafo único. Para a formação do licenciado em Pedagogia é central: I - o conhecimento da escola como organização complexa que tem a função de promover a educação para e na cidadania; II - a pesquisa, a análise e a aplicação dos resultados de investigações de interesse da área educacional (BRASIL, 2006).

Ao falarmos dos profissionais de pedagogia, a primeira ideia que vem na cabeça é daquele profissional que atua nas escolas, pois bem ao contrário que muitos pensam, esses profissionais vêm ganhando mercado e se destacado em vários ramos, desde grandes empresas até hospitais, alcançando espaços inéditos indo ao encontro dos novos paradigmas da sociedade contemporânea, utilizando-se de seus conhecimentos na área da educação para melhorar os ambientes nos quais estão inseridos.

De acordo com LEMOS & CABRAL:

> Ao relatar as mudanças ocorridas a partir da década de 90, percebe-se que o papel do pedagogo começa a se expandir na direção do campo de atuação não escolar, pois, sua formação generalista permite que o graduado, ao sair da academia com um conhecimento amplo, seja capaz de ultrapassar os limites da escola, chegando a espaços como hospitais, empresas, espaços socioeducativos, etc. Contudo, esse profissional, durante a graduação, não possui disciplinas específicas para atuação em tal área. Com isso, ao adentrar em um dos novos espaços, o pedagogo necessita de buscar por si o conhecimento que necessita para uma atuação profissional de qualidade. (LEMOS & CABRAL 2015, pg. 07)

Mesmo no ambiente escolar, o pedagogo tem uma variedade muito grande de possibilidades de atuação, podendo atuar na docência, administração escolar, supervisão escolar, educação especial, e orientação educacional, sendo a docência apenas uma pequena parcela das possibilidades de atuação deste profissional. Ao enveredar pelos caminhos da docência, este profissional detém competências para atuar na docência da educação infantil, nos anos iniciais do ensino fundamental, nas disciplinas pedagógicas no ensino médio, na modalidade normal ou educação de jovens e adultos, e na educação profissional.

De fato a diversificação das possibilidades de atuação no mercado de trabalho, alcançadas nas últimas décadas, é uma conquista bastante importante para este profissional. Mas deve-se atentar, para o grau de comprometimento que as instituições de ensino estão tendo ao formar estes profissionais para diversidade tão grande de competências. O que nos leva a crê que com um leque tão vasto de atuação deste profissional, exige que sua formação seja flexível e multidisciplinar, mas nem sempre as instituições de ensino superior conseguirão prepará-los em sua plenitude para atuarem em todas as áreas.

Deve-se dar uma atenção especial na formação dos profissionais que atuaram na docência das séries iniciais, pois estes profissionais são responsáveis em dar inicio no processo educativo de crianças que estão em processo de formação intelectual, que em sua maioria são formados por profissionais formados em pedagogia. De acordo com as notas estatísticas do censo escolar de 2016, elaborado pelo INEP, cerca de 752,3 mil professores atuam nos anos iniciais do ensino fundamental. Destes cerca de 74,8% possuem nível superior completo, 14% têm o curso de magistério, 4,4% possuem o nível médio completo, e 0,2% nível fundamental completo.

Outro fato alarmante, e que os profissionais que por ventura vierem atuar na docência nas séries iniciais, em sua grande maioria, adquirem nos seus cursos o conhecimento necessário de como ensinar, sendo renegado o que ensinar. Ao ingressar na docência nas séries iniciais, os profissionais de pedagogia, se deparam na maioria das vezes, com a missão de lecionar todas as disciplinas do currículo básico, seria um tanto plausível que houvesse nos cursos pedagogia uma formação balanceada entre as disciplinas clássicas, como filosofia, geografia, sociologia, história e as disciplinas de conteúdos específicos, como a matemática e língua portuguesa. No entanto, o que se vê na maioria dos cursos de pedagogia a inexistência tal equilíbrio.

2.3 A Formação do Pedagogo para o Ensino de Matemática

Apesar do Pedagogo não se intitular professor de matemática, está implícito que o mesmo desempenha um papel importantíssimo na construção do conhecimento matemático, pois o mesmo é responsável pela docência da disciplina em uma parcela considerável da educação básica, ao lidar com o ensino da Matemática nas séries iniciais. Para tanto, é necessário que haja uma formação sólida, no que tange a Matemática, pedagogicamente, metodologicamente e não devemos esquecer os conhecimentos específicos da disciplina, apenas desta forma iremos superar o fracasso da Matemática.

Segundo ROCHA:

> Esta relação é válida para qualquer curso de formação de professores, e no caso dos professores “polivalentes” para as séries iniciais, por exemplo, os conteúdos de Matemática devem ser dominados como “objetos de ensino” tanto, quanto, os didáticos e pedagógicos, os quais possibilitam de forma adequada o desenvolvimento dessa disciplina. Se quisermos resolver o problema que envolve o ensino de Matemática nos Ciclos I e II, este é um dos caminhos prováveis, a serem perseguidos, visando à superação do fracasso escolar relativos a essa disciplina no Ensino Fundamental. (ROCHA 2005, p.25)

Portanto, a construção dos conhecimentos específicos da matemática, sobre os assuntos a serem abordados nas séries iniciais, deve deter um lugar de destaque na formação dos pedagogos.

MONTIBELLER relata

> A nosso ver, os professores, além de uma formação pedagógica que sustenta suas práticas, (Filosofia da Educação, Psicologia da Educação, História da Educação, Didática, Estrutura, e Práticas de Ensino), também necessitam dos saberes e metodologias do ensino de disciplinas básicas (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História e Geografia), do sistema educacional brasileiro e das legislações. (MONTIBELLER 2015, p.6)

Santos (2015), em sua obra, afirma que o Pedagogo ao ensinar matemática enfrenta desafios de ordens: didático e epistemológico. "Didático, porque o professor ainda apresenta uma metodologia instrucional, e menos construtivista, epistemológico porque faz-se necessário desenvolver conhecimentos matemáticos ainda elementares desde sua escolarização básica.

As instituições de ensino superior são responsáveis pela formação inicial de seus discentes, devendo ela construir os conhecimentos necessários para o exercício da profissão de quem se pretende instruir. Mas nos cursos de pedagogia, subtende-se que os conteúdos específicos para lecionar matemática nas séries iniciais, já estejam construídos na cabeça do seu alunado, uma vez que este conteúdo já foi abordado na educação básica deste profissional, ficando de certa forma renegado estes conceitos.

Para MONTIBELLER:

> Embora o curso de Pedagogia seja o lócus responsável pela formação inicial do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental, os conteúdos específicos ou áreas de conhecimento de cada disciplina dos anos iniciais, não estão contemplados explicitamente. A formação e concepção desses saberes matemáticos dos futuros professores estão ligados aos saberes adquiridos do período da escolarização básica, e reconstruídos na prática diária. (MONTIBELLER 2015, p. 52)

De acordo com Curi (2005), tendo como referência suas pesquisas, onde o autor é taxativo ao afirmar que a maioria dos cursos de Pedagogia, cerca de 90% tem as disciplinas metodológicas como essenciais à formação de professores, deixando para um segundo plano o conteúdo de Matemática em suas grades curriculares.

Curi levanta o seguinte

> [...] é possível considerar que os futuros professores concluem cursos de formação sem conhecimentos de conteúdos matemáticos com os quais irão trabalhar tanto no que concerne a conceitos quanto a procedimentos, como também da própria linguagem matemática que utilizarão em sua prática docente. Em outras palavras, parece haver uma concepção dominante de que o

> professor polivalente não precisa 'saber Matemática' e que basta saber como ensiná-la (CURI, 2005, p. 69).

Bezerra (2015), em seu trabalho reforça o exposto acima, quando ao analisar as grades curriculares dos cursos de Pedagogia das maiores universidades do estado do Paraná, onde percebeu que existe uma quantidade reduzida de horas destinadas ao aprendizado da matemática.

É básico que todo professor tenha como competência, o domínio do conteúdo a ser ministrado, para então construir a competência pedagógica e metodológica do assunto. Mas a realidade que os cursos de formação de pedagogia e magistério, vêm dando ênfase nas disciplinas pedagógicas e ignorando os conhecimentos das disciplinas específicas a serem ministradas nas séries iniciais. Promovendo uma formação deficiente nestes profissionais, que consequentemente refletirá no desenvolvimento do seu trabalho em sala de aula.

Ainda sobre o assunto Lima, reflete que

> Na sua maioria professores de séries iniciais são habilitados em cursos de pedagogia e magistério, tais cursos deixam a desejar quanto à formação do professor em relação ao conhecimento específico de cada disciplina, preocupando-se em geral com a parte pedagógica. Desta forma professores das primeiras séries do Ensino Fundamental se deparam com a dificuldade de desenvolver conceitos específicos, principalmente ao tratar da matemática. (LIMA 2006, p. 32)

Existe um agravante causado pelo círculo vicioso existente na educação brasileira no que tange a disciplina matemática, uma vez que os discentes de pedagogia que futuramente atuarão como docentes, outrora foram os estudantes na educação básica, que sentia dificuldades no aprendizado na matemática. Indo além, o estudante não recebeu o tratamento adequado durante sua educação básica, para eliminar as barreiras do aprendizado da matemática, e tão pouco foi dado ênfase na sua formação superior, que reflete na formação dos professores que atuarão ensinando Matemática, e que não terão domínio sobre o assunto a serem ministrados.

Em sua pesquisa, COSTA & CUNHA descreve

> É bastante comum encontrar alunos egressos de cursos de Pedagogia que iniciam suas carreiras docentes nas séries iniciais com muitas dificuldades conceituais e metodológicas em relação aos conteúdos matemáticos. Como afirma uma egressa do curso investigado: "Quando eu comecei a ensinar Matemática, não tinha a menor habilidade com a disciplina, tampouco sabia como me conduzir na preparação das aulas. Já estou a três anos atuando, mas minha dificuldade ainda é grande em preparar atividades matemáticas para despertar uma aprendizagem que seja significativa para os alunos". Ela complementa: "Conclui o curso de Pedagogia sem saber Matemática, pois tivemos apenas duas disciplinas de Matemática no curso, mas eu acho que não foi suficiente, nem para mim, nem para os meus colegas de curso, que

> também estão sentindo muita dificuldade em ensinar esta disciplina". (COSTA & CUNHA 2008, p. 03)

Deve-se atentar que ao ingressar no curso de pedagogia, existe uma série de fatores que leva o estudante a escolha de seu curso superior, aptidão, facilidade de acesso, custo do curso, já está inserido no mercado de trabalho atuando como docente, e o fato dos docentes acharem que o curso não ter nenhuma relação com a Matemática. Mais uma vez evidenciando que a aversão à disciplina matemática tende a guiar a decisões dos estudantes.

Ao abordar o assunto, COSTA & CUNHA apota que

> Na condição de futura professora de Matemática, sempre me chamava atenção o medo e a aversão demonstrados por alunos do curso de Licenciatura em Pedagogia em relação aos conteúdos e disciplinas de Matemáticas. Era bastante comum escutá-los dizer que "Matemática é coisa de gênio", ou ainda, "Optei pela Pedagogia porque quase não se estuda Matemática". (COSTA & CUNHA 2008, p. 01)

Parte desta distorção está atrelada a vasta grade curricular dos cursos de pedagogia, que tenta formar em no máximo quatro anos um profissional polivalente, e não permite a inserção de outras disciplinas no currículo, mas não devemos deixar despercebido que a omissão de certos conhecimentos matemáticos no curso de pedagogia, pode de certa forma contribuir para insucesso da Matemática, uma vez que estes futuros profissionais muitas das vezes não possuem os conhecimentos básicos com a disciplina.

MATOS implica que

> A falta de tempo dentro do curso de Pedagogia para se trabalhar mais a matemática, se dar por uma grande diversidade de disciplinas e seu currículo não comportar mais a inclusão de outras disciplinas. Porém com relação a Ensino da Matemática, é mais grave porque como percebemos em nossas observações os alunos são muitos inseguros com relação à disciplina, pelos traumas vivenciados durante a escola, que não refletem bem quando chegam à graduação. (MATOS 2016, p.40)

Não se deve negar a importância das metodologias específicas para formação do docente, nem tão pouco dos conhecimentos pedagógicos, mas estes de forma alguma sobrepõem os conhecimentos específicos. Todos têm sua importância na construção dos saberes docentes, não podendo excluir nenhum do processo formativo do pedagogo.

3. A PESQUISA

Para o desenvolvimento do trabalho, utilizamos como objeto de pesquisa os alunos do Curso de Pedagogia do Instituto de Ensino Superior Franciscano (IESF). O Instituto surgiu no cenário maranhense na década de 80 no município de Paço de Lumiar - MA, sendo uma das mais importantes instituições de ensino da região. Em março de 2009, inicia a primeira turma de Pedagogia do Instituto, coordenada pela Profª. Esp. Jeruza Maria Ribeiro Simões e sob a Direção da Profª Dr. Honorina Maria Simões Carneiro.

Atualmente, desenvolve atividades acadêmicas nas seguintes áreas: Ciências Humanas (Licenciatura em Pedagogia); Ciências Sociais Aplicadas (Bacharel em Administração, Bacharel em Contabilidade, e Bacharel em Serviço Social); Ciências da Saúde (Curso de Bacharel em Enfermagem e Licenciatura em Educação Física) e Cursos Superiores Tecnológicos (Logística), além da Formação Pedagógica para Graduados não Licenciados. No qual detém lugar de destaque no ensino superior no estado do Maranhão, configurando entre as três instituições mais bem conceituadas, no Índice Geral de Cursos (IGC) de acordo com a última avaliação do Ministério da Educação (MEC).

Avaliando o projeto político e pedagógico do Curso de Pedagogia do Instituto Superior de Ensino Franciscano, observou-se que o Curso de Pedagogia possui uma carga horaria total de 3300 horas, destas apenas 120 horas têm alguma relação com a matemática, dividida em duas disciplinas: Fundamentos Metodológicos do Ensino da Matemática e Estatística Aplicada à Educação.

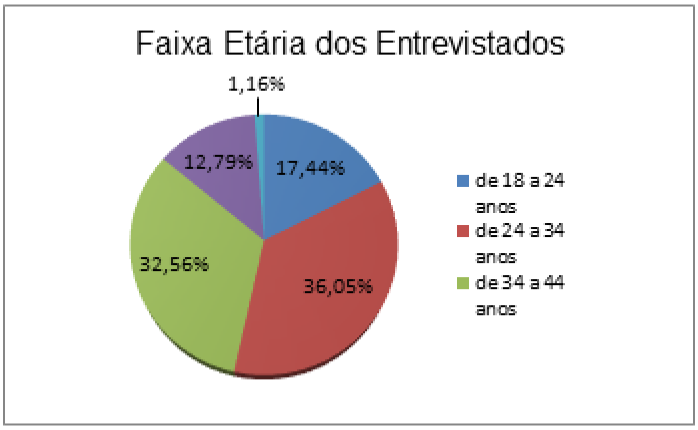
Ao desmiuçar os planos das disciplinas, deparamos com a constante realidade dos Cursos de Pedagogia, pois as disciplinas em questão não abordam os conteúdos que serão ministrados nas séries iniciais. Onde se pode supor que os estudantes do Curso de Pedagogia dominem estes conteúdos, competindo o Curso de Pedagogia trabalhar apenas a metodologia de ensino.

3.1 Percepção dos Estudantes do Curso de Pedagogia acerca do Ensino da Matemática

Com intuito de compreender melhor, como os futuros Pedagogos entendem a relação da disciplina Matemática com a profissão que eles escolheram, optou-se por realizar a aplicação de um questionário. Foi escolhido como público alvo os estudantes que já cursaram as disciplinas que têm alguma correlação com a Matemática, do universo de 540 (quinhentos e quarenta) estudantes, aplicou-se o questionário a uma amostra de 86 (oitenta e seis) estudantes, do qual segues os resultados.

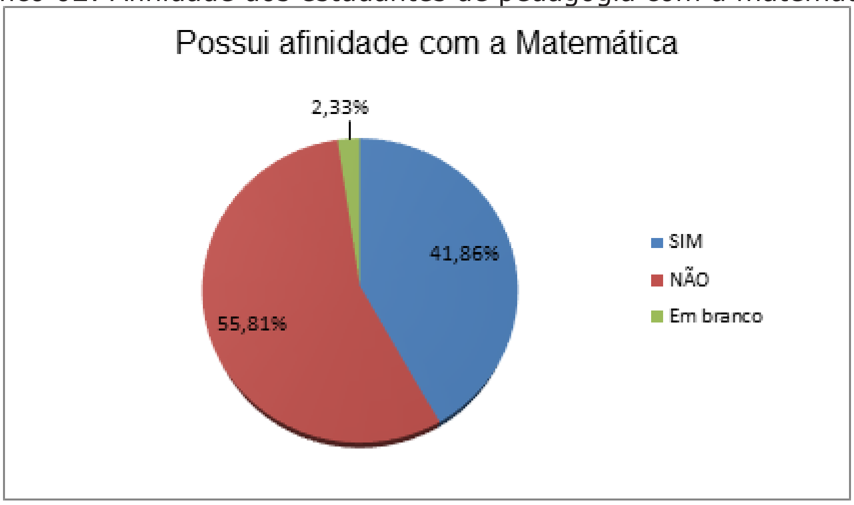
Ao avaliar a amostra, procurou-se conhecer os estudantes, onde o primeiro passo foi averiguar a distribuição etária da amostra. No qual foi constatado que maior parte dos entrevistados encontra-se entre 24 (vinte e quatro) á 44 (quarenta quatro) anos, cerca 68,6 %, que é uma parcela considerável. É importante analisar a faixa etária dos estudantes, pois o fator idade está diretamente relacionado para avaliar se o estudante está inserido na parcela ativa da população. Conforme gráfico a seguir:

Gráfico 01: Faixa etária dos entrevistados.



Outro fato importantíssimo para o desenvolvimento deste trabalho é avaliar a afinidade dos futuros professores com a disciplina Matemática, pois a afinidade com a disciplina está diretamente relacionada com a qualidade das aulas que o profissional irá ministrar. Conforme gráfico abaixo, em torno de 55,81% dos educandos não possui afinidade com a Matemática, que é um dado alarmante, pois a maioria dos estudantes de Pedagogia atuarão como docentes, onde terão crianças sob seus cuidados.

Gráfico 02: Afinidade dos estudantes de pedagogia com a matemática.



Buscou-se inferir qual a percepção dos estudantes de Pedagogia, sobre a importância das disciplinas que abordam a Matemática, no curriculum do Curso de Pedagogia e consequentemente na formação deste profissional. Como pode ser visto no gráfico a seguir, onde cerca de 93,02% concordam ao menos em parte e 81,40 % concordam plenamente, que o estudo da Matemática é importante para sua formação.

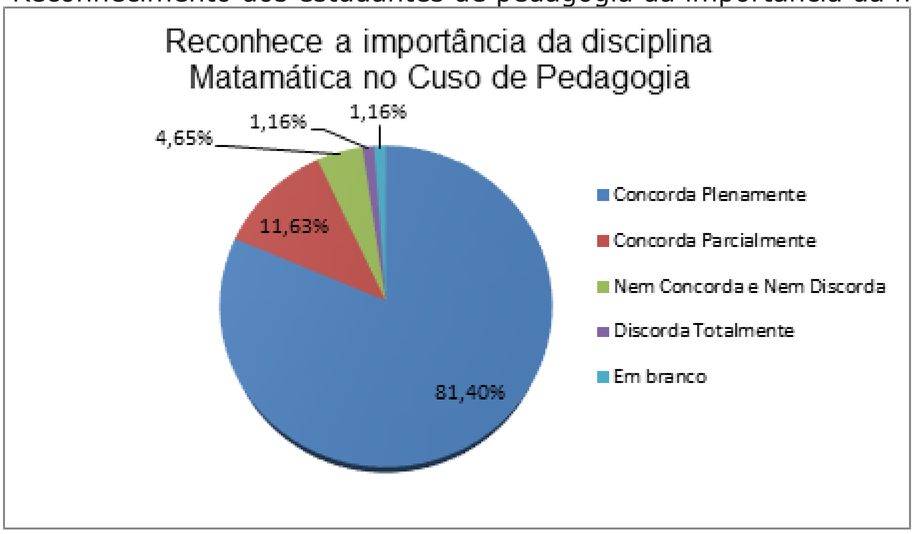
Apesar dos estudantes de pedagogia, considerarem a matemática importante para sua formação, não é incomum encontrarmos relatos de estudantes que enveredam por esta profissão sentirem aversão pela disciplina, ao ponto de temerem a disciplina, e acreditarem que conseguirão evitá-la em sua vida profissional. É importante ressaltar que esta aversão à disciplina não é adquirida da noite para o dia, a mesma vem se acumulando durante as várias frustrações ocorridas na vida escolar destes estudantes, ressoando em suas atitudes.

Além do receio com a disciplina, e consequentemente dificuldade com manuseio dos conceitos matemáticos causada pela educação básica falha, vivenciado por grande parte destes estudantes, existe uma barreira que se perpetuou na mente destes, e talvez seja a mais difícil de transpassar e a mais danosa, é construção do conceito que a matemática é difícil. Este conceito pode trazer efeitos desastrosos na formação dos futuros pedagogos e consequentemente na mente de várias crianças.

Sobre o assunto, FIORENTINI transcreve

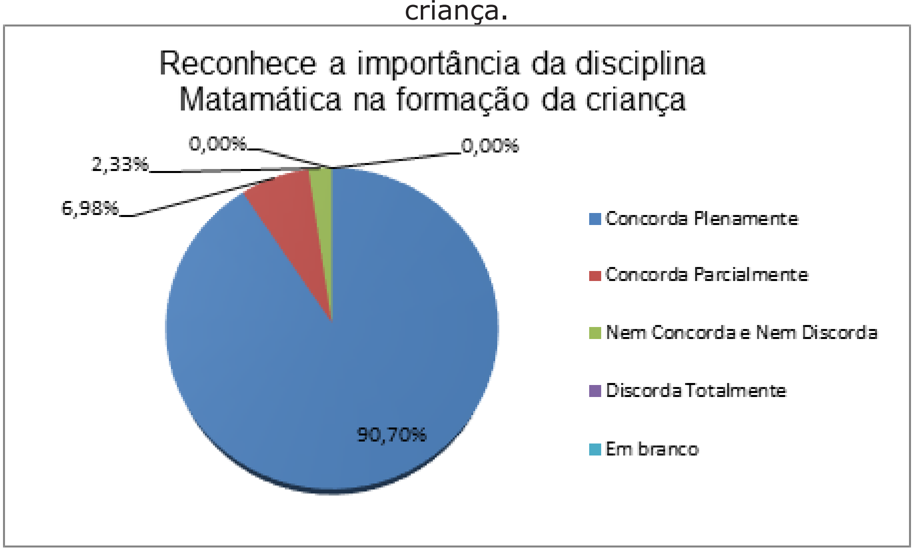
> Além da falta de um domínio conceitual da Matemática, os alunos-docentes que ingressam nesses cursos de formação docente trazem crenças e atitudes geralmente negativas e preconceituosas em relação a Matemática e seu ensino. Relação essa decorrente de uma história de fracasso escolar e da construção de uma imagem de que a Matemática é difícil e que nem todos são capazes de aprendê-la. O não enfrentamento ou tratamento desse problema, durante a formação inicial, tem sérias implicações na prática docente desses alunos e alunas (FIORENTINI, 2008, p. 57).

Gráfico 03: Reconhecimento dos estudantes de pedagogia da importância da matemática.



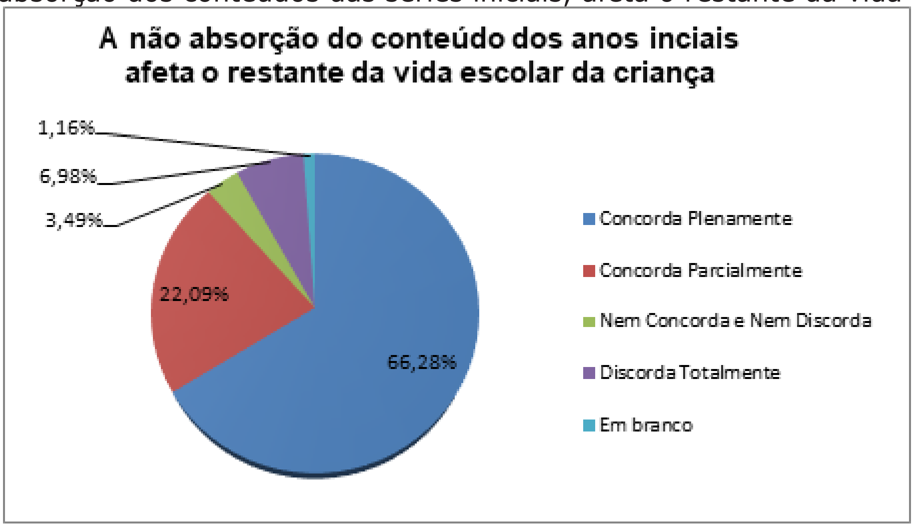
Ao indagar, na percepção dos entrevistados, se a Matemática é importante para o desenvolvimento da criança, com base no gráfico a seguir, cerca de 97,67% dos entrevistados concorda ao menos em parte que a Matemática tem importância na educação da criança e 90,7% concordam plenamente na importância da Matemática, e consequentemente em toda sua vida. É importante ressaltar que os futuros educadores têm ciência da responsabilidade que está em suas mãos, enquanto agentes formadores.

Gráfico 04: Reconhecimento dos estudantes de pedagogia da importância da matemática na formação da criança.



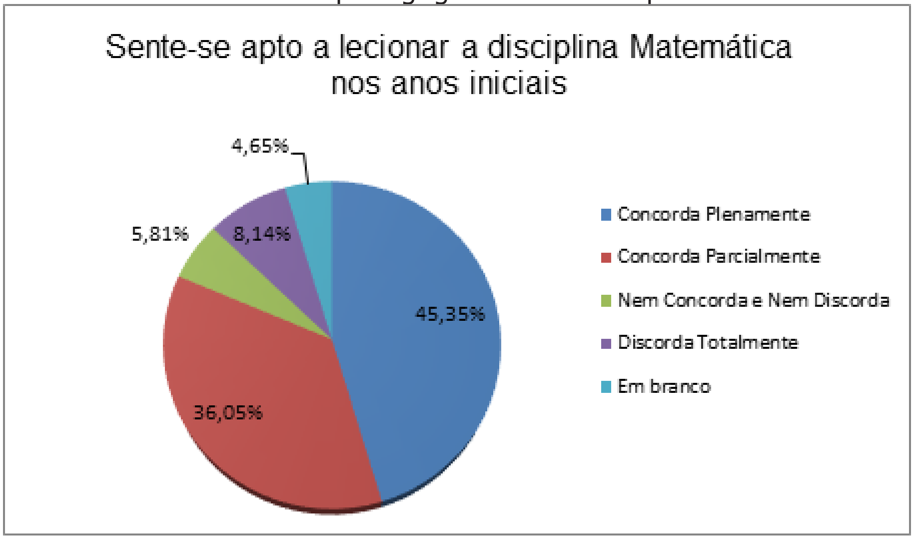
Os futuros profissionais também foram questionados se os alunos que não absorveram os conteúdos matemáticos nos anos iniciais em sua plenitude sentiram dificuldades no restante de sua vida escolar. De acordo com as informações recolhidas, na opinião da maioria dos entrevistados, cerca de 88,37% dos entrevistados, concordam ao menos em partes com a afirmação.

Gráfico 05: A não absorção dos conteúdos das séries iniciais, afeta o restante da vida escolar da criança.



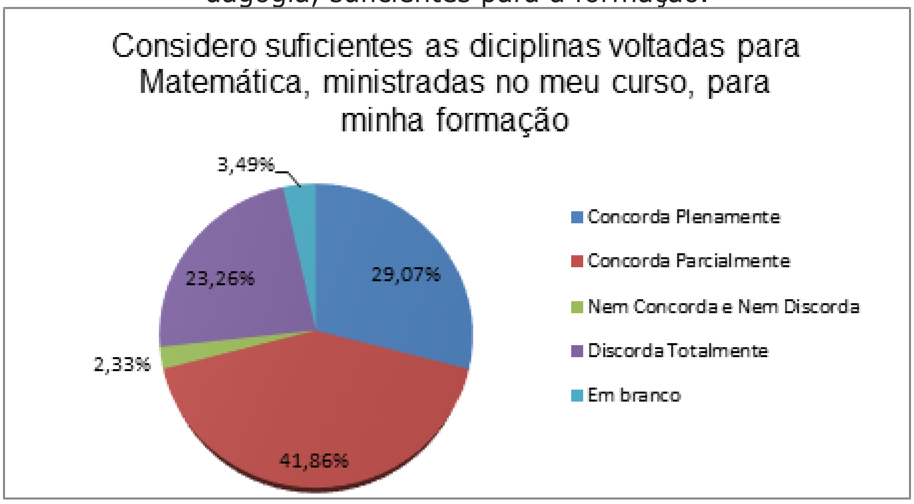
Ao investigar o quão aptos, os futuros Pedagogos se sentem para ministrar aulas nos anos iniciais, no que tange a disciplina Matemática, apenas 45,35% dos entrevistados têm completa convicção sobre sua aptidão para o ensino da disciplina Matemática. Segue abaixo o gráfico com a compilação das respostas dos entrevistados.

Gráfico 06: Se os estudantes de pedagogia se sentem aptos a lecionar matemática.



Ao indagar o quão os estudantes de Pedagogia avaliam as disciplinas voltadas para matemática, ministradas no seu Curso de Pedagogia, como suficientes para sua preparação para vida profissional, quanto professor nos anos iniciais, com base no gráfico a seguir, apenas 29,01% dos entrevistados concordam em plenitude com a acessão. Este número é relativamente baixo, dado a importância Matemática na vida do indivíduo que ficará aos cuidados deste profissional.

Gráfico 7: O quão os estudantes de pedagogia consideram que as disciplinas voltadas para o curso de pedagogia, suficientes para a formação.



Foi perguntado aos estudantes se além da disciplina Fundamentos Metodológicos do Ensino da Matemática, seria de grande valia a inserção de outras disciplinas, onde nestas seriam abordados os assuntos que os futuros professores irão ministrar na disciplina Matemática. No qual mais de 87% dos entrevistados, veem com bons olhos a proposta, segue o gráfico com os percentuais respondidos. No qual descrevo alguns relatos:

- ***Discente A:*** *"Acho que deveria ter outro curso na área que nos prepare melhor para atuar em sala de aula, no que se refere à matemática".*

- ***Discente B:*** *"Achei útil, porém esperava mais acerca da disciplina no desenvolver das aulas".*

- ***Discente C:****"A disciplina teria que ser mais aprofundada, não dando apenas ênfase a metodologia de ensino e sim aos principais conteúdos que são estudados no ensino fundamental menor (1º ao 5º ano)".*

- ***Discente D:*** *"A disciplina de Matemática não foi eficiente, temos que aprender o básico, ter base na formação de pedagogos, deixaram a desejar, por que sairemos sem saber matemática, de forma que não conseguiremos ensinar essa disciplina às crianças".*

- ***Discente E:*** *"Acredito que a formação de Pedagogia poderia ser mais ampla para capacitação de professor para ministrar aulas de Matemática. Acredito que a disciplina é complexa e merece a devida atenção, pois o número de alunos com dificuldade em aprender matemática é grande e isso se dá ao fato dos professores não saber ensinar".*

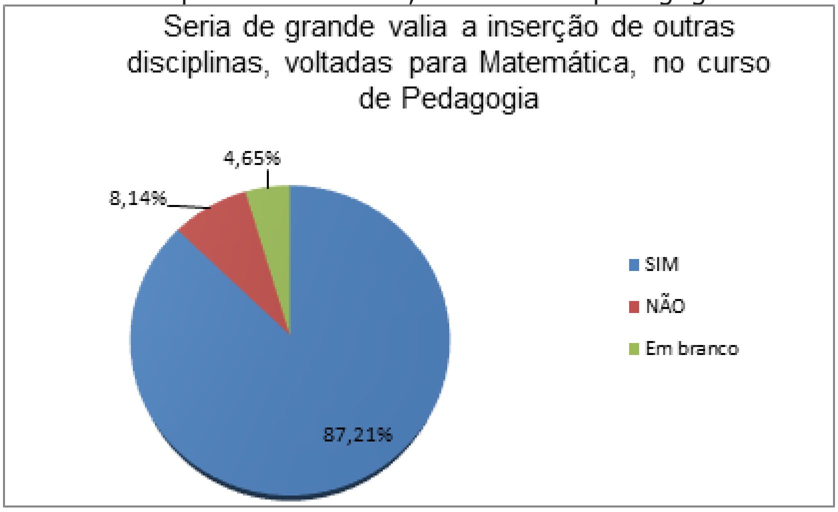
- ***Discente F:*** *"Esta disciplina somou bastante em minha graduação, mas é importante ter outras disciplinas voltadas para o ensino da matemática, pois acho a mesma muito dificultosa e estressante. Então tendo novas disciplinas nesse conceito exercitamos muito mais e aprendemos melhor para ensinar com mais qualidade".*

- ***Discente G:*** *"Como falei em outra questão é importante, porém é muito superficial, outros estudos devem ser feitos para que o currículo da escola seja suprido em relação a disciplina da matemática".*

- ***Discente H:*** *"Seria de grande relevância que os ensinamentos da matemática fossem mais aprofundados dento do curso de pedagogia, afinal a formação em pedagogia é a base da educação".*

- ***Discente I:*** *"Deixa a desejar, deveria ser ministrado uma disciplina de assunto envolvendo a matemática na educação infantil que fosse especifica para ser lecionada para as crianças".*

Gráfico 8: O Quão os estudantes de pedagogia consideram importante a inserção de outras disciplinas voltadas para matemática, no curso de pedagogia.



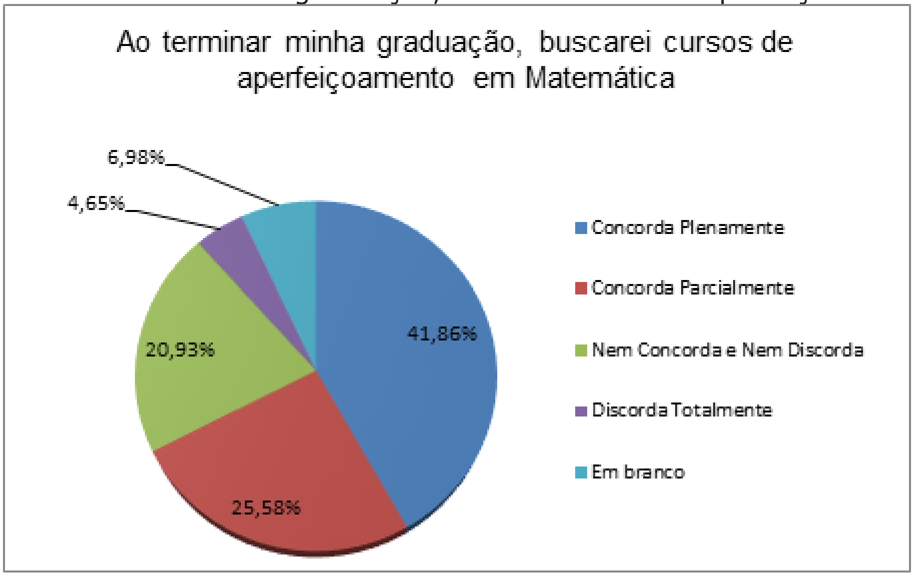
Logo após foi pedido que os mesmos justificassem sua resposta, do qual seguem algumas:

- ***Discente C:*** *"Ajudaria a complementar a disciplina Fundamentos da Metodologia do Ensino da Matemática, pois não é suficiente só o que está nesta disciplina."*
- ***Discente G:*** *"Pois a disciplina só trabalhou metodologias, e os conteúdos a serem ministrados não foram trabalhados, e deveriam."*
- ***Discente I:*** *"Acho importante ter outras disciplinas abordando a matemática, pois acho uma disciplina difícil."*
- ***Discente L:*** *"A carga horária da disciplina é muito pequena, não supre a demanda da disciplina."*
- ***Discente M:*** *"Pois a carência por parte dos formandos é exorbitante, por conta das fundamentações básicas fracas."*
- ***Discente N:*** *"Eu acho que sim, já que muitos colegas não sabem nem manusear objetos como compasso, jogo de esquadros..."*

Foi observado na maioria das respostas dadas, que a disciplina Fundamentos da Metodologia do Ensino da Matemática é importante para formação dos Pedagogos, mas existe uma carência de disciplinas que complemente a formação matemática, no que tange os conhecimentos específicos da disciplina, dos futuros professores.

Por fim, os entrevistados foram questionados sobre a sua intenção em continuar os estudos depois de formados, buscando cursos de aperfeiçoamento voltados para o ensino na Matemática nas séries iniciais, onde 67,44% dos entrevistados concordam em parte.

Gráfico 9: Os estudantes ao terminar a graduação, buscará cursos de aperfeiçoamento em matemática.



Ao analisarmos o contexto geral dos estudantes de Pedagogia, foco da pesquisa, percebeu-se que em sua maioria entendem a importância da Matemática para sociedade e consequente para sua formação, e isso é um fator importante para inquietação dos futuros Pedagogos com relação o ensino da disciplina, que reflete na pretensão de buscar novas fontes de conhecimento após a formação. O ideal é que as instituições de ensino partilhem desta preocupação, e tenham a iniciativa de enfatizar na formação dos Pedagogos os conhecimentos específicos para o ensino da Matemática.

3.3 Situações Problemas

Num segundo momento aplicou-se oito situações-problemas para uma parcela dos estudantes respondentes do questionário anteriormente citado, no qual foram selecionados 20 discentes, aleatoriamente, dentre os respondentes, com o propósito de verificar os níveis de conhecimento, conteúdos acerca de números e operações com números naturais, espaço e forma, grandezas e medidas, e tratamento da informação.

A seleção das questões baseou-se nos conteúdos matemáticos abordados nos anos iniciais do ensino fundamental, deve-se levar em conta que apesar dos discentes já estarem nos últimos períodos do curso de pedagogia, curso de nível superior, não se utilizou questões com os assuntos abordados de nível médio, afinal o intuito da pesquisa não é aferir o nível dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, que logicamente devem ir além dos conhecimentos exigidos para os alunos das séries iniciais do ensino fundamental, mas sim averiguar os conhecimentos matemáticos dos estudantes acerca dos assuntos que estudantes irão trabalhar em sua vida profissional, como docentes das séries iniciais.

Na elaboração das situações-problemas, evitou-se o uso de questões complexas, adotou-se a postura de não utilizar questões polêmicas, buscou-se ao máximo contextualizar as questões a problemas rotineiros e de fácil abstração, adoção de questões autoexplicativas, e de forma alguma foi utilizado questões escorregadias que complicassem a interpretação. Pois o intuito do questionário é levantar o que realmente os estudantes sabem dos assuntos que irão abordar em sala de aula.

Deve-se considerar que dentre os vários saberes docentes, o saber especifico da disciplina detém seu lugar de destaque, pois é com base nele que o professor trabalhará as metodologias necessárias para o ensino da disciplina, evidentemente ensinar de forma que torne os discentes protagonistas do processo ensino-aprendizagem, exigem do professor saberes que vão além dos saberes específicos, mas isso não renega a necessidade do domínio dos saberes específicos por parte do docente, afinal não se pode ensinar aquilo que ainda não está claro.

Na elaboração das 8 (oito) questões, buscou-se ao máximo abordar os quatro conteúdos tidos nos PCN como básicos para os currículos do ensino fundamental, números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, e tratamento da informação. No qual os resultados compilaram a tabela abaixo:

QUESTÕES	**RESPOSTAS**					
	CERTAS	%	ERRADAS	%	N. RESP.	%
1	10	50,00%	7	35,00%	3	15,00%
2	1	5,00%	19	95,00%	0	0,00%
3	10	50,00%	5	25,00%	5	25,00%
4	20	100,00%	0	0,00%	0	0,00%
5	20	100,00%	0	0,00%	0	0,00%
6	12	60,00%	7	35,00%	1	5,00%
7	11	55,00%	7	35,00%	2	10,00%
8	8	40,00%	8	40,00%	4	20,00%

Os dados obtidos serviram de base para a construção de uma proposta didática, visando sanar as dificuldades encontradas pelos alunos, após a aplicação da proposta didática podemos verificar uma melhora considerável do cenário.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existe uma série de fatores que colaboram para que a construção do conhecimento matemático seja deficiente, estruturais, saberes docentes, metodológicos, psicológicos, pedagógicos, etc. No trabalho buscou-se investigar a parcela que cabe aos saberes específicos da disciplina, para o insucesso da disciplina, mais precisamente o quão estão aptos os futuros professores que atuarão nas séries iniciais.

O pedagogo, como um dos principais profissionais responsável pela educação brasileira, detém uma responsabilidade muito grande nas mãos, pois o mesmo é responsável pela educação matemática das séries iniciais, portanto o responsável por despertar o gosto pela disciplina na primeira fase da educação. Esse primeiro contato, se ocorrer de forma amistosa, pode sem dúvidas contribuir significativamente para o sucesso da matemática.

No entanto, o que pode se observar é que as instituições de nível superior que formam estes profissionais, cabe ressaltar, possui um campo muito grande de atuação, não tem como foco a formação de professores que ensinam matemática. Destinando apenas uma pequena parcela da carga horária do curso para o ensino da metodologia do ensino da matemática, não havendo espaço para trabalhar os conteúdos específicos da disciplina que são necessários para formação da criança, das séries iniciais do ensino fundamental.

Ao incluir no currículo do curso de pedagogia apenas uma disciplina de metodologia do ensino da matemática, as instituições de ensino superior supõem que os discentes já detenham os conhecimentos matemáticos para a docência nas séries iniciais, é no mínimo arriscado partir desse pressuposto, uma vez que os discentes do curso de pedagogia outrora foram os estudantes da educação básica, que é amplamente divulgado pelas avaliações em larga escala, possui deficiência nos conhecimentos matemáticos.

Na pesquisa pode-se perceber que mesmo os estudantes que estão na reta final do curso de pedagogia, possuem um conhecimento deficiente nos conteúdos que devem ser abordados nas séries iniciais, lembrando-se que estes estudantes atuarão com docentes brevemente. O que não deveria ser uma barreira para estudante de nível superior, principalmente os que atuarão como professores que ensinam matemática.

A pesquisa mostro-se significante pois proporcionou uma mudança do cenário local, que ao pensarmos no contexto nacional podem ser mínimos os resultados obtidos, mas quanto olhamos para o contexto regional os resultados são bem robustos. Após os resultados da pesquisa, a instituição reformulou sua grade curricular e inseriu a disciplina Letramento Matemático, adequando os conteúdos da disciplina às novas demandas da BNCC, com isso os discentes da instituição têm mais 60 horas em seu currículo voltadas para os conteúdos específicos da disciplina. Vale ressaltar que se olharmos mais atentamente os ganhos vão além dos conteúdos específicos que são ministrados nos cursos, a inserção da disciplina proporcionou um olhar diferenciado para matemática no curso de Pedagogia, onde a mesma possui ter espaço nos eventos anuais do curso, Feiras e Mostras, que são desenvolvidas pelos alunos da instituição.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação aos fatores associados ao insucesso nesta área.** Trabalho de conclusão de curso – Matemática da Universidade Católica de Brasília. UCB. Brasília, 2006. Disponível em: http;//repositório.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1766/1/cinthia/20soares/20de/20almeida.pdf. Acesso em: 28 JUL, 2017.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: ministério da Educação, 1997.

BRASIL. Resolução CNE/CP Nº 1, de 15 de maio de 2006. Institui as diretrizes curriculares nacionais para o curso de graduação em pedagogia, licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, 16 de maio de 2006, Seção 1, p. 11.

BEZERRA, Renata Camacho; BONDEZAN, Andreia Nakamura. **O ensino da matemática no curso de pedagogia/PARFOR: refletindo a formação de professores.** Trilhas Pedagógicas, v. 5, n. 5, Ago. 2015, p. 122-133.

CENSO escolar da educação básica 2016:Notas estatísticas. Brasília: INEP, 2017.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortez, 2006.

CUNHA, Deise Rôos; COSTA, Sayonara Salvador Cabral da. **O curso de pedagogia e a formação matemática para a docência nas séries iniciais do ensino fundamental.** Trabalho apresentado no XII EBRAPEM, 2008.

CURI, E. A. **Matemática e os Professores dos anos iniciais.** São Paulo: Musa Editora, 2005.

FIORENTINI, Dário**. A pesquisa e as práticas de formação de professores de matemática em face das políticas publicas no Brasil.** Bolema, Rio Claro: UNESP, ano 21. 2008.

LEMOS, IlaneBarbosa; CABRAL, Carmen Lúcia de Oliveira. **O pedagogo e os campos de atuação não escolar: desafios/dificuldades para inserção desse profissional.** Revista Fundamentos, V.2, n.2, 2015. Revista do Departamento de Fundamentos da Educação da Universidade Federal do Piauí.

LIMA, Cristiane Scheffer da Silveira. **As dificuldades encontradas por professores no ensino de conceitos matemáticos nas séries iniciais.** Trabalho de conclusão de curso da Especialização em Educação Matemática da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, 2006.

MATOS, Fernanda Cíntia Costa. **O PEDAGOGO E O ENSINO DE MATEMÁTICA: Uma análise da formação inicial.** Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC,2016.

MACHADO, Silva Dias Alcântara. **Engenharia Didática. In: Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo/SP: EDUC, 1999

OGLIARI, Lucas Nunes. **A MATEMÁTICA NO COTIDIANO E NA SOCIEDADE:Perspectivas do aluno do ensino médio.** Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências eMatemática, da Pontifícia Universidade Católicado Rio Grande do Sul, como requisito parcialpara a obtenção do grau de Mestre emEducação em Ciências e Matemática, 2008.

PINHEIRO, Nilcéia A. M..**Educação crítico-reflexiva para um Ensino Médio Científico-Tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino aprendizagem do conhecimento matemático**. 2005. 306 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PONTE, J. P. **Matemática:** uma disciplina condenada ao insucesso. NOESIS, n. 32, 1992. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte(NOESIS).rtf>. Acesso em: set. 2017.

ROCHA, M. S..**Professores polivalentes das séries iniciais do ensino fundamental:** concepção da formação e do ensino da matemática. Campo Grande: Universidade Católica Dom Bosco, 2005 (Dissertação de Mestrado).

SAEB. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb>. Acesso em: 27 JUL. 2017.

SANTOS, Maria José Costa dos. **A formação do pedagogo para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: reflexões dedutivas e epistemológicas.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. , 14, 2015, Tuxtia Gutiérrez. Anais... Tuxtia Gutiérrez: Comité Inter-americano de Educação Matemática, 2015. Disponível em:<http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1379/530>. Acesso: 10 nov. 2015.

CAPÍTULO 12

TESTES DE PRIMALIDADE: dos métodos tradicionais aos computacionais

Marlon Maiko Barros Martins[1]

Raimundo José Barbosa Brandão[2]

1 Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). Lattes: http://lattes.cnpq.br/0862001599081724

2 Doutor em Educação Matemática, professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC. E-mail: raimundobrandao@professor.uema.br;/professorbrandao.uema@yahoo.com.br/Lattes:http://lattes.cnpq.br/1910896410830499

1. INTRODUÇÃO

Os números, quando concebidos em sua forma mais comum, remontam à ideia de contagem, um raciocínio natural para quem inicia seu processo de aprendizado em matemática. Na medida que o conhecimento se expande, o indivíduo passa a perceber que o ato de contar pode ser realizado de diversas formas, como o natural raciocínio de agrupar elementos de um conjunto para computar a quantidade destes de maneira mais ágil.

Nessa perspectiva, destacamos os números primos, um tipo peculiar de conjunto que não pode ser repartido em grupos menores, com exceção do unitário e daqueles com iguais números de elementos, ou seja, só podem ser divididos por um e por eles mesmos. Em seguida, apresentamos os testes de primalidade, por meio de uma linha histórica, delineando sua evolução deste a época da antiga Grécia até os tempos dos modernos computadores, com abordagem aos sofisticados conceitos matemáticos.

Assim, discorremos sobre alguns dos principais testes elaborados ao longo da história, a saber: a *Divisão por Tentativa*, o *Crivo de Eratóstenes*, o *Teste de Fermat*, o *Teste de Proth*, o *Teste de Pépin* e o *Teste de Lucas-Lehmer*, todos da era pré-computacional. Em seguida, expusemos alguns testes modernos da época computacional, entre eles o *Teste de Solovay-Strassen*, o *Teste de Miller-Rabin* e o *Teste AKS*, além de outros métodos computacionais também recentes, como o *Teste de Baillie – PSW*, o *Teste APR* e o *Teste ECPP (Eliptic Curve Primality Proving*).

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O processo de compreensão conceitual e procedimental para identificar números primos representa um grande desafio no ramo da Teoria dos Números. Quem inicia o estudo dos números primos precisa compreender suas características e saber identificar detalhes da matéria, aprofundando-se em aritmética, de forma a explorar argumentações, demonstrações, provas e usos específicos.

Da antiguidade ao mundo moderno, foram muitos os estudos buscando testes que comprovem a primalidade de um número natural. Após a seleção dos testes de primalidade a serem investigados, escolheu-se o tema deste trabalho, seguido pelo levantamento bibliográfico por meio de leituras de livros, artigos físicos e online, periódicos, dentre outros.

Este trabalho modulou-se em obras de autores renomados, como Coutinho e Ribenboim, que tratam de testes de primalidade sob diversos pontos de vista, como os métodos com uso de exponenciação, necessidade ou não de fatoração, algoritmos determinísticos e não determinísticos etc. Representa também uma continuidade das pesquisas com temas direcionados à localização de primos, encontradas em bancos de trabalhos acadêmicos, incluindo o repositório de dissertações do PROFMAT.

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, que representa uma etapa essencial de todo trabalho científico e exerce grande influência nas fases de uma investigação, ao passo que fundamenta teoricamente o objeto de estudo.

3. SOBRE OS NÚMEROS PRIMOS

Os números primos representam a base de formação dos demais elementos. Um número primo é aquele que só pode ser dividido por um e por si mesmo, conforme destacado por Hefez (2014, p. 140), ao definir que:

Definição. "Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de *número primo*."

Se um natural $n > 1$ não é *primo,* dizemos que n é *composto*.

Os primos são costumeiramente chamados de *átomos da aritmética*, já que representam o seu sustentáculo, posto que a construção dos números naturais depende de fatores primários. Este pensamento nos leva a um dos mais importantes resultados da Teoria dos Números, o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma o seguinte:

Teorema 1. Todo número inteiro maior do que 1 é escrito de forma única (com exceção da ordem dos fatores) como um produto de fatores primos.

Ao longo dos anos, muito se descobriu acerca dos primos, como o fato de sua quantidade ser infinita, provado por Euclides em sua obra *Os Elementos*, segundo narrado por Boyer (1974, p. 84), que nos apresenta a Proposição 20: "números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos. Isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos."

A notabilidade dos números primos reside, em grande parte, na sua localização imprevisível na cadeia de sucessão de números naturais, e por não ter sido encontrada, ainda, uma forma precisa de se identificar indefinidamente o próximo primo.

Na tentativa de localizar primos, foram propostas algumas fórmulas capazes de identificá-los, como a de Pierre de Fermat[1], que, erroneamente, foi admitida por seu autor como capaz de encontrar infinitos primos. Os *Números de Fermat,* provenientes da fórmula $F_n = 2^{2^n} + 1$, de fato são primos para valores de $n = 0,\ n = 1,\ n = 2,\ n = 3\ \ e\ n = 4$, contudo, ela falha para $n = 5$, dado que este valor representa um número composto, pois $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$, fato provado, em 1732 por Euler (HEFEZ, 2005).

Outra forma de localizar primos também foi considerada pelo francês Marin Mersenne (1588-1648), que propôs números na forma $2^m - 1$, com m primo, capazes de gerar primos, como ocorre com $m = 2$, $m = 3$ e $m = 5$, contudo isso não ocorre indefinidamente, já que, por exemplo, para $m = 11$, obtêm-se $2047 = 89 \cdot 23$. Portanto, define-se como *Número de Mersenne* números na forma $M_q = 2^q - 1$, no qual q é primo. Se M_q for primo, então será denominado *Primo de Mersenne.*

4. EVOLUÇÃO DOS TESTES DE PRIMALIDADE

Como já salientado, identificar números primos pode ser um trabalho excessivamente difícil, uma vez que é preciso fazer sucessivas divisões até concluir que não é possível encontrar fatores menores diferentes da unidade, o que implicaria na certeza de ser primo. Ante a relutante incapacidade de encontrar primos, indefinidamente, através de fórmulas, adotou-se, de milênios atrás até os dias atuais, métodos capazes de identificar estes números, os conhecidos *testes de primalidade*, através dos quais adquiriu-se mecanismos facilitadores que reduziu os árduos trabalhos de divisões contínuas. Estes testes podem ser definidos como algoritmos capazes de definir um número como primo ou composto a partir de uma sequência de ações prefixadas.

Na medida em que o conhecimento sobre os primos evoluiu, os testes de primalidade também foram aprimorados. Nesta perspectiva, podemos inseri-los em dois grandes momentos da história, o primeiro anterior ao advento do computador moderno e o segundo a partir da criação deste. Desta forma, este estudo trata dos testes desde suas formas tradicionais até os métodos computacionais.

Na era pré-computacional, foi desenvolvida uma forma trivial de testar a primalidade de um número através da realização de divisões sucessivas, por meio das quais busca-se verificar a existência de fatores primos menor que o número em teste. Quando não encontrados, teremos um primo, caso contrário, estaremos diante de um composto. Ocorre que o método descrito, apesar de funcionar eficientemente para números relativamente pequenos, torna-se bastante dispendioso à medida que a contagem aumenta.

O desenvolvimento da aritmética tornou possível a simplificação de tarefas de contagem, graças a descobertas como o lema descrito abaixo, revelado por Eratóstenes[2], matemático grego do século III a.C.

Lema 1. Seja $n \in \mathbb{N}$, se n não é um número primo, então n possui um fator primo $p \leq \sqrt{n}$.

À vista disso, no método anteriormente citado, para verificar a primalidade de determinado número, não é necessário realizar divisões sucessivas até este, basta selecionar possíveis fatores até a raiz quadrada do valor.

Um dos resultados cruciais sobre os primos que serviu de base para um sólido desenvolvimento do conhecimento acerca destes números foi o *Pequeno Teorema de Ferma*t, revelado no século XVII por aquele que leva o seu nome. Referido teorema diz o seguinte:

Teorema 2. Seja $a \in \mathbb{Z}$ e p um número primo, tem-se que p divide $a^p - a$.

Uma importante aplicação do Pequeno Teorema de Fermat é o seu uso na verificação de primos, cujos estudos serviram de base para a formulação de diversos testes de primalidade como o Teste de Lucas, Teste de Brillhart e Selfridge, Teste de Pepin, entre outros (RIBENBOIM, 2014).

Outros conceitos foram de suma importância para o desenvolvimento de testes de primalidade por intermédio do avanço da aritmética, especialmente a ideia de *congruência*, que é definida por Hefez (2014, p. 192) como "uma das noções mais fecundas da aritmética, introduzida por Gauss no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae,* de 1801. Trata-se da realização de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado."

Em geral, dizemos que os inteiros a e b são congruentes módulo m, com m natural, se os restos da divisão euclidiana de a e b por m são iguais. Em termos simbólicos, temos:

$$a \equiv b \bmod m, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$$

As aplicações dessa nova aritmética são inúmeras, dado que através de seus conceitos e propriedades, por exemplo, é possível provar que determinado número de Mersenne não é primo, que alguns números de Fermat não são primos, além de estabelecer critérios de divisibilidade por certos números. Isso mostra que o conceito de congruência revelou novas formas de testar a primalidade

Na era computacional, destacamos a rápida evolução tecnológica. Grande parte desse acentuado desenvolvimento se deve ao advento e aperfeiçoamento dos computadores.

As primeiras máquinas voltadas à realização de operações aritméticas foram as calculadoras mecânicas, cujo funcionamento permitiu ao homem executar cálculos – que na época levavam várias horas – em apenas poucos comandos. Este tipo de funcionamento representou os primórdios dos conceitos do computador moderno. Vejamos o entendimento de Wazlawick (2016) sobre o tema:

> Os séculos XVII, XVIII e XIX viram o surgimento e aperfeiçoamento das calculadoras mecânicas. A partir de trabalhos inovadores como os de Schickard, Pascal e Leibniz, máquinas capazes de realizar as quatro operações aritméticas com o simples girar de uma alavanca se tornaram realidade. Essas máquinas, bem como o tear mecânico, que usava cartões perfurados já no início do século XIX, foram fundamentais para a concepção posterior dos computadores de propósito geral [...] (WAZLAWICK, 2016, p. 27).

Alguns clássicos artifícios utilizados na facilitação de cálculos matemáticos e resolução de problemas, como a tábua de logaritmos[3], deram lugar ao poder de processamento dos computadores eletrônicos. Assim, temos a descrição de Boyer (1974) sobre a vastidão da utilidade destas máquinas:

Os computadores hoje tornaram-se tão vastos e intrincados que ultrapassam os sonhos de Babbage, que viveu um século antes de seu advento. Problemas que estavam desesperadoramente além das capacidades dos matemáticos de eras anteriores recentemente foram resolvidos com a ajuda dos computadores de alta velocidade. Se, como Kepler disse, a invenção dos logaritmos duplicou a vida de um astrônomo, quanto mais o computador eletrônico expandiu as carreiras de cientistas e matemáticos (BOYER, 1974, p. 456).

Os tradicionais métodos de localização de primos tinham, em sua maioria, funcionamento baseado em sucessivas divisões que, com a elevação dos números testados, tornavam os trabalhos operacionais excessivamente difíceis. Com a cooperação das máquinas de calcular, essas tarefas foram demasiadamente facilitadas.

5. ASPECTOS BÁSICOS DOS TESTES DE PRIMALIDADE

Os primeiros testes de primalidade adotavam o esforço mental mínimo como principal diferencial e, para tal fim, apoiavam-se em propriedades aritméticas dos números inteiros para reduzir o trabalho e o tempo de solução. Com o advento dos computadores, o tempo de cálculo foi comprimido consideravelmente, reduzindo operações, que levavam horas, para apenas poucos segundos.

A disparidade entre o poder de cálculo da mente humana e o das máquinas pode ser percebida pela análise de desempenho do precursor dos computadores

3 Tabela com correspondência entre os valores de $\log_a x\log_a x$ e $a^x a^x$, para valores de $x x$ definidos em determinado intervalo e com base $a = 10a = 10$, geralmente. Devido às propriedades operatórias dos logaritmos, estas tabelas eram utilizadas para transformar multiplicações em somas, simplificando a realização de cálculos complexos.

digitais e eletrônicos, o ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*), operado entre os anos de 1946 e 1955. Referido computador, além do grande porte físico – possuía 17 mil válvulas, 10 mil capacitores, 70 mil resistores e pesava 30 toneladas – era capaz de realizar 5 mil adições por segundo e, em termos comparativos, um cálculo que levava vinte e quatro horas manualmente era resolvido em menos de trinta segundos (MACHADO; MAIA, 2014).

O campo de desenvolvimento dos computadores esteve em ampla ascensão desde sua criação, de tal modo que a potência dessas máquinas foi elevada a níveis colossais nas últimas décadas. Segundo a TOP500[4], o computador mais rápido registrado em novembro de 2020 foi o supercomputador japonês Fugaku, instalado no *RIKEN Center for Computational Science* (R-CCS), em Kobe, Japão. Ele possui uma velocidade de 442 petaflops[5], ou seja, é capaz de realizar 442 quatrilhões de cálculos por segundo (STROHMAIER; DONGARRA *et al.*, 2020). Ao compará-lo com um computador pessoal da ordem de 100 gigaflops, o Fugaku é 4 milhões e 420 mil vezes mais rápido.

Outro aspecto de capital importância na classificação dos testes de primalidade é a sua capacidade de garantir que determinado número N de entrada é primo ou composto. Dada a natureza e complexidade de cada teste, determinados algoritmos podem não assegurar a primalidade de um número N e retornam como resultado apenas a probabilidade de ser primo.

Temos, portanto, os *Testes Determinísticos de Primalidade* e os *Não Determinísticos*. No primeiro, a entrada de um inteiro positivo n apresenta na saída uma mensagem indicando se n é ou não primo. Desta forma, temos a garantia se n é primo ou composto. Por outro lado, os testes não determinísticos de primalidade garantem apenas que o número é primo com uma certa probabilidade, controlada de acordo com necessidade do usuário (COUTINHO, 2004).

6. TESTES CLÁSSICOS

6.1 Divisão por tentativa

4 Ranking dos 500 supercomputadores de alto desempenho (disponibilizados comercialmente) mais poderosos do mundo. Esta lista é atualizada duas vezes ao ano.

5 1 petaflop equivale à 1 quatrilhão de flops, que é a abreviação para o termo computacional "floating-point operations per second", que, traduzido, representa a unidade para operações de ponto flutuante por segundo.

Nas séries iniciais do estudo básico, após aprender os conceitos fundamentais sobre os números primos, um estudante pode idealizar, naturalmente, uma simples forma de identificá-los. Através de sucessivas divisões, é possível testar a primalidade de determinado número. O método consiste nas seguintes etapas:

Passo 1. Seleciona-se um número natural n do qual deseja-se testar a primalidade;

Passo 2. Realiza-se divisões sucessivas de n por m, para $1 < m < n$

Passo 3. Sabendo-se que para dado $n \in \mathbb{N}$, se n não é um número primo, então n possui um fator primo $p \leq \sqrt{n}$, então a divisão precisa seguir, apenas, até $\sqrt{n}$, ou seja, $1 < m \leq \sqrt{n}$.

Passo 4. Por fim, se n não for divisível por m, tal que $1 < m \leq \sqrt{n}$, então n será um número primo, caso contrário, será um composto.

Este é um típico método baseado na exaustão, logo, apesar do simples raciocínio, a tarefa se tornará excessivamente trabalhosa para números grandes, entretanto, para números relativamente pequenos, é um teste prático e de fácil aplicação que ainda retorna todos os divisores do número testado.

6.2 Crivo de Eratóstenes

Um dos testes de primalidade mais antigos da história é o *Crivo de Eratóstenes*, nome dado em homenagem ao matemático grego Eratóstenes, que viveu entre os anos de 276 e 194 a. C. Como estampado na designação do teste, este método filtra os números colocados a teste – como um crivo – e então obtém como resposta apenas aqueles classificados como primos.

Uma ideia simples, entretanto, eficiente para localizar primos num intervalo pequeno de números. Vejamos como usar este método para obter os números primos de 1 até um certo natural n.

Passo 1. No conjunto $\mathbb{N}$, seleciona-se um subconjunto com todos os naturais até um dado número n;

Passo 2. O número 1, por definição, não é primo, logo deve ser retirado do conjunto;

Passo 3. Deve-se seguir a análise com o próximo da lista, ou seja, o número 2, que é primo, logo deve ser mantido na lista. Em seguida são cortados da lista todos os múltiplos de 2, isto é, os números pares;

Passo 4. A seguir, seleciona-se o próximo número não riscado da lista, o 3, que necessariamente é primo, pois não é múltiplo do número anterior, não cortado. Após isso, corta-se todos os múltiplos de 3 restantes no conjunto;

Passo 5. Pelo mesmo princípio apresentado na Divisão por Tentativa, o passo 4 deve ser seguido até $\sqrt{n}$. Após isso, restarão na lista apenas os números primos.

Para ilustrar, vamos selecionar os primos para $n = 50$. Escreve-se inicialmente os números naturais até 50. Logo após, risca-se o 1. Em seguida mantém-se o 2, porém, risca-se todos os múltiplos deste. Segue-se o mesmo procedimento para o próximo número, que necessariamente é primo. Na nossa relação é o número 3 , logo cortam-se todos os seus múltiplos. O próximo da lista é o número 7, e como este é o número inteiro imediatamente anterior à $\sqrt{50}$, então, será o último número cujos múltiplos serão cortados de nossa relação, assim.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Ao retirarmos os números não riscados de nosso conjunto, teremos todos os números primos até o número 50, a saber:

$$2,3,5,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47$$

O crivo de Eratóstenes é um teste determinístico e de custo exponencial. O'Neill (2008, apud Junior; Neto, 2009, p. 1) relata que "o algoritmo do crivo vai se tornando inapropriado à medida que se aumenta o tamanho de n. O tamanho de n é exponencial no número de dígitos."

6.3 Teste de Fermat

Como já descrito, Fermat foi um pensador do século XVII que realizou importantes descobertas no campo da Teoria dos Números, dentre elas, destacamos o Pequeno Teorema de Fermat, que tem sido uma grande influência em algoritmos da Teoria dos Números, na medida em que representa a base para alguns dos mais conhecidos algoritmos de testes de primalidade" (AGRAWAL, 2006).

O Teorema de Fermat também pode ser exibido da seguinte forma.

Teorema 3. Se p é um número primo, então, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \text{ mod p}$.

Quando $p \nmid a$, ou seja, se $(a,p) = 1$, temos

$$a^p \equiv a \text{ mod p} \Leftrightarrow \frac{a^p}{a} \equiv \frac{a}{a} \text{ mod p} \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \text{ mod p}$$

É importante observar que a utilização do teste para confirmação de primos consiste na utilização da recíproca do Teorema de Fermat, uma vez que desejamos descobrir se determinado número p é primo, contudo, nem todo p que divide $a^{p-1} - 1$, para todo a inteiro, é primo. Numa rápida análise, pode parecer que para todo a inteiro e pp composto, tem-se que p não divide $a^{p-1} - 1$, contudo o composto $p = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ é um contraexemplo de que a recíproca do Pequeno Teorema de Fermat nem sempre é verdadeira.

Quando a e p são coprimos, os números compostos p tais que $a^{p-1} \equiv 1 \text{ mod } p$, para todo aa, $1 < a < p$, são denominados *Números de Carmichael*[6], cujo menor é $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ (RIBENBOIM, 2014).

O teste de Fermat consiste na utilização do Pequeno Teorema de Fermat, através do qual adota-se um valor inteiro de a para um determinado número p a ser testado como primo, com $(a,p) = 1$. Estipula-se uma quantidade k de vezes de realização do teste. Se em todas estas, resultar $p \mid a^{p-1} - 1$, então p será retornado como provavelmente primo. Caso contrário, será respondido como seguramente composto. O teste é probabilístico, uma vez que é impossível realizar infinitas tentativas.

6.4 Teste de Proth

6 Robert Daniel Carmichael (1879-1967), matemático estadunidense com área de atuação em Teoria dos Números. Ficou mais conhecido pelo número que leva seu nome, número de Carmichael (O'CONNOR e ROBERTSON, 2010)

Os *Números de Proth*, assim denominados em alusão ao matemático francês François Proth, que viveu no século XIV, são aqueles da forma $p = k \cdot 2^n + 1$, em que k é um número inteiro ímpar e n é um inteiro positivo tal que $2^n > k$. Os primeiros sete números de Proth são 3, 5, 9, 13, 17, 25 e 33. Quando primos, os números de Proth são denominados *Primos de Proth*.

O *Teste de Primalidade de Proth* é uma consequência direta do *Teorema de Proth*, um teste probabilístico publicado em 1878, cuja descrição pode ser observada logo a seguir.

Teorema 4. Seja $p = k \cdot 2^n + 1$ um número de Proth. Se existe $a \in \mathbb{Z}, a > 1$, tal que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$, então p é primo.

Demonstração. Adotemos o seguinte resultado, demonstrado na obra de Martinez, Moreira, *et al.*, (2013).

Se $n - 1 = FR$, com $F > R$ e para todo fator primo q de F existe um $a > 1$, tal que $a^{n-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)$ e $\left(a^{\frac{n-1}{q}} - 1, n\right) = 1$, então n é primo. Agora, fazendo $F = 2^k$, temos $n = h2^k + 1 \Leftrightarrow n - 1 = h2^k$, como $2^k > h$ e como para todo fator primo q de 2^k $(q = 2)$, existe $a > 1$ tal que $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow \left(a^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow a^{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. Como $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow n \mid a^{\frac{n-1}{2}} + 1$ e n é ímpar maior que 1, logo $n \nmid a^{\frac{n-1}{2}} + 1 - 2 = a^{\frac{n-1}{2}} - 1$. Dessa forma, $(a^{\frac{n-1}{2}} - 1, n) = 1$ e, portanto, n é primo.

O maior primo conhecido antes da era computacional foi de Proth, com 44 dígitos, encontrado em 1951, com a ajuda de uma calculadora mecânica de mesa, conforme descrito por Caldwell (2021): "em 1951, Ferrier encontrou o primo $(2^{148} + 1)/17 = 20988936657440586486151264256610222593863921$".

6.5 Teste de Pépin

O *Teste de Pépin* é um teste de primalidade para números de Fermat. O teste leva o nome do matemático francês Jean François Théophile Pépin (1826-1905) e é descrito da seguinte forma

Teorema 5. Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ (número de Fermat), se $3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ F_n)$, então F_n é primo.

Demonstração. Seja a seguinte proposição, demonstrada na obra de Martinez, Moreira *et al.*, (2013):

Dado $n > 1$, se para cada fator primo q de $n - 1$ existe um inteiro a_q tal que $a_q^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ e $a_q^{\frac{n-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod n$, então n é primo.

Agora, pela proposição destacada, dado $F_n = 2^{2^n} + 1$, que é maior que 1, então $F_n - 1 = 2^{2^n}$, cujo fator primo é 2. Como, pela hipótese, $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{F_n-1}{2}}\right)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{F_n} \Leftrightarrow 3^{F_n-1} \equiv 1 \pmod{F_n}$, então existe um inteiro a_q tal que $a_q^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ e não existe $3^{\frac{F_n-1}{2}}$ congruente à 1 módulo F_n, logo, F_n é primo.

Para exemplificar, vamos aplicar o teste para o número de Fermat com $n = 4$.

Devemos provar que $3^{\frac{F_4-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_4}$. Como $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537$, então $\frac{F_4-1}{2} = 32768$. Mas $3^{32768} \equiv 65536 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 65537)$, então $3^{\frac{F_4-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_4}$, e F_4 é primo.

6.6 Teste de Lucas-Lehmer

O teste a seguir foi apresentado por Lucas em 1876 e aperfeiçoado por Lehmer em 1932. O algoritmo é definido por recorrência e é utilizado para testar a primalidade de números de Mersenne. A chave do teste encontra-se na sequência de inteiros $S_0, S_1, S_2, \dots$ definida recursivamente como

$$\begin{cases} S_0 = 4 \\ S_n = S_{n-1}^2 - 2 \end{cases}$$

Teste de Lucas-Lehmer. Seja p um número primo positivo. Se $S_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$, então o número de Mersenne M_p é primo.

Ou em outras palavras, se M_p divide S_{p-2}, então M_pé primo.

Sua demonstração transcende o conteúdo abordado nesse trabalho, contudo pode ser verificada no trabalho de Coutinho (2004, p. 162), no entanto o teste é de fácil implementação e utilização. Vejamos alguns exemplos.

Para $n = 3$, temos $M_3 = 2^3 - 1 = 7$. Como $S_0 = 4$, então $S_1 = 4^2 - 2 = 14$. Dessa forma, $M_3 \mid S_1$, logo M_3 é primo.

Para $n = 7$, temos $M_7 = 2^7 - 1 = 127$. Devemos achar S_5, então temos $S_2 = 14^2 - 2 = 194$

; $S_3 = 194^2 - 2 = 37.636 - 2 = 37.634$; $S_4 = 36634^2 - 2 = 1.416.317.956 - 2 = 1.416.317.954$ e $S_5 = 1.416.317.954^2 - 2 = 2.005.956.546.822.746.116 - 2 = 2.005.956.546.822.746.114$. Como $127 \cdot 15.794.933.439.549.182 = 2.005.956.546.822.746.114$, então $M_7 \mid S_5$ e, portanto, M_7 é primo.

O último exemplo serviu para mostrar que, como a sequência S_n cresce rapidamente, é mais conveniente utilizar operações com módulo M_p. Assim, o Teste de Lucas-Lehmer poderia ser escrito da seguinte forma.

$$\begin{cases} S_0 = 4 \\ S_n \equiv (S_{n-1}^2 - 2) \pmod{M_p} \\ S_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_p} \Longrightarrow M_p \text{ é primo} \end{cases}$$

Logo, para $n = 7$ teríamos $S_0 = 4$; $S_1 \equiv 14 \pmod{127}$; $S_2 \equiv (14^2 - 2) \equiv 194 \equiv 67 \pmod{127}$; $S_3 \equiv (67^2 - 2) \equiv 4487 \equiv 42 \pmod{127}$; $S_4 \equiv (42^2 - 2) \equiv 1762 \equiv 111 \pmod{127}$ e $S_5 \equiv (111^2 - 2) \equiv 12319 \equiv 0 \pmod{127}$. Portanto, como $S_5 \equiv 0 \pmod{M_7}$, M_7 é primo.

Lucas, em 1876, ao aplicar seu próprio teste, descobriu que M_{127} é primo. Com 39 algarismos, este foi o maior primo conhecido até o ano de 1951, quando se iniciou a era dos computadores modernos (RIBENBOIM, 2014).

Na medida que p aumenta, M_p torna-se consideravelmente grande, o que torna os cálculos excessivamente trabalhosos e exaustivos, contudo, com a evolução das máquinas, esta tarefa foi consideravelmente reduzida. Desde 1996, os últimos 15 maiores primos descobertos foram provados pelo programa GIMPS. Até o fechamento deste trabalho (agosto de 2021), o maior primo conhecido é o de Mersenne, $M_{82589933} = 2^{82589933} - 1$, com 24.862.048 de dígitos (CALDWELL, 2021).

7. TESTES COMPUTACIONAIS

7.1 Teste de Solovay-Strassen

O Teste de Slovay-Strassen é um método desenvolvido em 1977 pelo estadunidense Robert Martin Solovay e pelo alemão Volker Strassen. É um teste probabilístico em tempo polinomial do tipo Monte-Carlo. Sobre esta última ferramenta, Weisstein (2021) a define como "qualquer método que resolva um problema por meio da geração adequada de números aleatórios e analise se aquela fração de números obedece determinadas propriedades. O método é útil para obtenção de soluções numéricas para problemas que são muito complicados de resolver analiticamente." (WEISSTEIN, 2021, tradução nossa)

O teste é realizado, basicamente, através de uma seleção aleatória dos dados de entrada que retorna um resultado provavelmente correto. Dado um número de entrada n, a saída será n composto ou n provavelmente primo. Seu funcionamento baseia-se no Critério de Euler, que afirma:

Se p é um número ímpar e $a \in \mathbb{Z}$, com a e p coprimos, então $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod}\ p)$, onde $\left(\frac{a}{p}\right)$ é o símbolo de Legendre[7], definido, para p primo, como:

$$\begin{cases} 0, & \text{caso } p \text{ divida } a \\ 1, \text{caso } a \text{ seja um resíduo quadrático módulo } p \\ -1, \text{caso } a \text{ não seja um resíduo quadrático módulo } p \end{cases}$$

O critério é demonstrado em Hefez (2014, p. 287).

Para $n \in \mathbb{Z}$, ímpar, temos $\left(\frac{a}{n}\right)$ como resultado do produto dos símbolos de Legendre, definido como símbolo de Jacobi[8], portando representa uma generalização daquele. Sendo p_i cada um dos fatores primos de n, temos

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\left(\frac{a}{p_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_n}\right)$$

Como, para todo $a \in \mathbb{Z}$, o critério é verdadeiro, então se, após testados todos os valores do intervalo $(1, n-1)$, o critério for satisfeito, n será primo. Sendo assim, para valores aleatórios de nn, a congruência a ser verificada será $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) (\mathrm{mod}\ n)$.

Os passos adotados no algoritmo de Solovay-Strassen são os seguintes.

Passo 1. Selecionar aleatoriamente um número x;

Passo 2. Aplicado o teste, este trará como resposta que x é seguramente composto ou que x é provavelmente primo;

Passo 3. Se x for provavelmente primo, a chance de ser composto é de no máximo $1/2$;

Passo 4. Após n operações, com a permanência da resposta de provavelmente primo, a probabilidade de retorno de um pseudoprimo é de no máximo de $(½)^n$. Na medida que n aumenta, o erro se torna desprezível.

Assim como os demais testes probabilísticos, o algoritmo de Solovay-Strassen possuirá maior precisão quanto maior for o número de iterações, logo, pelo expos-

7 Adrien-Marie Legendre, matemático francês que viveu entre os séculos XVIII e XIX (1752-1833)

to, o teste é determinístico para exames com todos os valores de n, contudo, para enormes valores de n, o método é inviável.

7.2 Teste de Miller-Rabin

É um teste probabilístico de tempo polinomial também do tipo Monte Carlo, elaborado por Gary Miller e Michael Rabin. É um aprimoramento do teste de Solovay-Strassen, com margem de erro consideravelmente menor. Sobre esse algoritmo, Sautoy (2007, p. 263) relata que "nos anos de 1980, dois matemáticos, Gary Miller e Michael Rabin, desenvolveram finalmente uma variação que garantiria, após poucos testes, que um número é primo".

O teste é fundamentado no seguinte teorema.

Teorema 6. Se p é um número primo e $x > 1$, tal que $x^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, então $x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ ou $x \equiv (p-1)\ (\mathrm{mod}\ p)$

Demonstração...

$$x^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow x^2 - 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow (x+1)(x-1) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow\ x + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p) \text{ ou } x - 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow x \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p) \text{ ou } x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow x \equiv -1 \equiv p - 1\ (\mathrm{mod}\ p) \text{ ou } x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow x \equiv (p-1)\ (\mathrm{mod}\ p) \text{ ou } x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

O funcionamento do teste é baseado na seguinte análise:

Dado um número $x \in \mathbb{Z}$, par, podemos escrevê-lo como $x = 2p$, logo, temos dois casos:

I. p ímpar $\Longrightarrow x = 2p_1$

II. p par $\Longrightarrow p_1 = 2p_2$, logo $x = 2 \cdot 2p_2 = 2^2 p_2$

No segundo caso, podemos continuar o processo enquanto p_n for par, com consequente aumento do índice n. À vista disso, p_n diminui até que em dado momento p_n será ímpar, ou seja, $x = 2^n p_n$. Fazendo $p_n = p$, temos $x = 2^n p$. Sabendo que para todo primo $p > 2$, $p - 1$ é par, teremos $p - 1 = 2^n m$.

Dados p primo e $a \in \mathbb{Z}$, se $p \nmid a$, então $(a, p) = 1$ e, pelo Pequeno Teorema de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, assim $a^{2^n m} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) \Longrightarrow (a^m)^{2^n} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Dessa forma, $a^m \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) a^m \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ ou $a^m \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Se $p \nmid a$, $a \not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, $a \not\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$ e $a^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, então p é composto. Agora, utilizando-se destes resultados, podemos testar a primalidade de um número da seguinte forma.

Passo 1. Seleciona-se um número inteiro $n > 2$ ímpar e faz-se $n - 1 = 2^n m$;

Passo 2. Seleciona-se um número inteiro a qualquer, $1 < a < n - 1$, e calcula-se $a^m \bmod n$. Daí, haverá dois casos possíveis.

Caso 1. $a^m \bmod n = 1 \Rightarrow a^m \equiv 1 \pmod n$ ou $a^m \bmod n = n - 1 \Rightarrow a^m \equiv (\mathrm{n} - 1) \pmod n \Rightarrow a^m \equiv -1 \pmod n$. Logo $a^m \equiv \pm 1 \pmod n \Rightarrow a^{2^n m} \equiv 1 \pmod n$, então $a^{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$ e, portanto, n será primo;

Caso 2. $a^m \bmod n \neq 1$ e $a^m \bmod n \neq n - 1 \Rightarrow a^m \not\equiv 1 \pmod n$ e $a^m \not\equiv (n-1) (\mathrm{mod}\ n) \Rightarrow a^m \not\equiv -1 \pmod n \Rightarrow a^m \not\equiv \pm 1 \pmod n$. Fazemos, então, $x_1 = (a^m \bmod n)^2 \bmod n$ e teremos as seguintes possibilidades.

I. Se $x_1 = n - 1$, então n será primo

II. Se $x_1 = 1$, então n será composto

III. Se não I ou II não for verdadeiro, faz-se $x_2 = x_1^2 \bmod n$, e verifica-se novamente se I ou II é verdadeiro.

Repete-se este processo até que x_i seja igual a $n - 1$ ou 1.

O teste mostra-se muito eficiente para um número determinado de tentativas, conforme observa-se adiante.

> [...] o algoritmo Miller-Rabin, um exemplo de teste de primalidade *probabilístico*. Dado n, tomamos t valores de a ao acaso no intervalo $1 < a < n$ e verificamos para cada a se n passa no teste de primalidade na base a. Se n for ímpar composto, a probabilidade de que um dado a acuse a não-primalidade de a é maior do que $3/4$ (pelo teorema); assim, a probabilidade de que n escape a t testes é menor do que 4^{-t} (MOREIRA e SALDANHA, 2012, p. 3).

Deste modo, para dado n, após testagem de 75% das bases menores que n, haveria certeza sobre a primalidade de n, contudo, para elevados valores de n, o teste é obviamente custoso.

7.3 Teste AKS

No ano de 2002, os pesquisadores indianos Manindra Agrawal, Neeraj Kayal e Nitin Saxena publicaram no trabalho intitulado *PRIMES is in P* um algoritmo determinístico que determina a primalidade de um número em tempo polinomial, um relevante resultado da busca de um teste capaz de tal feito.

O teste é de fácil aplicação e utiliza como base a generalização do Pequeno Teorema de Fermat. O algoritmo fundamenta-se no seguinte lema:

Lema 2. Dado a inteiro, n natural maior que 2 e a e n coprimos, então $(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{n} \Leftrightarrow n$ é primo.

Uma vez que $(x+a)^n$ e $x^n + a$ deixarão o mesmo resto módulo n se divididos por qualquer polinômio, então, em particular, se forem divididos por $x^r - 1$, teremos $(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{x^r - 1, n} \Leftrightarrow n$ é primo.

Ambos resultados são demonstrados no artigo *PRIMES is in P* (AGRAWAL, 2006) e o último mostra que para verificar a primalidade de n, basta testar a congruência para um determinado valor de r, que no trabalho mencionado representa um número primo no qual $r-1$ possui um fator primo $q \geq 4\sqrt{r}\log n$, que divide a ordem de n módulo r.

Com este último resultado, a aplicação do teste consiste em selecionar um determinado número n a fim de testar sua primalidade e adotar um determinado valor primo para a e r. Em seguida, após substituição na congruência $(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{x^r - 1, n}$, analisar se os restos da divisão de $(x+a)^n$ e $x^n + a$ por $x^r - 1$ divididos por n são iguais.

Além da relevante descoberta do teste AKS, que rompeu com a barreira da espera de um algoritmo determinístico em tempo polinomial, uma série de estudos avançados foram desenvolvidos com o intuito de aprimorar os métodos de localização de grandes primos. Nesta corrida, muitos outros testes foram apresentados, como o *Teste de Baillie – PSW*, desenvolvido por Robert Baillie, Carl Pomerance, John Selfridgee e Samuel Wagstaff, que consiste na utilização de um conjunto de algoritmos probabilísticos; o *Teste APR*, proposto por L. M. Adleman, C. Pomerance e R. S. Rumely, em 1983, que utiliza conceitos avançados de Teoria dos Números e o *ECPP* (*Eliptic Curve Primality Proving*), desenvolvido em 1986 por A.O.L. Atkin e que utiliza curvas elípticas.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise dos testes de primalidade e consumadas as discussões apresentadas no transcurso deste trabalho, pode-se inferir importantes resultados alcançados após aplicação dos métodos pré-selecionados e abordagens das referências empregadas.

Tratamos do estudo dos métodos de localização dos primos de forma cronológica, abordando sua forma mais elementar até as mais sofisticadas, dividindo-os em dois grandes grupos: os testes pré-computacionais e os computacionais.

Observou-se que as etapas históricas de evolução dos testes de primalidade foram alicerçadas em diversos fatores, dos quais um mereceu grande destaque: o progresso da tecnologia. Apresentamos a evolução das máquinas e sua conexão com os testes de primalidade.

No campo computacional, os importantes aspectos que detalhamos sobre os testes foram o custo de um algoritmo, com destaque para o tempo polinomial e o tempo exponencial, além de abordá-los mediante sua divisão em testes determinísticos e não determinísticos.

Os testes discorridos nesse estudo foram iniciados pelos clássicos, incluídos na era pré-computacional. O primeiro foi o de Divisão por Tentativa, seguido pelo Crivo de Eratóstenes, o Teste de Fermat, o teste probabilístico de Proth, o Teste de Pepin e o Teste de Lucas-Lehmer (utilizado frequentemente para testar números de Mersenne M_p).

Em cumprimento ao acompanhamento do processo de evolução dos testes de primalidade, analisamos também os testes da era computacional, iniciando pelo estudo do algoritmo de Solovay-Strassen e seguindo pelo teste probabilístico de Miller-Rabin, acompanhado pela apresentação do inovador teste AKS, de Manindra Agrawal, Neeraj Kayal e Nitin Saxena, divulgado em 2006.

Um pensamento diferente que relacionamos à procura de primos é o uso de mais de um teste de primalidade para um mesmo número. É a forma de abordagem do Teste de Baillie-PSW. Outros testes que mostramos consistem em temas matemáticos avançados, como o APR. Por fim, também foi abordado o teste de algoritmo ECPP (Eliptic Curve Primality Proving), com uso de equações cúbicas.

Os testes apresentados e discorridos neste estudo mostraram a linha evolutiva dos conhecimentos acerca dos primos e os importantes passos dados ao longo dos anos para um conhecimento mais aprofundado destes números. Pode-se verificar as diversas formas de abordagem para se localizar primos, dentre as quais destacamos: a *força bruta* de divisões sucessivas; o uso de crivos (tabelas de números com exclusão de determinados algarismos) para filtrar conjuntos de números naturais e localizar primos; a utilização de teoremas sobre propriedades dos primos e, por fim, a utilização de conceitos avançados em matemática.

Com resultados amplos ou restritos, seguros ou prováveis, rápidos ou demorados, os testes aqui apresentados tiveram como fundamentos descobertas sobre os primos reveladas ao longo dos anos e processos engenhosos de localização destes números, o que nos leva a garantir que essa busca por formas cada vez mais rápidas e confiáveis permanecerá por anos a frente, tornando este trabalho um alicerce para pesquisa futuras, apoiadas nas descobertas a serem reveladas.

REFERÊNCIAS

AGRAWAL, M. Primality tests based on Fermat's little theorem. In: CHAUDHURI , S., et al. **Distributed computing and networking:** 8th International Conference, ICDCN 2006, Guwahati, India, December 27-30, 2006, proceedings. [S.l.]: Springer Science & Business Media, v. 4308, 2006. ISBN 978-3-540-68139-7.

BOYER, C.. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

CALDWELL, C. K. The Largest Known prime by Year: A Brief History. **The Prime Pages**, 2021. Disponivel em: <https://primes.utm.edu/notes/by_year.html>. Acesso em: 19 Janeiro 2021.

COUTINHO, S. C. **Primalidade em Tempo Polinomial:** uma introdução ao algoritmo AKS. Rio de Janeiro: [s.n.], 2004. Disponivel em: <https://dcc.ufrj.br/~collier/Books/AKS1.pdf>. Acesso em: 10 Fevereiro 2021.

FEOFILOFF,. Comparação assintótica de funções. **IME**, 2021. Disponivel em: <https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/Oh.html>. Acesso em: 05 abril 2021.

FONSECA, J. J. S. D. **Metodologia da Pesquisa Científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. ISBN 85-85818-25-5.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. ISBN 978-85-85818-92-0. (Coleção PROFMAT;08).

JÚNIOR, J. G. D. S.; NETO, L. P. V. **Progração Concorrente e Paralela:** algoritmo paralelo para o Crivo de Eratóstenes. [S.l.]: [s.n.], 2009. Disponivel em: <http://www.inf.puc-rio.br/~noemi/pcp-13/primos.pdf>. Acesso em: 09 abril 2021.

MOREIRA, C. G.; MARTINÉZ, F. E. B. Primos gêmeos, primos de Sophie Germain e o Teorema de Brun. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 48/49, p. 93-101, Junho/Dezembro 2010. Disponivel em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n48_n49_Artigo06.pdf>. Acesso em: 06 Janeiro 2021.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. Eratosthenes of Cyrene. **MacTutor History of Mathematics Archive**, Janeiro 1999. Disponivel em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eratosthenes/>. Acesso em: 16 Janeiro 2021.

SAUTOY, M. D. **A Música dos Números Primos:** a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2007. ISBN 978-85-378-007-9.

STROHMAIER, E. et al. TOP500, 2020. Disponivel em: <https://top500.org/lists/top500/2020/11/>. Acesso em: 30 março 2021.

WAZLAWICK, R. S. **HIstória da Computação**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017. ISBN 978-85-352-8545-1.

WEISSTEIN, W. Baillie-PSW Primality Test. **MathWorld**, 23 Julho 2021. Disponivel em: <https://mathworld.wolfram.com/Baillie-PSWPrimalityTest.html>. Acesso em: 25 Julho 2021.

CAPÍTULO 13

MODELAGEM MATEMÁTICA: função quadrática e o lançamento de foguete de garrafa PET

Giuliano Eduardo Batista Cutrim

Raimundo José Barbosa Brandão

1. INTRODUÇÃO

A maioria dos alunos que ingressam no 1º ano do ensino médio apresentam grandes dificuldades no aprendizado da matemática. Muitos são os fatores (VITTI, 1999; PARRA (1996) que contribuem para essa problemática, tais como: os professores dessa disciplina no ensino fundamental não possuírem a formação especifica para o ensino de matemática, ou quando possuem, em sua formação inicial não trabalham alguns aspectos relacionados aos saberes docentes que são essenciais ao exercício da função. Acredita-se também que questões metodológicas, ausência da família e falta de estrutura das escolas também contribuem para essas dificuldades.

Apesar de muitos estudos em educação matemática com o objetivo de melhorar o seu processo de ensino e aprendizagem, ainda é muito comum professores utilizando métodos ineficazes. O sucesso ou fracasso dos alunos em matemática (LORENZATO, 2006) depende da relação dos alunos com o conhecimento matemático, estabelecido desde os anos escolares iniciais, tendo o professor neste processo papel fundamental ao utilizar metodologias diferenciadas.

É importante o professor apresentar estratégias de ensino inovadoras para que o aluno descubra significado na aprendizagem. A aprendizagem significativa motiva e desperta o interesse do aluno pelos objetos de estudos em matemática. Com o propósito de contribuir com uma aprendizagem em matemática que contribua para a tomada de decisão do cidadão e da aplicação da matemática nos diversos campos do saber, realizou-se esta investigação.

Este estudo tem uma abordagem qualitativa, pois analisa-se os fatores que contribuem para as dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem em matemática em todas as suas manifestações. A questão de pesquisa que norteou esta investigação foi: A trajetória descrita por foguetes de garrafas PET, através da modelagem Matemática? O objetivo deste estudo é contribuir para a compreensão do conceito e aplicação de função quadrática no lançamento de foguete.

Observou-se que durante a pesquisa os alunos se envolveram bastante em todas as etapas do experimento, despertando motivação e interesse desde os momentos de mobilização até o lançamento do foguete.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo possui uma abordagem de natureza qualitativa por responder questões (MINAYO, 2001) específicas e particulares, se preocupando com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Segundo (MINAYO,2001) a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, as- pirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variável.

Na pesquisa de abordagem qualitativa, o pesquisador (GODOY, 1995) pauta sua análise na interpretação do mundo real preocupando-se com o caráter interpretativo no ato da análise dos dados. Para Brandão (2020, p.51) o pesquisador se constitui como sujeito principal e foca o seu trabalho na interpretação da realidade. Nesta abordagem trabalha-se com valores, crenças, hábitos, atitudes, representações e opiniões.

A metodologia utilizada foi a Modelagem Matemática, que se constitui (Bassanezi. 2002; Biembengut, 1990, 1999) num método de pesquisa da matemática aplicada. Os sujeitos de pesquisa desta investigação foram constituídos por 36 alunos 1º ano do ensino médio da escola C.E. Jerusa da Silva Rabelo do município de Pindaré Mirim, estado Maranhão. Os sujeitos de pesquisa foram constituídos por 30 alunos do 1º ano do Ensino Médio, selecionados aleatoriamente dentro de um grupo de 72 alunos matriculados, representando 41,67% do total de alunos matriculados.

O estudo foi dividido em três etapas:

1. Primeira etapa: os sujeitos de pesquisa foram divididos em grupos de quatro a cinco alunos para discutir a parte teórica do projeto, bem como as aplicações de Funções Quadráticas em lançamentos oblíquos. Também nessa fase inicial procurou-se familiarizar os alunos com o manuseio dos instrumentos da base de lançamento. Os estudantes envolvidos na pesquisa participaram ativamente da oficina tanto nos debates como nos casos práticos.

2. Segunda etapa: o pesquisador propôs a turma construir um foguete de garrafas PET, fazer o lançamento e observar a trajetória descrita pelo mesmo; descrever a trajetória percorrida pelo foguete, utilizando um modelo matemático.

3. A terceira etapa foi realizada em grupos para apresentarem um relatório acerca do experimento. Para a coleta de dados utilizou-se como instrumentos atividades de ensino, observações e entrevistas semiestruturadas. As atividades de ensino tiveram como objetivos identificar o grau de percepção dos alunos sobre o conceito de função quadrática e suas aplicações do cotidiano do mundo natural. Já as entrevistas tiveram o propósito de ampliar os questionamentos pois, para Triviños (1987) a entrevista semiestruturadas [...] favorece não só a descrição dos fenômenos sociais, mas também sua explicação e a compreensão de sua totalidade [...]"além de manter a presença consciente e atuante do pesquisador no processo de coleta de informações (TRIVIÑOS, 1987, p. 152). Os participantes foram divididos em

seis equipes com cinco componentes.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA E FUNÇÃO QUADRÁTICA

3.1 Modelagem Matemática

Desde a Pré-história o homem busca entender o meio em que vive usando questionamentos a respeito dos fenômenos naturais e a própria natureza, com isso a ciência evoluiu, em especial a astronomia e a matemática. E a matemática passou a ser usada, unida ao espírito de investigação, para explorar o meio ambiente, modelando- o para melhor entende-lo. Assim tem-se o aparecimento de forma implícita da modelagem matemática na vida humana.

O estudo da modelagem ma- temática no Brasil surgiu na Faculdade de Filoso a Ciências e Letras de Guarapuava-FAFIG na década de 80 e que ganhou muitos simpatizantes com o início do programa de mestrado da UNESP que buscavam formas alternativas para o ensino da matemática para alunos do ensino fundamental e médio. E a pesquisa sobre o tema cresceu muito nesses mais ou menos 38 anos.

Como descrito por Silveira e Ribas (2004) o estudo da modelagem ma- temática no Brasil surgiu na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava-FAFIG na década de 80 e que ganhou muitos simpatizantes com o início do programa de mestrado da UNESP que buscavam formas alternativas para o ensino da matemática para alunos do ensino fundamental e médio. E a pesquisa sobre o tema cresceu muito nesses mais ou menos 38 anos.

Segundo Bassanezi (2014, p. 24 apud Silva, 2018, p. 29)

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

De acordo com o autor acima, a modelagem matemática aproxima a realidade do meio estudantil através da transformação de modelos reais em modelos matemáticos de maneira dinâmica. Como descrito por Silva (2018. p. 27): a Modelagem Matemática tem como principal objetivo, estimular a criatividade e o raciocínio matemático, dar uma maior compreensão da aplicação da matemática em outras áreas, e desenvolver habilidades na resolução dos problemas, a m de que os estudantes se sintam motivados a aprender de forma contínua.

Desta forma, entende-se que a modelagem matemática tem o objetivo de incentivar o raciocínio matemático, relacionar a matemática com outras disciplinas, fazer com os alunos adquiram capacidade de resolver problemas e mantê-los motivados para o estudo.

Do ponto de vista de Rigonatto (2018) Modelagem Matemática é criar matematicamente um modelo de um acontecimento da natureza com o objetivo de se explicar e compreender este acontecimento. Modelagem Matemática é uma maneira de diminuir a distância entre os conceitos matemáticos exposto na escola ao dia a dia dos estudantes de forma contextualizada e de forma interdisciplinar, o que a torna muito mais interessante.

3.2 Função Quadrática

O conceito de função é um dos objetos de estudo da matemática de importância na vida das pessoas e aplicados nos mais diversos campos do conhecimento. Com relação à origem da função quadrática, acredita-se que muitos fenômenos contribuíram para o seu surgimento e dentre outros pode-se considerar o movimento de queda livre inicialmente estudado por Aristóteles (300 a.C.) e trajetórias descritas por lançamento de projétil, também estudado por este filósofo. Com o passar dos séculos outros estudiosos (HIPARCO, 190 a.C. - 120 a.C; FILOPONO, 490-570; AVICENA, 980- 1037; AVEMPACE, 1106 - 1138; BURIDAN, 1300-1358) contrariaram a visão de Aristóteles quanto ao lançamento de projétil, enquanto Galileu Galilei (1564 -1642) derrubou as ideias de Aristóteles sobre queda livre.

Com a evolução da origem e conceito de função quadrática e sua aplicação para modelar diversos fenômenos do nosso cotidiano, na atualidade este tema se constitui em um objeto matemático de grande importância para a ciência. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais o conteúdo "Funções" ocupam espaço de relevância dada a sua importância na modelagem matemática.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir tanto a linguagem algébrica quanto a linguagem das ciências, necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (PCN+EM, 1999, p.121).

Também na Base Nacional Comum Curricular, este objeto de estudo é contemplado dada a sua importância para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e sua aplicação em muitos contextos da vida cidadã.

O estudo de funções, por exemplo, "deve priorizar aspectos relacionados à variação entre grandezas, permitindo que o/a estudante desenvolva efetiva- mente o pensamento funcional" (BRASIL, 2015, p. 150).

Reconhecer função quadrática em suas representações algébrica e gráfica, considerando domínio, imagem, ponto de máximo ou mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de interseção com os eixos são fundamentais para a compreensão dos fenômenos da natureza.

Usando todo esse conhecimento relativo a função de polinomial de 2º grau para interpretar e criticar situações relacionadas a economia, fatos sociais e relacionados às ciências envolvidos a variação de grandezas, interpretações de gráficos representativos de funções e taxas de variação, usando ou não recursos tecnológicos.

Assim como todas as descobertas e invenções do homem, muitos objetos matemáticos surgiram ou foram conceituados a partir das necessidades do homem ou mesmo por acaso.

Com a função quadrática não foi diferente, o seu surgimento ocorreu pela necessidade de o homem compreender os fenômenos da natureza e a partir dessa compreensão criar modelos matemáticos para fazer planejamento e estimativas em várias áreas do conhecimento com objetivos diversos.

A concepção de função quadrática que os alunos do 1º ano do ensino médio têm, muitas vezes é confusa e em outras equivocadas, dada a sua apresentação formal e sem a compreensão do significado do seu conceito. Compreender o significado de um conceito é fundamental para a apreensão de um objeto matemático.

Para Rego (1995):

> [...] o pensamento conceitual é uma conquista que depende não somente do esforço individual, mas principalmente do contexto em que o indivíduo se insere [...] se o meio [...] não desafiar, exigir e estimular o intelecto [...] esse processo poderá se atrasar ou mesmo não [...] conquistar estágios mais elevados de raciocínio (REGO, 1995, p. 79).

Por tanto, a necessidade do professor estimular o pensamento conceitual e atividades desafiadoras ao aluno para que o mesmo amplie os seus horizontes e estabeleça uma perfeita conexão entre conceito espontâneo e conceitos científicos.

Definição

Dada uma função f : R → R, chama-se função quadrática quando são dados números reais a, b, c, a # 0, tais que f (x) = ax2 + bx + c para todo x ∊ R".

Observa-se que na definição de função quadrática, fica de forma bem evidente, os elementos essenciais para que a função exista. Verifica-se o domínio $D(f)$ = R, o contradomínio $CD(f)$ = R e a lei de formação y = $f(x)$ = ax2 + bx + c que associa os elementos do domínio com os do contradomínio.

3.2.1 Forma Canônica

Buscou-se em Lima (2016) subsídio teórico para afirmar que a função quadrática está bem determinada pela expressão f (x) = ax2 + bx + c, porém pode-se manipular algebricamente o lado direito desta equação usando o que é chamado de "método de completar quadrados". Para isso, coloca-se inicialmente o a em evidência.

f(x) = a$\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right]$

Completando quadrados temos: f(x) = a$\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a}\right]$. Arrumando, tem-se: f(x) = a$\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$. Agora temos um trinômio quadra perfeito: f(x) = a$\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$. A partir desta expressão temos que: f(x) = a $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. A expressão matemática acima representa a forma canônica da função quadrática, que também pode ser expressa por: f(x) = a$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

4. CONSTRUÇÃO E LANÇAMENTO DO FOGUETE

4.1 Construção e lançamento do foguete

O estudo das funções é muito vasto e sua aplicabilidade é muito importante em nosso cotidiano, por isso é de extrema importância aproximar o conteúdo apresentado em sala de aula ao dia a dia dos alunos, tornando o estudo mais dinâmico e interessante. Por isso modelou-se esse estudo através do lançamento dos foguetes.

Foram ministradas nas 7 aulas de 100 minutos cada, com alunos do 1º ano da escola CE Jerusa da Silva Rabelo, localizado no Bairro Pitombeira na cidade de Pindaré-Mirim, Ma. O objetivo dessas aulas foi proporcionar aquisição de mais conhecimento de função quadrática e orientação para a construção dos foguetes feitos de garrafas PET.

Nos dias 08, 22 e 29 de novembro de 2019 foram ministradas aulas referentes ao conteúdo de função polinomial de 2º grau e os princípios de construção e lançamento de foguetes. Nas duas primeiras aulas foram trabalhados conceito, construção de gráficos e resolução de problemas envolvendo função quadrática. Na terceira aula falou-se sobre lançamento de foguetes e dos materiais necessários para construção de foguete com garrafas PET.

No dia 16 de novembro de 2019 realizou-se uma oficina de construção de foguetes. Para a construção dos foguetes foi necessário os seguintes materiais:

duas garrafas PET (as mais usadas são as de 2 litros); fita adesiva durex larga; papelão ou Pasta plástica (escarcelas), pra construir as paletas do foguete (asas); um balão; uma tesoura média (para cortar o foguete e o balão); um estilete para furar a garrafa com mais facilidade. Os alunos construíram os foguetes e a base de lançamento sob a orientação do professor pesquisador. Descrevendo todos os passos. Ver figura 1.

Figura 1 - Foguete construido pelos alunos

Fonte: Pesquisa, 2019

4.2 Construção da Base de lançamento.

Para a construção da base de lançamento foram utilizados os seguintes materiais: 1 cano de PVC de 20mm de diâmetro; 2 T de 20mm de diâmetro; 2 joelhos de 20mm de diâmetro; 2 taps de 20 mm de diâmetro; 1 pito de pneu de bicicleta; 1 tubo de cola de cano; 1 serra para cano; 1 rolo de esparadrapo; 1 tubo de vaselina; 4 abraçadeiras de plástico com cabeçote de 3,5 a 3,7 mm; 1 abraçadeira de metal de 1 cm de diâmetro; 1 pedaço de cano de 40 mm com 3 a 4 cm de comprimento; 6m de barbante.

Figura 2 – Base de lançamento construidoa pelos alunos

Fonte: Pesquisa, 2019

4.3 Lançamento do Foguete

No dia 10 de dezembro de 2019 foram executados os lançamentos em forma de competição entre as equipes. Os lançamentos foram feitos obedecendo as seguintes regras:

1. Uma linha de lançamento foi feita onde todos os alunos deveriam ficar atrás dela por medida de segurança, visto que os foguetes saem da base com velocidade alta e podem machucar se atingir alguém;

2. Os foguetes a serem lançados não podem ultrapassar a linha de lança mento;

3. Todos os membros da equipe, de alguma maneira, deveriam ter participação ativa no lançamento. Colocar água no corpo do foguete, anexa-lo a base, puxar o gatilho ou até mesmo medir o alcance. O objetivo é que trabalhem em equipe;

4. Só deveria ser feito o lançamento depois que a equipe anterior já estivesse evacuada a área;

5. O lançamento só deveria acontecer após a ordem do professor;

6. Após conectado à base, já cheio de ar e com pressão suficiente ou não

7. Poderia ser direcionada para os colegas;

Os participantes do experimento se comportaram durante o experimento e nem uma equipe teve que ser penalizada. Então de posse dos foguetes, da base de lançamento, bomba, trena e água os lançamentos aconteceram obedecendo os procedimentos citados abaixo:

1. Coloca-se água no corpo do foguete. Aproximadamente 500ml de água.

2. Essa medida varia de foguete para foguete;

3. Conecta-se o foguete à base de lançamento e o prende com o dispositivo que chamamos de gatilho descrito no capítulo construção do foguete;

4. Com a bomba conectada à base, bombear até adquirir pressão suficiente para o lançamento;

5. Puxar o do gatilho;

6. Medir com a trena e de maneira perpendicular a linha de lançamento o al-

cance horizontal obtido pela equipe.

No dia 12 de dezembro os participantes retornaram para a sala de aula para elaborem problemas que descrevesse a trajetória do foguete lançado. E finalmente no último encontro realizou-se uma entrevista semiestruturada com os participantes.

5. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DO RESULTADOS

Após os lançamentos o professore foi medir o alcance do foguete de cada equipe. Assim de acordo com a tabela a equipe que conseguiu a maior distância foi a equipe 6 e então saiu na frente da competição. Ver tab. 1

Tabela 1 – alcance de cada foguete

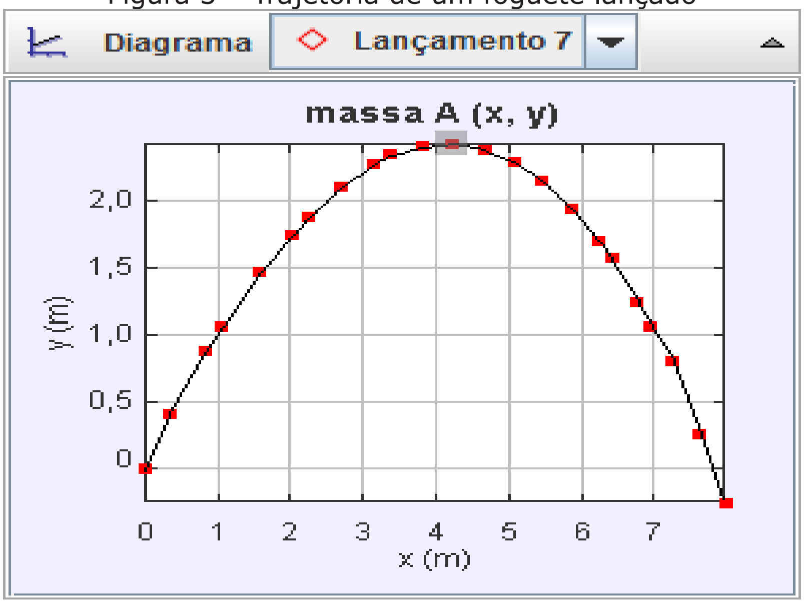
Equipes	Equipe1	Equipe 2	Equipe 3	Equipe 4	Equipe 5	Equipe 6
Alcance (metros)	47,6	28,0	34,0	20	37,6	52,0

Fonte: Pesquisa

No retorno à sala de aula no dia 12 de dezembro, o objetivo era elaborar a função que descreve o movimento de um dos lançamentos dos foguetes. Para isso, filmou-se todos os lançamentos para colher as informações dos vídeos através dos programas de dois programas de computador chamados de o tracker e o scidavis.

Colocando o vídeo escolhido no tracker, e selecionando no eixo horizontal o x que representa a distância alcançada pelo foguete na horizontal (alcance) e no vertical o y que representa a altura, o programa elabora o gráfico, mostrando o alcance e altura máxima. Ver figura 3

Figura 3 – Trajetória de um foguete lançado



Fonte: Pesquisa

Durante os 100 minutos da 6ª aula os participantes dos estudos aproveitaram para explorar os programas de computador analisando os seus lançamentos. No último encontro o professor realizou a entrevista previamente planejada.

O professor pediu para o aluno A8, comentar a experiência.

> O método usado pelo professor fez com que todos os alunos prestassem atenção e pudessem armazenar todo o conteúdo em suas mentes (Aluno A8:)

Para o aluno A13, "os lançamentos dos foguetes foi super legal porque todos nós aprendemos de uma forma divertida e não de uma forma chata";

Aluno A23: discorreu sobre a motivação em participar de uma aula de diferente. Para o citado aluno:

> no 9º ano quando estudou função quadrática, não aprendeu quase nada. Mas e com essa forma de estudar percebemos que a matemática pode ser divertida e não é tão difícil como alguns alunos pensam. De forma prática aprendi cada ponto importante da parábola e tudo que deveria ter aprendido

Percebe-se que o esudo de função, bem como outros objetos de estudo em matemática, a apresentação da definição forma, sem antes se discutir as noções intuitivas, sua origem e evolução tende a deixar o processo de aprendizagem mais complexo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa propôs um método alternativo que facilita o ensino e aprendizagem da função de segundo grau envolvendo o lançamento de foguetes de garrafas PET e modelagem matemática, uma forma de dar sentido ao conteúdo na vida dos estudantes que apresentam dificuldade na assimilação por não conseguirem relacionar o conteúdo com o seu dia a dia, ou seja, não conseguirem perceber a aplicabilidade da função quadrática.

Um dos momentos de grande importância nessa proposta de ensino e também o mais aguardado pelos alunos, foi a aula prática de lançamento de foguetes de garrafas PET. Onde tornou-se real e com significado o gráfico da função polinomial de 2º grau, a parábola que é exatamente a trajetória descrita pelo foguete. Assim, toda a parte teórica exposta anteriormente passou a ter significado concreto e percetível para cada um dos alunos.

Feito a análise dos resultados da atividade proposta depois da aula prá- tica e dos depoimentos citados percebeu-se que o processo de ensino aprendizagem foi bem-sucedido através desta proposta de ensino. Pois os alunos conseguiram matematizar a situação problema (lançamento do foguete), ou seja, conseguiram representar a situação problema através de uma equação ou através do gráfico ou até mesmo através do gráfico e da equação.

Após a realização do experimento notou-se que pelo estímulo que tiveram na preparação da base e lançamento do foguete, que os alunos adquiram certa autonomia no processo de resolução de problemas, despertando ainda neles o espírito de investigação, prazer em construir conhecimento e importância de se trabalhar em grupo.

Constatou-se após a realização deste estudo que a relação entre teoria e prática foi fundamental para os alunos vivenciarem a modelagem nas situações de contextos diversos. Ao se apropriarem do conhecimento teórico verificou-se que as tomadas de decisão foram mais conscientes e seguras.

Depois que os alunos realizaram as medições, cálculos e estimativas, vivenciaram a experiência de lançar um foguete, comparar os resultados alcançados no experimento, mobilizar conhecimentos prévios para a construção de novos conhecimentos, ficou evidente para alunos e professor a importância da relação pedagógica para a tríade saber, aluno e professor.

REFERENCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: Ed. FURB, 1999.

BORBA, M. C. **Coletivos Seres-humanos-com-mídias e a Produção de Matemática**. In: I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Mate- mática, Curitiba, 2001.

BRANDÃO, R. J. B. Estatística e Probabilidade na Formação do Engenheiro Civil. In. **Engenharia 4.0:** a era da produção inteligente / Eduardo Mendonça Pinheiro, Glauber Tulio Fonseca Coelho, Patrício Moreira de Araújo Filho (Org.). São Luís: Editora Pascal Ltda, 2020

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília-DF, 2018.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GODOY, Arilda S. Pesquisa qualitativa: Tipos Fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v.35, n.3, p.20-20, Mai./Jun. 1995.

L. **Educación Matemática: errores y di cultades de los estudiantes, re- solucíon de problemas, evaluación, historia**. Universidad de los Andes, Bogotá, p. 1-18, 1998.

L. R. **Contexto e Aplicações:** Volume Único. São Paulo: Ática, 2000.

LORENZATO,S. **Para Aprender Matemática**. 3 Ed. Campinas. Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MINAYO, M. C. S.(org.). **Pesquisa Social.** Teoria, método e criatividade. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

PARRA, C. SAIZ, I. **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógica. Porto Alegre, Artmed (Artes Médicas). 1996

RIGONATTO, M. **Modelagem Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem**. 2015.

SILVA,J. J. **Modelagem Matemática no Ensino Médio:** Uma Estratégia para um Aprendizado Signi cativo. 2018. 75f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual do Piauí, Teresina-Pi. 2018.

SILVEIRA, J. C., RIBAS, J. L. D. **Discussões Sobre Modelagem Matemática**. Disponível em: Discussões sobre Modelagem Matemática - Só Matemática (somatematica.com.br)

SITE WIKIPEDIA.ORG. **Diagrama de um telescópio de Newton**. 2018.

TRIVINOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2ª Ed. Piracicaba – São Paulo. Editora UNIMEP. 1999.

CAPÍTULO 14

ARITMÉTICA MODULAR APLICADA AOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE MNEMÔNICOS E NÃO MNEMÔNICOS

João Coelho Filho[1]

Filliphe de Almeida[2]

1 Professor Doutor do Departamento de Matemática e Informática – UEMA
2 Professor Mestre da Educação Básica da rede Privada de Teresina–PI

RESUMO

Este trabalho aplica os restos da divisão Euclidiana aos critérios de divisibilidade. O objetivo é apresentar as justificativas para os critérios de divisibilidade fundamentados na definição e nas propriedades da aritmética modular. Os critérios de divisibilidades são apresentados construindo fórmulas mnemônicas e mostrando resultados não mnemônicos. A finalidade deste trabalho é proporcionar aos alunos do Ensino Básico e até mesmo de graduação e professores da Educação Básica um maior contato com a aritmética no que diz respeito a Congruência Modular, tendo como foco os critérios de divisibilidade mnemônicos e não mnemônicas.

1. INTRODUÇÃO

A Aritmética é o termo que deriva do grego Arithmos, que significa número, sendo reconhecida como a ciência dos números. A humanidade percorreu longos caminhos para chegar a teoria dos números. No ínicio da humanidade, para ajudar no processo de contagem, eram usados pedaços de pau, pedras e ossos para registrar certas quantidades. Assim, os números e os símbolos que representavam, passaram por grandes mudanças ao longo dos anos e chegando ao modo em que são utilizadas na atualidade.

Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, envolvendo o conceito de congruência. As bases teóricas foram iniciadas pelo matemático suíço Euler, em meados de 1750, tornando–se mais acessível através das ideias do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, publicado no livro Disquisitiones Arithmetcae, no ano de 1801, na qual simbologias, definições e conceitos foram construídos.

O foco é proporcionar aos alunos do Ensino Básico, graduando em matemática e professores da Educação Básica um maior contato com a aritmética no que diz respeito a Congruência Modular, tendo os critérios de divisibilidade mnemônicos e não mnemônicas alvo do trabalho. Os livros didáticos de matemática abordam os critérios de divisibilidade em uma forma superficial abordando apenas os casos triviais, que são: por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, deixando de lado os critérios por 7, que por sua vez não é abordado nos livros didáticos, pois é visto como difícil compreensão e os critérios de divisão não mnemônicos trazem uma forma simples e fácil de identificar sua divisão por um número primo entre 7 a 97.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem da congruência modular de modo a oferecer alguns critérios de divisibilidade mnemônicos e não mnemônicos. Diante disso, é de vital a afirmação da Carmen e o Hermano (RPM 6, p. 21) que dizem "um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão". Logo, os critérios abordados serviram como suporte para se aplicar nas aulas.

2. ALGORITMO DA DIVISÃO EUCLIDIANA

Pelo algoritmo da divisão Euclidiana, dados a e b números naturais, o primeiro denominado dividendo e o segundo divisor, existem únicos inteiros, de maneira que o dividendo é o divisor multiplicado pelo quociente mais o resto. Além disso, o resto é menor que o divisor.

Teorema 1. (Divisão Euclidiana) *Sejam a, b* N *com $b > 0$. Então existem e são únicos inteiros q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } \ 0 \leq r < b. \ (1)$$

A prova é realizada em duas partes. Primeiro é a prova da existência de q e r e a segunda é a prova da unicidade, isto é, mostrar que existem únicos q e r satisfazendo (1). A Divisão Euclidiana para os números inteiros é determinada pelo Corolário 1.

Corolário 1. *Sejam $a, b \in$ Z com b 0. Então existem únicos q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Teorema 2. (Sistema de Numeração) *Sejam a Z com $b > 1$. Então existem únicos n e* r_i tais que

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_2 b^2 + r_1 b^1 + r_0 b^0$$

ou

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0 = (r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0)_b$$

$$\text{com } r_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } n = [\log_b a \int.$$

A prova fornece o algoritmo para representar um número a na base $b > 1$ através da relação:

$$a = q_0 b + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0 < b$$

$$q_0 = q_1 b + r_, \text{ com } 0 \leq r_1 < b$$

.

$$q_{n-2} = q_{n-1}b + r_{n-1}, \text{ com } 0 \leq r_{n-1} < b.$$

O processo exaure quando $q_{n-1} < b$, assim, $r_n = q_{n-1}$ e tem-se

$$a = r_n b^n + \ldots + r_1 b^1 + r_0 b^0 = (r_n \ldots r_1 r_0)_b.$$

Assim,

Considerando os números 142 na base 10, tem-se que que:

$$142 = 35 \cdot 4 + 2$$

$$35 = 8 \cdot 4 + 3$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

$$2 = 0 \cdot 4 + 2.$$

$$(142)_{10} = 2 \cdot 43 + 0 \cdot 42 + 3 \cdot 4 + 2 = (2032)_4.$$

Definição 1. *Um inteiro b divide a, também inteiro, se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$a = b \cdot c.$$

Diz-se que a é múltiplo de b ou b é múltiplo de a. Se b divide a, escreve-se $b \mid a$, no caso contrário, b / |a. As principais propriedades da divisibilidade são:

(i) $\pm 1 \mid a$ e $\pm a \mid a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$;

(ii) $\pm a \mid 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ $\forall a \in \mathbb{Z}^*$;

(iii) $b \mid a$ e $a > 0 \Rightarrow \pm b \leq a$;

(iv) $b \mid a \Leftrightarrow bc \mid ac$ $\forall a, b, \in \mathbb{Z}^*$;

(v) $b \mid a$ e $a \mid c \Rightarrow b \mid c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^*$;

(vi) $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$;

(vii) $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid (ax + by)$.

Observação 1. *O 0 não divide qualquer inteiro e todo inteiro diferente de 0 divide o 0.*

3. ARITMÉTICA MODULAR

Nesta seção são apresentado alguns teoremas e definições que serão utilizados seus resultados nos critérios de divisibilidade mnemônicas e não mnemônicas.

Definição 2. *Dois inteiros a e b são congruentes módulo n,* $1 < n$ N, *se os restos de* a e b quando dividido por n são iguais. A notação é $a \equiv b \bmod n$.

Exemplo 1. *Os inteiros* 12 *e* 37 *são congruentes módulo* 5, *em símbolo,* $12 \equiv 37 \bmod 5$.

Justificativa: $12 = 2 \cdot 5 + 2$ *e* $37 = 7 \cdot 5 + 2$, *isto é, têm os mesmos restos*

Teorema 3. *Se* $a \equiv b \bmod n$ *se, e somente se,* $n \mid (a - b)$, *então* $a - b = n \cdot (q_1 - q_2)$. *Assim,* $n \mid (a - b)$.

Note que: $17 \equiv 8 \bmod 3$, pois, $3 \mid (17 - 8) = 9$ e $8 \equiv 17 \bmod 3$, pois, $3 \mid (8 - 17) = -(17 - 8) = -9$.

Propriedades da congruência:

(i) $a \equiv a \bmod n$ para todo $a \in Z$, $n \in N$ e $n > 1$;

(ii) $a \equiv b \bmod n \Rightarrow b \equiv a \bmod n$ para todo $a, b \in Z$;

(iii) $a \equiv b \bmod n$ e $b \equiv c \bmod n \Rightarrow a \equiv c \bmod n$ para todo $a, b, c \in Z$;

(iv) $a \equiv b \bmod n$ e $c \equiv d \bmod n \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d) \bmod n$ para todo $a, b, c, d \in Z$;

(v) $a \equiv b \bmod n$ e $c \equiv d \bmod n \Rightarrow (a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \bmod n$ para todo $a, b, c, d \in Z$;

(vi) $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a^k \equiv b^k \bmod n$ para todo $a, b \in Z$, $k \in N$.

4. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE MNEMÔNICOS

Os conceitos e propriedades da Aritmética Modular fundamentam os critérios de divisibilidades mostrando critérios mnemônicos e justificando os não mnemônicos.

Será representado um número natural na base 10, da seguinte forma:

$a = a_n \cdot 10n + a_{n-1} \cdot 10n-1 + ... + a_1 \cdot 10 + a_0.$

4.1 Divisibilidade por 2, 5 e 10

Um numero inteiro é divisível por 2 quando o último algarismo é par ou é zero.

Utilizando a noção de congruência, note que:

$100 \equiv 0 \mod 2 \quad \Longrightarrow \quad 100 \cdot r_0 \equiv r_0 \mod 2$

$101 \equiv 0 \mod 2 \quad \Longrightarrow \quad 101 \cdot r_1 \equiv 0 \mod 2$

$102 \equiv 0 \mod 2 \quad \Longrightarrow \quad 102 \cdot r_2 \equiv 0 \mod 2$

. . .

$10n \equiv 0 \mod 2 \quad \Longrightarrow \quad 10n \cdot r_n \equiv 0 \mod 2.$

Somando membro a membro tem–se que

$10n \cdot r_n + ... + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv r_0 \mod 2.$

Além disso, um número natural a na base 10 é representado por

$a = 10n \cdot r_n + 10n-1r_{n-1} + ... + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0$, com $r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1}, r_n$ os restos da divisão do número a por 10.

Assim,

$a = 10n \cdot r_n + 10n-1 \cdot r_{n-1} + ... + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv r_0 \mod 2$, isto é, o resto da divisão de um número natural na base 10 por 2 depende somente do r_0 que é o último algarismo da direita. Portanto, a é divisível por 2 se $r_0 = 0, 2, 4, 6. 8$.

Analogamente ao processo de divisibilidade por 2, tem–se os processos de divisibili- dades por 5 e 10. Portanto, a é divisível por 5 se $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$ e a é divisível por 10, se é divisível por 2 e por 5, simultaneamente. Logo, $r_0 = 0$.

4.2 Divisibilidade por 3 e 9

Um número natural é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for um número divisível por 3. Utilizando a noção de congruência tem–se

$100 \equiv 1 \bmod 3 \quad \Longrightarrow \quad 100 \cdot r_0 \equiv r_0 \bmod 3$

$101 \equiv 1 \bmod 3 \quad \Longrightarrow \quad 10 \cdot r_1 \equiv r_1 \bmod 3$

$102 \equiv 1 \bmod 3 \quad \Longrightarrow \quad 102 \cdot r_2 \equiv r_2 \bmod 3$

. .

$10n \equiv 1 \bmod 3 \quad \Longrightarrow \quad 10n \cdot r_n \equiv r_n \bmod 3.$

Somando membro a membro tem–se que

$10n \cdot r_n + \ldots + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (r_n + \ldots r_1 + r_0) \quad \bmod 3.$

Assim,

$a = 10n \cdot r_n + \ldots + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (r_n + \ldots r_1 + r_0) \quad \bmod 3,$ isto é, o resto da divisão de um número por 3 depende somente da soma dos algarismos. Portanto, um número a é divisível por 3, se $r_n + \ldots r_1 + r_0$ é múltiplo de 3.

A divisibilidade por 9 possui tem a mesma estrutura de divisibilidade por 3, pois

$100 \equiv 1 \bmod 9 \quad \Longrightarrow \quad 100 \cdot r_0 \equiv r_0 \bmod 9$

$101 \equiv 1 \bmod 9 \quad \Longrightarrow \quad 10 \cdot r_1 \equiv r_1 \bmod 9$

. .

$10n \equiv 1 \bmod 9 \quad \Longrightarrow \quad 10n \cdot r_n \equiv r_n \bmod 9.$

Somando membro a membro tem–se que

$10n \cdot r_n + \ldots + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (r_n + \cdots r_1 + r_0) \quad \bmod 9.$

Assim,

$a = 10n \cdot r_n + \ldots + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (r_n + \cdots r_1 + r_0) \quad \bmod 9,$ isto é, o resto da divisão de um número por 9 depende somente da soma dos algarismo. Portanto, um número a é divisível por 9, se $r_n + \cdot\cdot\cdot\, r_1 + r_0$ é múltiplo de 9.

4.3 Divisibilidade por 4 e 8

Um número natural é divisível por 4 se, e somente se, quando os dois últimos algarismos da direita for divisível por 4. Note que

$100 \cdot r_0 \equiv r_0 \mod 4$

$101 \equiv 2 \mod 4 \quad \Longrightarrow \quad 10 \cdot r_1 \equiv 2r_1 \mod 4$

$102 \equiv 0 \mod 4 \quad \Longrightarrow \quad 10 \cdot r_2 \equiv 0 \mod 4$

. .

$10n \equiv 0 \mod 9 \Longrightarrow \quad 10 \cdot nr_n \equiv 0 \mod 4.$

Somando membro a membro tem-se que

$10n \cdot r_n + \ldots + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (2 \cdot r_1 + r_0) \mod 4.$

Assim,

$a = 10n \cdot r_n + \ldots + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (2 \cdot r_1 + r_0) \mod 4$, isto é, o resto da divisão de um número por 4 depende somente da soma dos algarismo. Logo, a é divisível por 4 se $2 \cdot r_1 + r_0$ é múltiplo de 4.

Exemplo 2. *Aplicações do critério de divisibilidade por 4:*

(i) *O resto da divisão de* 63.531 *por* 4 *é* 3, *pois* $2 \cdot 3 + 1 = 7 \equiv 3 \mod 4$;

(ii) *Os números* 136 *e* 2.547.372 *são divisíveis por* 4.

De forma, análoga a divisibilidade por 8,

$10n \cdot r_n + \ldots + 102 \cdot r_2 + 10 \cdot r_1 + r_0 \equiv (4 \cdot r_2 + 2 \cdot r_1 + r_0) \mod 8$ Portanto, a é divisível por 8 se $4 \cdot r_2 + 2 \cdot r_1 + r_0$ é múltiplo de 8.

4.4 Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6, se é divisível por 2 e por 3, simultaneamente.

4.5 Divisibilidade por 7

Para verificar se um número natural é divisível por 7, precisa seguir algumas etapas: primeiro multiplica por 2 o último algarismo do número dado, depois subtraia este valor do número inicial excluindo o último algarismo, se o resultado for múltiplo de 7 então o número inicial também será. Esse critério por congruência modular, note que

$100 \cdot r_0 \equiv r_0 \mod 7$

$10 \equiv 3 \mod 7 \implies 10 \cdot r_1 \equiv 3r_1 \mod 7$

$102 \equiv 2 \mod 7 \implies 102 \cdot r_2 \equiv 2r_2 \mod 7$

$103 \equiv -1 \mod 7 \implies 103 \cdot r_3 \equiv -r_3 \mod 7$

$104 \equiv -3 \mod 7 \implies 104 \cdot r_4 \equiv -3r_4 \mod 7$

$105 \equiv -2 \mod 7 \implies 105 \cdot r_5 \equiv -2r_5 \mod 7$

$106 \equiv 1 \mod 7 \implies 106 \cdot r_6 \equiv r_6 \mod 7$

. . .

Somando membro a membro tem−se que

$. \; . \; . \; 106r_6+105r_5+104r_4+103r_3+102r_2+10r_1+r_0 \equiv . \; . \; . -(r_3+3r_4+2r_5)+(r_0+3r_1+2r_2) \mod 7.$

Note que o lado esquerdo da congruência aparece um ciclo, assim

$. \; . \; . \; 105r_5 +104r_4 +103r_3 +102r_2 +10r_1 +r_0 \equiv . \; . \; . -(r_3 +3r_4 +2r_5)+(r_0 +3r_1 +2r_2) \mod 7.$

Exemplo 3. *Aplicações do critério de divisibilidade por 7:*

(i) *O resto da divisão de* 531 *por* 7 *é* 6*, pois e* 532 *é divisível por* 7*.*

$1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 20 \equiv 6 \mod 7$

(ii) O resto da divisão de 1.657 *é divisível por* 7*, pois é*

$(2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6) - (1) = 28 \equiv 0 \quad \text{mod } 7.$

5. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE NÃO MNEMÔNICOS

Nesta seção são mostrados critérios de divisibilidade fáceis, no entanto, não mnemô- nicos. Os critério foram apresentados na RPM nº 6 e ampliado na RPM nº 12.

Dado um número $a = (r_n \ldots r_1 r_0)$, considere $k = r_n \ldots r_2 r_1$. Um primo p exposto na Tabela 1 é divisível por p, se $k + r_0$ é múltiplo de p.

Tabela 1 – Divisibilidade dos primos entre 7 e 37

Número Primo	Forma Aditiva	Forma subtrativa
7	$k + 5r_0$	$k - 2r_0$
11	$k + 10r_0$	$k - r_0$
13	$k + 4r_0$	$k - 9r_0$
17	$k + 12r_0$	$k - 5r_0$
19	$k + 2r_0$	$k - 17r_0$
23	$k + 7r_0$	$k - 16r_0$
29	$k + 3r_0$	$k - 26r_0$
31	$k + 28r_0$	$k - 3r_0$
37	$k + 26r_0$	$k - 11r_0$

Aplicações dos critérios apresentados na Tabela 1.

5.1 Divisibilidade por 7

A Tabela 1 permite o uso de dois métodos, um aditivo e outro subtrativo. Assim um número será divisível por 7 se $k + 5r_0$ for divisível por 7, pela forma aditiva, por outro lado usando a forma subtrativa se, $k - 2r_0$ o for.

Exemplo 4. *O número* 33.684 *é divisível por* 7*?*

Solução: Utilizando a forma aditiva, para $k = 3.368$ e $r_0 = 4$. Como $5\ r_0 = 5\ 4 = 20$, tem–se

$3368 + 20 = 3388.$

Continuando no processo: $k = 338$ e $r_0 = 8$. Assim $5 \cdot r_0 = 5 \cdot 8 = 40$ e

$338 + 40 = 378.$

Novamente, $k = 37$ e $r_0 = 8$. Daí $5 \cdot r_0 = 5 \cdot 8 = 40$,

$37 + 8 = 77$.

Como 77 é múltiplo de 7, tem–se que 33.684 é divisível por 7.

Assim,

utilizando a forma subtrativa ($k - 2r_0$), $k = 3.368$ e $r_0 = 4$. Como $2 \cdot r_0 = 2 \cdot 4 = 8$,

$3368 - 8 = 3360$.

Assim, $k = 336$ e $r_0 = 0 \Rightarrow 2 \cdot r_0 = 2 \cdot 0 = 0$, tem–se

$336 - 0 = 336$.

Continuando, $k = 33$ e $r_0 = 6$, assim $2 \cdot r_0 = 2 \cdot 6 = 12$, tem–se

$33 - 6 = 21$.

Assim 21 é múltiplo de 7, logo 33684 também será.

5.2 Divisibilidade por 13

Utilizando a Tabela 1 na forma aditiva.

Exemplo 5. *O número* 52.819 *é divisível por* 13*?*

Solução: Utilizar $k + 4r_0$, $k = 5.281$ e $r_0 = 9$. Como $4 \cdot r_0 = 4 \cdot 9 = 36$, assim

$5281 + 36 = 5317$.

Assim, $k = 531$ e $r_0 = 7$, $4 \cdot r_0 = 4 \cdot 7 = 28$, tem–se que

$531 + 28 = 559$.

Continuando, $k = 55$ e $r_0 = 9$, assim $4 \cdot r_0 = 4 \cdot 9 = 36$, tem–se

$55 + 36 = 91$.

Prosseguindo mais uma vez, $k = 9$ e $r_0 = 1$, assim $4 \cdot r_0 = 4 \cdot 1 = 4$,

$9 + 4 = 13.$

Como 13 é múltiplo de 13, tem−se que 52.819 é divisível por 13.

5.3 Divisibilidade por 19

Pela Tabela 1 pode ser utilizada pela forma da adição ou subtração.

Exemplo 6. *O número* 420.945 *é divisível por* 19*?*

Solução: Utilizar $k + 2r_0$ temos $k = 42.094$ e $r_0 = 5$. Faremos de modo direto,

$$\begin{array}{r} 42094 \\ + \quad 10 \\ \hline 42104 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4210 \\ + \quad 8 \\ \hline 4218 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 421 \\ + \quad 16 \\ \hline 437 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 43 \\ + \quad 14 \\ \hline 57 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5 \\ + \quad 14 \\ \hline 19 \end{array}.$$

Como 19 é múltiplo de 19, tem−se que 420.945 é divisível por 19.

Exemplo 7. *O número* 602.091 *é divisível por* 19*?*

Solução: Utilizando $k - 17r_0$, $k = 60.209$ e $r_0 = 1$. De modo direto,

$$\begin{array}{r} 60209 \\ - \quad 17 \\ \hline 60192 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6019 \\ - \quad 34 \\ \hline 5985 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 598 \\ - \quad 85 \\ \hline 513 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 51 \\ - \quad 51 \\ \hline 0 \end{array}.$$

Portanto, tem−se que 602.091 é divisível por 19.

As Tabelas 1 e 2 permitem qualquer leitor fazer a verificação de modo fácil, utilizando apenas a forma aditiva ou a forma subtrativa, se um dado número inteiro é, ou não, divisível por um dado número primo de 7 e 97.

Tabela 2 – Divisibilidade dos Primos entre 41 e 97

Número Primo	Forma Aditiva	Forma subtrativa
41	k + $37r_0$	k - $4r_0$
43	k + $13r_0$	k - $30r_0$
47	k + $33r_0$	k - $14r_0$
53	k + $16r_0$	k - $37r_0$
59	k + $6r_0$	k - $53r_0$
61	k + $55r_0$	k - $6r_0$
67	k + $47r_0$	k - $20r_0$
71	k + $64r_0$	k - $7r_0$
73	k + $22r_0$	k - $51r_0$
79	k + $8r_0$	k - $71r_0$
83	k + $25r_0$	k - $58r_0$
89	k + $9r_0$	k - $80r_0$
97	k + $68r_0$	k - $29r_0$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho mostra a aritmética modular, formando os critérios de divisibilidade mnemônicos e não mnemônicos, apresentando uma aplicação da congruência linear para justificar os critérios de divisibilidade mnemônicos. Assim, os critérios de divissibilidade mnemônicos são expostode forma simples e monstra a divisão não mnemônica de forma simples. Portanto, o trabalho apresenta formas simples de determinar a divisibilidade por números primos de 7 a 97.

Logo, os critérios de divisão mnemônicos e não mnemônicos facilitará o aprendizado no âmbito da matemática.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgar de. – Teoria Elementar dos números. 2ª Ed. São Paulo: Nobel, 1981.

ALMEIDA, Felliphe de. - *Aritmética modular e suas aplicações: uma experiência de atuação no Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), 2019.

GUEDES, M. G. P. – *Outros Critérios de Divisibilidade*. Revista do Professor de Matemá- tica, Rio de Janeiro, n. 12.

HEFEZ, Abramo. – *Aritmética*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEFEZ, Abramo. – *Elementos de Aritmética*. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

NITERÓI, Mário Gustavo Pinto Guedes – *As coisas que ensinamos, Outros Critérios de Divisibilidade*. Revista do Professor de Matemática - RPM, Volume 12. Rio de Janeiro - RJ. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/12/6.htm. Acesso em 01 fev. de 2021.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. – *Introdução à Teoria dos Números*, 3ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

TÁBOAS, Carmen M. G.; RIBEIRO, Hermano de Souza. – *Sobre Critério de Divisibilidade*. Revista do Professor de Matemática - RPM, Volume 6. Rio de Janeiro - RJ. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/6/5.htm. Acesso em 01 fev. de 2021.

CAPÍTULO 15

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO E COMPREENSÃO DA FÍSICA

Nathanael de Sousa Barreto

Sergio Nolêto Turibus

RESUMO

A presente pesquisa mostra por meio das funções afim e quadrática a relação existente entre Matemática e Física e o quanto a mesma é importante para crescimento e compreensão da Física. A metodologia da resolução de problemas foi a ponte pelo qual as expressões matemáticas ganharam vida nas aplicações, permitindo alcançar objetivos além do imaginado. Dentre esses objetivos pode-se citar a melhora na interpretação de problemas contextualizados, motivou os alunos a estudar tanto a Matemática quanto a Física e, além disso, pôde-se perceber que o fracasso em Matemática implicará no fraco de muitas disciplinas incluindo entre elas a Física. O trabalho foi realizado na cidade de Anajatuba - MA durante um bimestre e durante esse tempo foi aplicado um curso de resolução de problemas e os resultados foram colhidos por meio de questionário ao final do mesmo.

Palavras-chave: Função Afim. Conexão entre Matemática e Física. Resolução de Problemas.

1. INTRODUÇÃO

Matemática e Física são disciplinas imprescindíveis para o desenvolvimento de qualquer sociedade. Muitos chamam a Matemática de a linguagem do universo pelo fato da mesma descrever com perfeição inúmeros movimentos e fenômenos naturais. A Física possui como essência estudar diversos fenômenos da natureza e nesse processo a Matemática é um instrumento que possibilita uma melhor compreensão desses fenômenos e movimentos em estudo.

Conteúdos de Física como Movimento Uniforme, Movimento Uniformemente Variado, Estudo de Ondas e tantos outros abordados durante o ensino médio mostra como a Matemática tem forte ligação com a Física e é importante para a compreensão de tais conteúdos já que os mesmos são aplicações do estudo de função afim, função quadrática e estudo das funções trigonométricas seno e cosseno respectivamente.

Dados oficiais do SAEB 2017 afirmam que 70% dos jovens que terminam o ensino médio não possuem os conhecimentos básicos de Matemática, ou seja, 7 a cada 10 alunos. O estrago é ainda maior, pois o fracasso em Matemática implicará no fracasso de disciplinas como a Física, pois o currículo de ambas está interligado de maneira significativa. Portanto, é necessário que tanto alunos como professores compreendam que o não desenvolvimento da Matemática, significa atraso em várias disciplinas das ciências naturais, com destaque para a Física.

Uma alternativa para mudar o quadro de desempenho dos alunos em disciplinas de cálculos como Matemática e Física, é motivá-los por meio das diversas aplicações e relações que tais disciplinas possuem. A Física é uma rica fonte de inspiração para o desenvolvimento da Matemática e vice-versa.

O presente trabalho expõe que a Matemática não se constitui de números sem sentidos e expressões sem conexões, mas uma disciplina que se une a tantas outras descrevendo a realidade por meio de números e expressões. Para alcançar o objetivo descrito anteriormente mostrou-se aos alunos como as expressões matemáticas dão significados às observações verificadas pela Física e para isso foi utilizado à resolução de problemas como forma de se evidenciar a conexão existente entre as duas disciplinas.

Tendo em vista a grande desmotivação dos alunos em estudar disciplinas de cálculo como Matemática e Física, pois muitas das vezes elas se apresentarem como disciplinas sem conexão com a realidade e com outras matérias, o presente trabalho alcança essas duas vertentes por meio de aplicações na resolução de problemas.

A pesquisa foi realizada na Cidade de Anajatuba – MA com alunos de 1º e 3º ano do ensino médio participando ao todo mais de 60 alunos. Para análise de resultados foi realizado um curso de resolução de problemas com os alunos durante 1 bimestre. No curso foi abordado os conteúdos de movimento uniforme e movimento uniformemente variado dando significado as suas equações e na sequência fazendo aplicações com resolução de problemas.

Durante a resolução dos problemas foi feita toda uma conexão entre as disciplinas de Matemática e Física dando significado a cada termo das equações. Depois da aplicação do curso foi aplicado um questionário com algumas perguntas que permitiu a coleta de resultados.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar os resultados desejados, foi realizado um curso através da metodologia da resolução de problemas com alunos do primeiro e terceiro ano do ensino médio da escola estadual C.E.NINA RODRIGUES na cidade de Anajatuba - MA durante um bimestre.

O curso tem por finalidade que os alunos respondam a quatro questionamentos, pois a analise e discussão dos resultados da pesquisa será dada mediante as respostas dos alunos.

O curso deu ênfase na resolução de problemas, porém inicialmente foi ministrado durante 10 aulas (cerca de duas semanas) os conteúdos de função afim, função quadrática, movimento uniforme (MU) e movimento uniformemente variado (MUV), logo após a exposição dos conteúdos, o curso foi dividido em três momentos. O primeiro com uma variedade de problemas contemplando os conteúdos abordados. O segundo momento foi voltado a análise de questões do ENEM que contemple as funções afim e quadrática. O terceiro momento foi dedicado a resolução de problemas da Física.

O primeiro momento do curso de resolução de problemas visa dar significados as características e propriedades dos conteúdos, e valorizar as aplicações. O segundo momento objetivou mostrar como a principal porta de entrada ao ensino superior tem abordado os conteúdos de função afim e quadrática. Na terceira parte, o objetivo era mostrar a conexão entre Matemática e Física, e a importância da Matemática na descrição de alguns movimentos da Física.

Por fim, ao final do bimestre foi aplicado o questionário (APÊNDICE) com os questionamentos a serem respondidos e posteriormente analisados através dos comentários dos alunos. Participaram do curso cerca de 60 alunos (1° e 3° ano do ensino médio).

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Estudo da Função Afim

Durante o processo de crescimento do mundo cientifico conceitos sofrem evolução e aperfeiçoamentos, assim aconteceu com o conceito de função dentro da Matemática. O primeiro a introduzir alguns termos como “variável”, “constante” e “parâmetro” foi Leibniz, porém muitos outros matemáticos como Newton, Euler e Johann Bernoulli tiveram grande contribuição nesse processo.

As aplicações em diversas áreas do conhecimento como Física, Química e outras, é resultado da evolução do conceito de função. Pois é o modelo matemático usado para descrever a relação entre grandezas que se relacionam de alguma forma, assim o estudo de funções se torna um dos pilares da Matemática contemporânea.

As funções em seus diferentes tipos, além de ajudar a compreender fenômenos em outras áreas, elas permitem a compreensão de outros conteúdos dentro da própria Matemática. Quando a função afim se relaciona com o estudo de progressões aritméticas e juros simples, a função exponencial mostra o que acontece no mercado financeiro por meio do juros compostos (sistema SAC e PRICE), a função quadrática descreve de maneira eficaz a trajetória no lançamento de foguetes e através de uma das suas propriedades que é de grande utilização nas parabólicas e faróis de carro.

3.1.1 Função Afim

Nesta seção do artigo será abordado alguns conceitos importantes para o objetivo do trabalho.

DEFINIÇÃO: "Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$" (LIMA, 2013, p. 79).

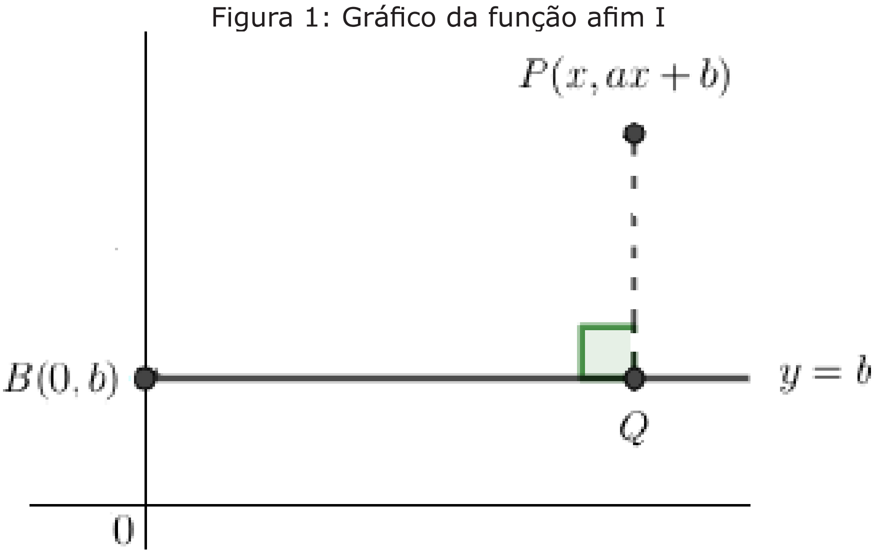
De acordo com Lima (2013), o gráfico de uma função afim (f) é uma linha reta, com f definida da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = ax + b.$$

Demonstração:

Considere a figura a seguir

Figura 1: Gráfico da função afim I



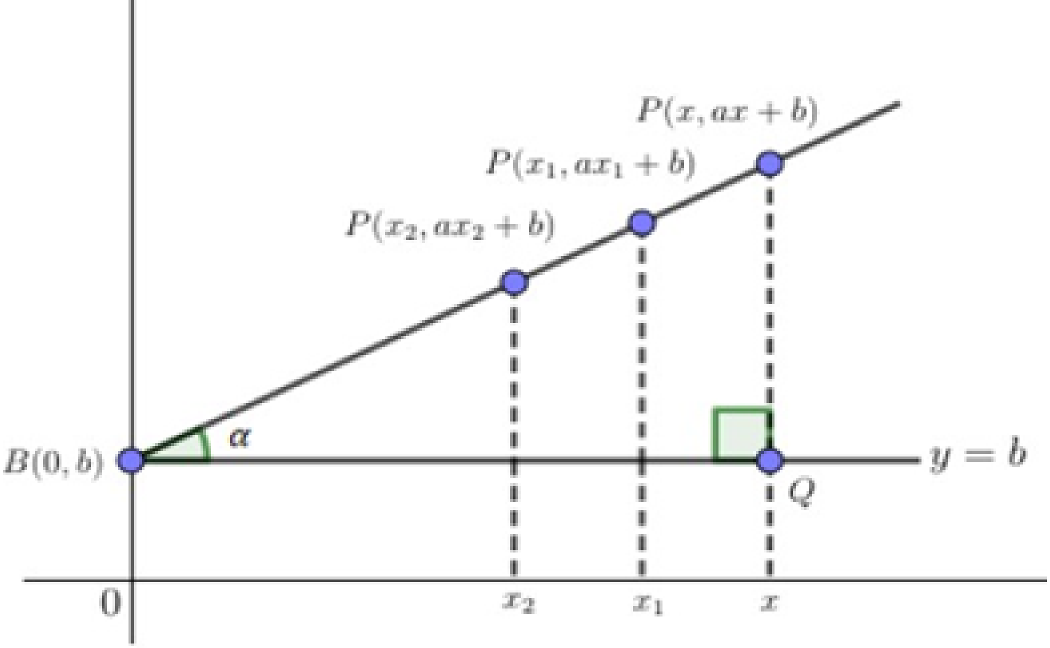
Fonte: Próprio autor

Os pontos B $(0, b)$ e $P(x, ax + b)$ da Figura 1 pertencem à função afim definida anteriormente, e sendo Q o pé da perpendicular de P baixada sobre o reta $y = b$, procede que a razão entre os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{BQ}$ é constante, pois

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{ax + b - b}{x - 0} = \frac{ax}{x} = a. \qquad \text{(Q)}$$

O resultado obtido na expressão (Q) significa que no triângulo retângulo BQP (reto em) da Figura 2, o ângulo $P\hat{B}Q = \alpha$ é constante independentemente da posição do ponto P, consequentemente o ponto P só pode se mover sobre uma reta, logo o gráfico da função afim é uma linha reta.

Figura 2: Gráfico da Função Afim II



Fonte: Próprio autor.

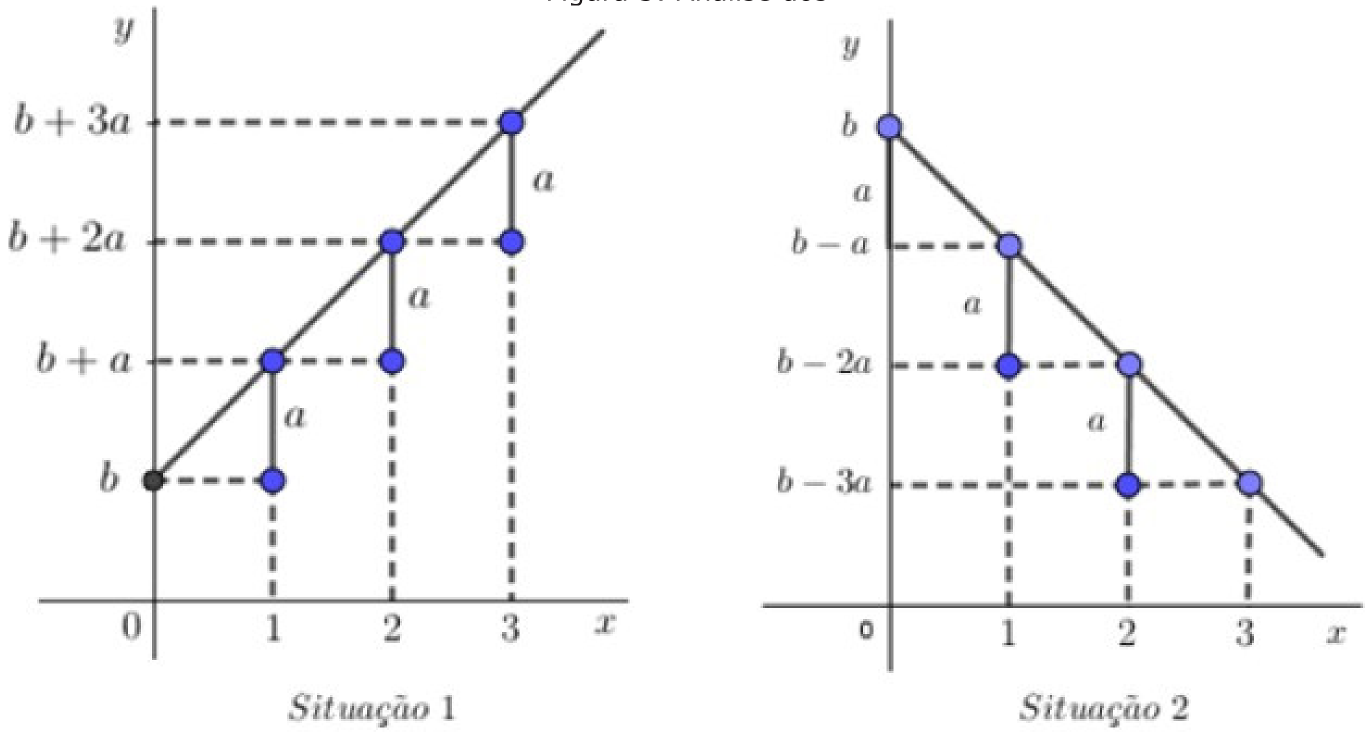
OBSERVAÇÃO: "Evidentemente, o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não é paralela ao eixo OY (eixo das ordenadas). Reciprocamente: Toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim"(LIMA, 2013, p. 82).

3.1.2 Coeficientes da Função Afim

Os coeficientes da função afim têm significados em diversas aplicações e sua compressão é de fundamental importância para a resolução de uma forma mais significativa e até com mais rapidez. Por isso essa será voltada para o significado de cada coeficiente.

A seguir tem-se duas situações para comentários acerca da funcionalidade de cada coeficiente da função afim em termos gráficos e facilitando o entendimento algébrico dos mesmos.

Figura 3: Analise dos



Fonte: Próprio autor.

O coeficiente a é o valor que faz com que a função f cresça ou decresça a cada unidade variada no eixo horizontal (eixo das abscissas). A situação 1 representa o crescimento da função em a unidades a medida que se aumenta uma unidade no eixo das abscissas, e a situação 2 mostra como a função decresce a cada variação de unidade no eixo das abscissas. Se $a > 0$, então f é crescente, e se, $a < 0$, então f é decrescente.

O coeficiente b é calculado quando y=0, ou seja, $b = f(0)$ e às vezes se chama o valor inicial da função f. Quanto ao coeficiente a , ele pode ser determinado a partir de dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$

quaisquer da função afim, sendo eles que a função assume em dois pontos distintos x_1 e x_2 (LIMA, 2013, p. 80). Conhecidos

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad e \quad f(x_2) = ax_2 + b$$

$$a \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1).$$

Dessa forma

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (a)$$

Dados , $x_1 = x$, o número $x_2 = x + h \in \mathbb{R}$ da equação (a) chama-se a taxa de variação da f função no intervalo de extremos x e $x + h$.

3.2 A conexão entre Matemática e Física

Muitos dos fenômenos encontrados na Física são descritos pelas funções afins, assim o conhecimento do estudo das funções se faz necessário para compreensão dos variados objetos de estudos da Física.

Por isso, a seção faz uma ponte entre as disciplinas de Matemática e Física através do estudo da função afim. Inicialmente a relação entre tais currículos é feita teoricamente e logo após esse estudo, as características e propriedades dos mesmos ganharão vida nas aplicações dos problemas.

3.2.1 Função Afim e Movimento Uniforme

A conexão entre função afim e o movimento uniforme começa pela definição, observemos a definição a seguir:

Um determinado objeto está em movimento uniforme (MU) em um dado intervalo de tempo quando sua velocidade escalar instantânea for mantida constante e diferente de zero em todo intervalo considerado, ou seja, percorre sempre a mesma distância em intervalos de tempos iguais (MARTINI, 2016).

Isto significa que a distância $s(t+h) - s(t)$ percorrida no tempo h desde a posição $s(t)$, depende apenas de h, mas não de t, como se vê na Figura 3 da função afim. Então s é uma função afim, assim $s(t) = a \cdot t + b$, sendo $a = s(t+1) - s(t)$ o espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se velocidade média do movimento realizado pelo objeto, $b = s(0)$ é a posição inicial e $s(t)$ é a posição no instante t (LIMA, 2013).

Como a velocidade média representada pelo coeficiente a na função é o espaço percorrido na unidade de tempo, dados dois pontos do móvel (objeto) na trajetória $(t_1, s(t_1))$ e $(t_2, s(t_2))$, onde $t_1 \neq t_2$ pode-se obtê-la pela relação $a = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Assim, se $a = v =$ velocidade média e $b = s_0 =$ posição inicial, logo a função horária da posição em função do tempo no MU é dada pela equação

$$s(t) = v \cdot t + s_0.$$

A função afim também ocupa papel importante na compreensão do Movimento Uniformemente Variado (MUV). A expressão () relaciona a posição de um determinado objeto em função do tempo no qual s_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial e a é a aceleração constante.

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \qquad ()$$

O MUV é caracterizado pela aceleração constante, dessa forma em qualquer movimento retilíneo, dado por uma função arbitrária $s(t)$, a razão dada por

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{Distância\,Percorrida}{Tempo\;de\,percurso}$$

é chamada de *velocidade média* do ponto no intervalo cujos extremos são $s(t+h)\ e\ s(t)$. No caso em que $s(t)$ é dada pela expressão (), a velocidade nesse intervalo é

$$\frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2 + v_0(t+h) + s_0 - \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0\right)}{h}$$

$$\frac{tah + v_0 h + \frac{1}{2}ah^2}{h}$$

$$at + v_0 + \frac{ah}{2}. \qquad ()$$

Se tomarmos na expressão (), h cada vez menor ela se aproxima de $at + b.$ Por se diz que a velocidade de um determinado ponto em MUV no instante t é dada pela seguinte expressão

$$v = v_0 + at.$$

A mesma também é chamada de equação horária da velocidade.

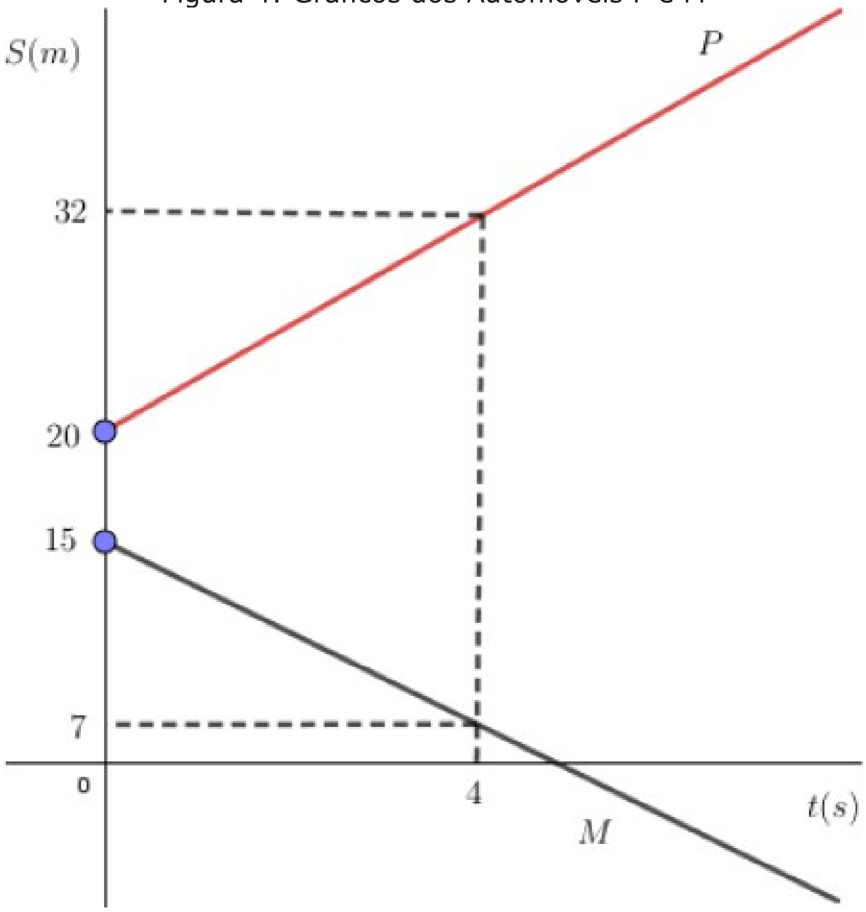
"Quando $t = 0$ por consequência $v(0) = b$, por isso b se chama *velocidade inicial*. Além disso, vê- se que $a = [v(t+h) - v(t)]/h$ para quaisquer $t\ e\ h$, logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade"(LIMA, 2013, p.127).

3.3 Aplicações da Função Afim na Física por Meio da Resolução de Problemas

Nesta seção será exposto duas das várias aplicações feitas no curso de resolução de problemas, mostrando a relação entre a Matemática e Física e como as expressões matemáticas são importantes e possuem sentido.

APLICAÇÃO: O gráfico representa o movimento de dois automóveis, M e P, pela mesma estrada retilínea. Responda:

Figura 4: Gráficos dos Automóveis P e M



a) Quais as funções horárias da posição desses automóveis?

b) Qual a distância entre eles aos 2 s?

c) Quanto tempo a contar do instante inicial, demorará para que a distância entre M e P seja igual a 60 m?

RESOLUÇÃO:

a) É fácil notar que o movimento descrito pelos automóveis é dado por uma função afim tendo em vista que o gráfico do mesmo é uma reta não-vertical como visto no tópico de estudo sobre função afim, por consequência segue-se que a função horária dos móveis M e P são do tipo

$$S_P = at + b \text{ e } S_M = at + b.$$

Para P, temos $b = 20$, e $b = 15$ para M, pois $b = s(0)$. Já o valor de a para o móvel M e P diferem já que ambos crescem ou decrescem de maneira diferente. Como visto, basta termos dois pontos distintos sobre cada gráfico para encontrar o valor de a, assim para o móvel M pegaremos os pontos (0, 15) e (4 e 7) e para P os pontos (0, 20) e (4, 32). Desse modo, temos que para o móvel , $a = \frac{32-20}{4-0} = 3$ e para *M* , $a = \frac{7-15}{4-0} = -2$. Portanto,

$$S_P = 3t + 20 \text{ e } S_M = -2t + 15.$$

b) Como a posição se encontra em metros e o tempo em segundos a taxa de variação do móvel P é 3*m/s* e para M é de -2*m/s*, ou seja, a cada segundo que passa o móvel P cresce 3m e o móvel M decresce 2m, dessa forma fazendo apenas a análise da taxa de variação (*velocidade média*) é fácil perceber que o móvel P se encontra na posição de número $26\ m$ e M na posição 11m depois de 2 segundos de movimento, assim a distância entre os móveis é $26 - 11 = 15\ m$.

c) Pelo item anterior temos que os móveis estão andando em sentidos opostos na trajetória, um andando 3m a cada segundo e o outro 2m, assim a cada segundo eles se distanciam 5m, como inicialmente a distância entres eles é de 5m então 55m precisam se deslocar mais 60m desse modo o tempo gasto para que a distância entre eles seja de é de 55/5 = 11s.

APLICAÇÃO: Dois automóveis, A e B, desenvolvem movimento uniforme sobre a mesma estrada retilínea, no sentido da trajetória, com velocidades escalares iguais a, respectivamente

72 km/h e 90 km/h. No momento em que A passa pelo quilômetro 100, B passa pelo quilômetro 140. Qual será a posição de B, quando A passa pelo quilômetro 140?

RESOLUÇÃO: O primeiro passo é encontrar a função que descreve o movimento de cada móvel. Como o movimento é uniforme, logo para os automóveis A e B, tem-se que

$S_A = vt + s_0 \text{ e } S_B = vt + s_0.$

Como a análise do movimento se dá quando A se encontra no quilômetro 100 e B no 140, logo o valor de $s_0 = 100$ para o móvel A e $s_0 = 140$ para B, logo

$$S_A = 72t + 100 \ e \ S_B = 90t + 140.$$

Para saber a posição do móvel B, é preciso saber o tempo que A gastou até atingir a posição 140 km, assim, temos que

$$72t + 100 = 140 \ \Rightarrow t = \frac{5}{9}h.$$

Desse modo, a posição que B ocupa quando A está no quilômetro 140 é quanto $t = \frac{5}{9}$, portanto

$$S_B = 90 \cdot \frac{5}{9} + 140 \ \Longrightarrow \ S_B = 190 \ km.$$

3.4 A importância da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

Um dos pilares da metodologia da resolução de problemas é quanto ao tipo de exercício proposto ao aluno, visando minimizar a ênfase dos exercícios padronizados onde geralmente o objetivo maior é aplicar fórmulas e regras, se voltando mais para as situações problemas que conecte o conteúdo com a realidade, traga significados as características do conteúdo e motive o aluno a prosseguir os estudos.

Os problemas propostos por tal metodologia buscam desenvolver no aluno a capacidade de estabelecer estratégias, rapidez na compreensão dos dados e também um senso crítico apurado. A resolução de problemas como metodologia de ensino não tem apenas o objetivo de encontrar a solução correta dos problemas, mas vê em cada problema uma oportunidade de ir além, de questionar o próprio, a solução do problema e assim construir um conhecimento mais sólido e significativo.

Andrade e Oliveira (2014, p. 15) afirmam:

> Dentre as tendências mais relevantes está a resolução de problemas e o uso de tecnologias educacionais, como proposta de mudança no modo de conceber a Matemática. [...] São situações diversificadas que visam desafiar e estimular os alunos a pensar, explorando tanto quanto possível os problemas da vida real (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 15).

A resolução de problemas além de oportunizar o professor para que possa resolver os diferentes tipos de problemas por diversos ângulos, também permite que os alunos utilizem estratégias pessoais, podendo socializar e assim valorizar o raciocínio utilizado por cada um. Verificar as semelhanças e diferenças nas estratégias são ações imprescindíveis do professor no trabalho com resolução de problemas (Reame; Montenegro, 2014).

> Essas ações contribuem de maneira determinante para o desenvolvimento da autonomia do aluno no enfrentamento de uma situação nova; para o exercício de ações competentes pelo aluno diante de situações competentes pelo aluno diante de situações imprevistas, desconhecidas, diferentes daquelas que ele já domina; para ampliação do repertório de cálculo e estratégias para a resolução de um problema (Reame; Montenegro, 2014, p. 294).

Uma das etapas importantes da metodologia da resolução de problemas é a valorização do erro, onde busca extrair o motivo que o causou e qual o significado tem para o problema abordado.

> Na nova concepção de erro, este é interpretado como parte natural, inevitável e indispensável ao processo de aprendizagem, o erro é um indicador de (re) direcionamento pedagógico porque ele oferece a oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor (LORENZATO, 2010, p. 49-50).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 96) do ensino médio, uma das competências e habilidades que aluno deve possuir é "compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas."

Tendo em vista que os avanços das sociedades são constantes exigindo que cada profissional esteja sempre em formação e se adaptando a novas situações é necessário que o aluno desenvolva a habilidade de aprender a aprender. Segundo Soares e Pinto "Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino".

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

A análise será feita através das respostas dos alunos no teste avaliativo com os devidos comentários acerca dos mesmos. Os resultados foram satisfatórios, pode-se afirmar que alguns comentários superaram as expectativas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados do desenvolvimento do trabalho analisados mediante a visão dos alunos, superaram em muito as expectativas e nos mostram a importância da resolução de problemas como uma ferramenta importante no processo de ensino aprendizagem, pois através da mesma muitos objetivos para a melhoria da educação podem ser alcançados.

A reação dos alunos foi surpreendente na aplicação do trabalho proposto. A Matemática se conectou com o mundo deles, proporcionando a aplicação do conteúdo de diferentes formas, desde as aplicações mais simples até as mais complexas.

O depoimento de um dos alunos após à aplicação do projeto mostra a sua relevância, ele disse "[...] a Matemática é uma ferramenta essencial para a Física. E a Física é uma rica fonte de inspiração para a Matemática. Portanto a convicção de que os números governam o mundo. "O fato de um aluno expor tal comentário depois de perceber a conexão existente entre as duas disciplinas coroa a importância da resolução de problemas como uma ferramenta de extrema importância.

Por fim, a pesquisa demonstra os grandes benefícios da resolução de problemas como estratégia de ensino. Bastando para isso que o professor utilize tal ferramenta com problemas que busque motivar, acrescentar algo ao no seu currículo e surpreender o aluno. Todavia, diante dos resultados apresentados na seção anterior sobre o tema proposto, novas pesquisas são de suma importância, assim indico principalmente aos educadores das disciplinas de Matemática e Física, como também para professores e acadêmicos de áreas como química, as engenharias e tantas outras que se relacionam. Como sugestão deixo a inserção da tecnologia como auxilio na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Paulo Eduardo de; OLIVEIRA, Luciana Schreiner de. **A metodologia da resolução de problemas e o desempenho escolar**. 2014. Artigo, Paraná.ISBN 978-85-8015- 080-3. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_artigo_paulo_eduardo_de_andrade.pdf> Acesso em: 02 Dez. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Média e tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia: Imprensa Nacional, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 07 nov 2018.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT, 07). ISBN: 978-85-85818-81 -4.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. rev. - Campinas, SP: Autores associados, 2010. (Coleção formação de professores). ISBN 978-85-7496-154-5.

REAME, Eliane; MONTENEGRO, Priscila. Projeto Coopera matemática. - 1. ed. - São Paulo : Saraiva, 2014. ISBN 978-85-02-22450-6(professor).

CAPÍTULO 16

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Weslley Jonh Barros Silva[1]

Sandra Imaculada Moreira Neto[2]

1 Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão-UEMA. Endereço de e-mail: weslley--jonh@hotmail.com

2 Doutora em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão-UEMA. Endereço de e-mail: ymaculada@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem no Brasil, apresenta estatísticasque mostram sua precariedade. No último IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), ocorrido em 2017, o Brasil ficou com nota 4,4, não sendo alcancadas suas metas para esse ano e ainda distantes da meta mínima desejada, que é 6,0. Os dados da educação brasileira são ainda mais alarmantes quando se observa a disciplina Matemática. No último PISA (sigla em inglês Programa de Avaliação Internacional de Estudantes), constatou-se que 70% dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível básico de proficiência esperado, o que mostra o caráter de urgência na tomada de medidas por partes de todos os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem de matemática no Brasil.

Necessita-se de mudanças na forma como a disciplina vem sendo ensinada atualmente. Nessa perspectiva, deve-se apresentar aos estudantes uma matemática que relacione prática com a teoria, que é o caso da proposta do uso de construções geométricas com régua e compasso, abordada neste trabalho. Essa proposta será utilizada como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de geometria.

As construções geométricas com régua e compasso são usadas desde os primórdios da geometria pelos gregos. Segundo Wagner, 2009 " [...] as construções geométricas permanecem imunes ao tempo (ao contrário de diversos tópicos da Matemática que foram continuamente modificados) sendo tão útil hoje como em qualquer outra época para educação do jovem estudante de matemática". Apesar de sua utilidade histórica, essa ferramenta tem sido pouco usada na educação básica.

Geralmente os livros didáticos apresentam algumas construções geométricas, com régua e compasso. Como exemplo citamos a coleção Matemática Bianchini do autor Edwaldo Bianchini de 2015. Essas construções devem ser feitas nos conteúdos teóricos de geometria, mas geralmente são negligenciadas pelos professores, ou porque não tenham as habilidades necessárias ou porque julgam de pouca relevância.

No presente trabalho será investigado o seguinte problema: A prática de construções geométricas com régua e compasso melhora o processo de ensino-aprendizagem de matemática tornado a teoria de mais fácil assimilação e compreensão para o aluno?

De acordo com esse questionamento essa pesquisa busca na educação básica, mais especificamente em turmas de 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública, aspectos qualitativos que mostrem a relevância do ensino de construções geométricas com o uso de régua e compasso, melhorando dessa forma, a assimilação dos conteúdos de geometria.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A obtenção de dados da pesquisa ocorreu com um grupo composto por 20 alunos matriculados no 8º de uma escola pública, onde os mesmos fizeram um minicurso com duração de 12 h/a, na sala de aula. Nesse minicurso foram contemplados, através de construções geométricas com régua e compasso, conteúdos de geometria programados no livro didático e outras construções que não estão no programa anual. O minicurso aborda desde as construções simples, como o transporte de segmentos e ângulos, até algumas construções mais complexas, como a construção do incírculo e circuncírculo de um triângulo.

Durante o minicurso, inicialmente foi apresentado aos estudantes os instrumentos de construção geométrica, que são a régua sem marcação e o compasso. Posteriormente foram desenvolvidas algumas atividades básicas, como a construção de vários círculos, para que se familiarizassem com o compasso. Também, foram feitas algumas construções elementares na sala, em forma de tutorial, para que eles as reproduzissem, foram elas: ponto médio, bissetriz e mediatriz.

Depois, foram propostas alguns problemas para eles resolverem, sendo estes, combinações de algumas construções elementares previamente feitas pelos alunos no minicurso, foram elas: construção dos ângulos de 90º, 45º, 60º, 30º e 15º seguindo essa sequência. Deste modo, foi observado desde as soluções dadas por eles até as tentativas de resolução, quando alguns não conseguiram resolver a atividade proposta. Algumas atividades foram propostas em forma de competição, dividindo os alunos em grupos, onde a precisão da construção era o fator que decidia qual grupo pontuava em cada atividade. Para verificar a precisão foi utilizado outros instrumentos de desenho como: o esquadro, a régua graduada e transferidor. Dentre as atividades que foram proposta em forma de competição, se destacou entre eles, a construção de um circuncirculo, pois o mesmo é feito construindo um triângulo e encintrando o ciscuncentro, de modo que o circuncírculo tenha intersecção nos três vértices do triângulo. Dessa forma a precisão do desenho fica bem perceptível.

Também foi feita uma análise da coleção de matemática, em uso na escola onde foi feito o minicurso, observando quantas e quais foram as construções geométricas com régua e compasso, que foram apresentadas pelo autor do livro como exercício resolvido ou atividade proposta.

Nos questionários feitos aos alunos, buscou-se primeiramente fazer um levantamento sobre o uso de construção geométrica na vida escolar desses alunos e também a opiniao dos mesmos sobre tal utilização. No segundo questionário buscou-se fazer uma comparação sobre as concepções dos estudantes antes e depois de trabalhar com construções geométricas no minicurso.

Ainda no minicurso, foi aplicado um questionário para os professores, buscando entender qual a relação dos mesmos com a ultilização das construções geométricas em sala de aula.

3. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO

As construções geométricas foram desenvolvidas pelos gregos e levada através do tempo até nós como uma ferramenta para resolver problemas de geometria. De acordo com Wagner (2009) "As construções com régua e compasso ja apareceram no século V a.C, época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega." (p.1).

Entretanto, com o passar do tempo a prática de construções geométricas foi ficando cada vez mais rara nas escolas, sendo muitas vezes pouco abordada nos livros didáticos. Atualmente muitos livros apresentam algumas construções elementares, mas na maioria das vezes os professores negligenciam essa parte, deixando assim de usar essa ferramenta nos conteúdos de geometria. Em um questionário feito com 20 professores da rede pública da educação básica, foi constatado que 40% deles nunca trabalharam a prática das construções geométricas com seus alunos. As causas podem ser diversas, desde a falta de preparo dos professores até a falta de planejamento ou a falta de instrumentos. O que se sabe é que muitos deles não apresentem essa prática a seus alunos, esses por sua vez deixam de ter contato com essa ferramenta da matemática.

> A rigor, ensinar geometria sem esses instrumentos é como dar a uma criança um triciclo sem as duas rodas traseiras. Ela até consegue se locomover, mas muito mal. Estamos é mutilando a geometria quando a ensinamos como fazemos hoje, além de abrir mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável (PUTNOKI, 2013, p.369).

Em tempos anteriores as construções geométricas eram feitas na disciplina "Desenho geométrico" que deixou de ser obrigatória, de modo que o ensino de construções geométricas se tornou raro nas escolas.

> Com a promulgação da LDB 5692/71, o Desenho Geométrico deixa de ser uma disciplina obrigatória e com essa lei, as escolas passam a ter liberdade para construir sua grade curricular, dentro da parte diversificada. Estes fatos, entre outros, contribuíram para que o Desenho Geométrico fosse excluído de muitas instituições escolares (ZUIN, 2001, p.7).

Entretanto, sabe-se que a geometria, aritmética e álgebra são interde- pendentes, de forma que pode-se ter a prática de construções geométricas em meio aos outros campos do saber matemático pode auxiliar na compreensão dessas construções, para que haja um melhor entendimento das mesmas, se tornando um aprendizado significativo e não configurem apenas como um processo decorativo. Essas construções geométricas devem ser relacionados com os demais campos do conhecimento, "[...]em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade "(ZUIN, 2002, p.11).

Supõe-se que os problemas de construção geométrica estimulam um aprendizado mais consistente, a exemplo temos o conceito de circunferência que pode ser definida como o conjunto dos pontos equidistantes de um ponto dado. Tal conceito quando passado para alunos de ensino fundamental, pode não apresentar a compreensão que o professor definiu previamente que eles adquirissem. Entretanto com o uso de instrumentos práticos, como é o caso da régua e compasso, supõe-se que esse conhecimento se torna muito mais significativo e de mais fácil assimilação, uma vez que o aluno a cada vez que constrói uma circunferência observa que a abertura do compasso é a mesma e por isso a distancia da ponta seca, onde fica o centro do circulo, até a outra ponta é sempre constante.

A geometria, em particular os problemas de construções geométricas, assim como toda a matemática, apresenta soluções por caminhos diversos, ficando a cargo do aluno escolher a maneira mais adequada. Segundo Wagner, (2009): "Muitas vezes, um problema de geometria e, em particular, de construção geométrica, pode ser resolvido de diversas formas, ou seja, por caminhos diferentes: mais curtos, mais longos e também mais bonitos". Por ser uma tividade prática, as construções geométricas podem ajudar aos alunos a terem uma assimilação melhor do que somente mostrando as propriedades geométricas na lousa. Lorenzato (2010), intensifica ao afirmar que "palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticos ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar" (p.17).

Livros didáticos em uso na escola em que alunos que participaram do minicurso estudam

Foi feita uma análise da coleção Matemática Bianchini, autor Edwaldo Bianchini, editora moderna, em uso de 2017 a 2019. A mesma é usada na escola em que os alunos que participaram do minicurso estudam. Nessa coleçãoo, foi contada a quantidade de construções geométricas, com régua e compasso, propostas aos alunos.

Ano	Número de construções
6º ano	3
7º ano	4
8º ano	6
9º ano	0

Tabela 1: Quantidade de construções geométricas por ano

Foi observado que o livro do 8º ano apresenta o maior número de construções gemétricas no ensino fundamental, na coleção analisada, motivo pelo qual os alunos do 8º ano foram escolhidos para esta pesquisa. Na Tabela 2, podemos observar quais são as construções geométricas apresentadas em cada ano letivo.

6º ano	7º ano	8º ano
Retas perpendiculares	Divisão de um segmento	Retas paralelas
Construção de triângulos	Ângulos congruentes	Segmentos congruentes
Construção do ângulo de 60º	Bissetriz de um ângulo	Ponto médio
	Construção de losangos	Bissetriz de um ângulo
		Triângulos
		Mediatriz

Tabela 2: Construções geométricas propostas em cada ano letivo

Em todos os anos é apresentada alguma proposta de construçãoo geométrica com régua e compasso, exceto no 9° ano do ensino fundamental, que é apresentada nenhuma proposta, haja visto que as construções geométricas elementares foram apresentadas nos anos anteriores. As construções geométricas propostas nos livros dessa coleção, apresentam as soluções passo a passo, para que o aluno possa reproduzi-la. No final de cada construção, pode-se observar a demonstração dessa construção geométrica, de forma bem simplificada, tendo em vista o nível de conhecimento dos alunos. Foi observado que esta coleção apresenta as principais construções geométricas elementares.

3.1 A Base Nacional Comum Curricular(BNCC) e as construções geométricas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2017, traz na parte de competências específicas, algumas propostas de construções geométricas que devem ser feitas pelos alunos.

Vamos destacar aqui algumas das habilidades, referentes as construções geométricas, com régua e compasso, que o aluno tem que alcançar o que diz respeito ao ensino da geometria, proposto pela BNCC em cada ano do ensino fundamental II.

7º ano:

> Construir circunfêrencia, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artistícas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (BRASIL, 2017, p.307).

8º ano:

> Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso (BRASIL, 2017, p. 313).

As construções geométricas com uso de régua e compasso, foram propostas no 7º e 8º anos na (BNCC). Isso não significa que os alunos não possam ter acesso a esses instrumentos em outras anos, mas que especificamente nos anos supracitados a ênfase deve ser maior.

Noções Básicas e instrumentos para a execução das construções geométricas

Quando se fala em construções geométricas nesse trabalho, refere-se a construções feitas somente com régua, sem marcação, e compasso. As regras das construções possíveis com régua e compasso são:

> Traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos; traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo; determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos. Não são permitidos: Traçar um círculo de raio ou centro "arbitrários"; usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso; tomar sobre uma reta um ponto "arbitrário"; deslizar a régua até certa posição; etc. (WAGNER, 2007, p.105)

Ao fazer uma construção geométrica com régua e compasso, devemos descrever os passos da construção que serão feitos, de forma que um leitor consiga entender esses passos e possa reproduzir a construção, seguindo os mesmos.

3.3 Construções geométricas com régua e compasso

Traçar a mediatriz de um segmento AB.

A Mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que passa pelo ponto médio desse segmento. Para construir a mediatriz basta seguir os seguintes passos:

i. Trace dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B

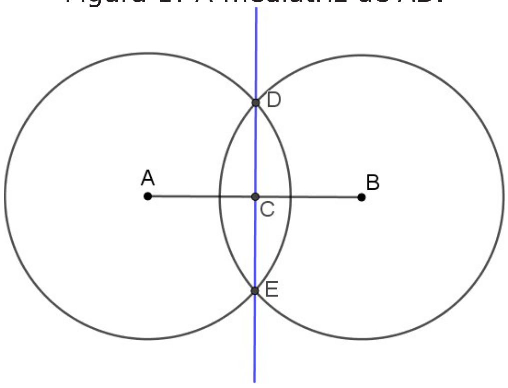
ii. Sejam D e E os pontos de intersecção desses círculos. Figura 5

A reta *DE* é a mediatriz de *A* e *B*.

Sendo *ADBE* um losango, suas diagonias são perpendiculares e cortame ao meio, logo *DE* é a mediatriz de *AB*, (Figura 6).

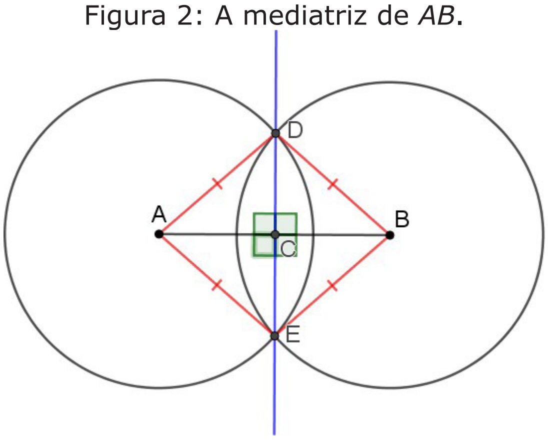
É importante lembrar que a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos equidistantes dos extemos desse segmento.

Figura 1: A mediatriz de *AB*.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Figura 2: A mediatriz de *AB*.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Construir um ângulo β congruente a um ângulo α

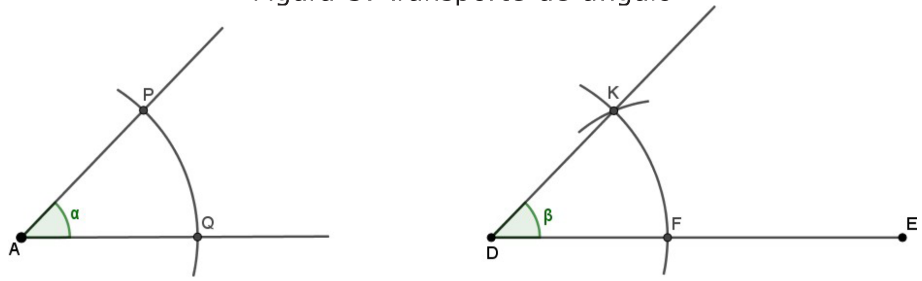
Para realizar essa construção segue-se os seguintes passos:

i) Traça-se um círculo qualquer de centro em *A*, determinando os pontos *P* e *Q* nos lados do ângulo α.

ii) Traça-se um círculo de mesmo raio e centro em *D*, determinando *F* em *DE*;

Com raio *PQ* traçamos um círculo de centro *D* para determinar *K* sobre o primeiro círculo. Dessa forma, encontramos α = β como pode-se observar na figura 3.

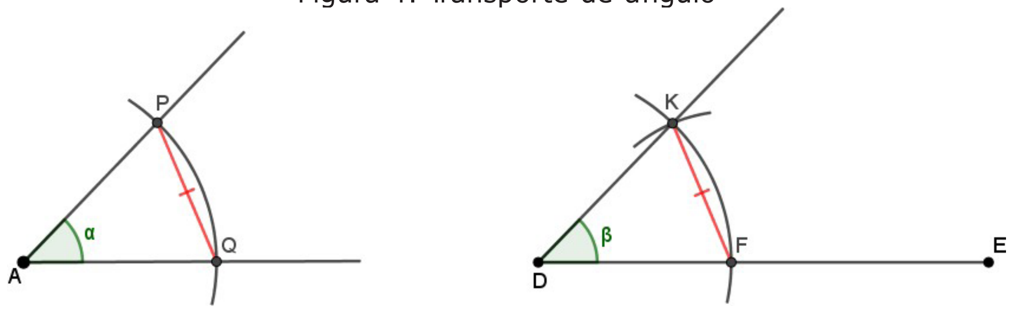
Figura 3: Transporte de ângulo



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato, na construção da Figura 3, basta construirmos o segmento PQ e o segmento KF como podemos observar na Figura 4, sabendo que $AP = DK$, $AQ = DF$ e $PQ = KF$, $AP = DK$, $AQ = DF$ e $PQ = KF$ pelo critério lado, lado, lado (LLL) tem -se que o triângulo APQ é congruente ao triângulo DKF, logo α = β.

Figura 4: Transporte de ângulo



Fonte: Criado pelo próprio autor

i) Trace dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B.

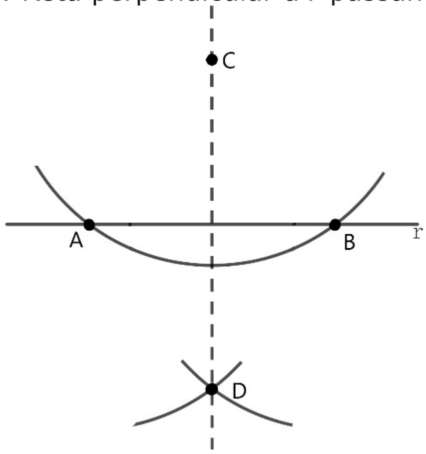
ii) Sejam D e E os pontos de intersecção desses círculos, Figura 5.

A reta DE é a mediatriz de AB.

Traçar uma reta perpendicular a reta r passando por um Ponto C, fora dela

Para traçar por um ponto C uma perpendicular a uma reta r, tracamos um círculo de centro em C que intersecta a reta r em A e B (Figura 5). Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio com centros em A e em B, passando por C, obtendo o ponto D, um dos pontos de interseção desses círculos. A reta CD é perpendicular a AB.

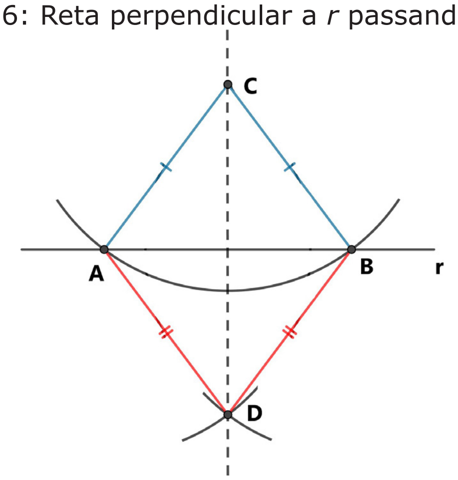
Figura 5: Reta perpendicular a *r* passando por *C*



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato, como $CA = CB$ e $DA = DB$, a reta CD é mediatriz de AB e portanto, perpendicular a AB como pode ser observado na Figura 6.

Figura 6: Reta perpendicular a *r* passando por *C*



Fonte: Criado pelo próprio autor

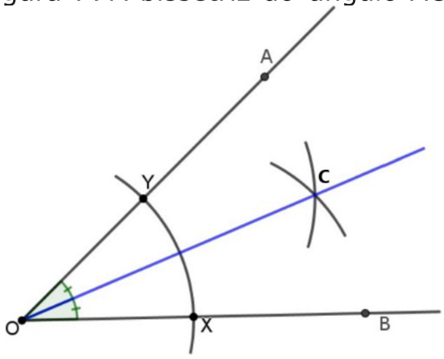
Traçar a bissetriz de um ângulo dado

A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semirreta OC tal que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$. A bissetriz divide o ângulo em dois outros ângulos de mesma medida. Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado, segue-se os seguintes passos:

i) Traçamos um círculo de centro O de terminando os pontos X e Y nos lados do ângulo (Figura 7)

ii) Em seguida Traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

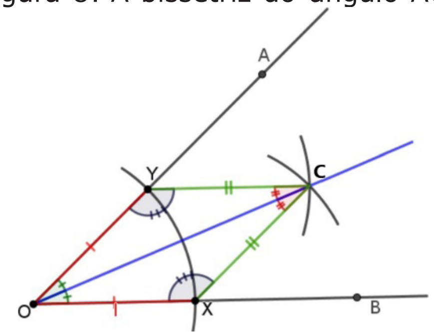
Figura 7: A bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato, pela construção feita, os triângulos OXY e OYC são congruentes (caso LLL) e portanto $X\hat{O}C = C\hat{O}Y$ como pode ser observado na Figura 8. Lembramos ainda que: *A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.*

Figura 8: A bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Criado pelo próprio autor

Traçar uma reta paralela a reta r passando por um Ponto P, fora dela

Para traçar por um ponto P uma paralela a uma reta r, deve-se proceder da seguinte maneira:

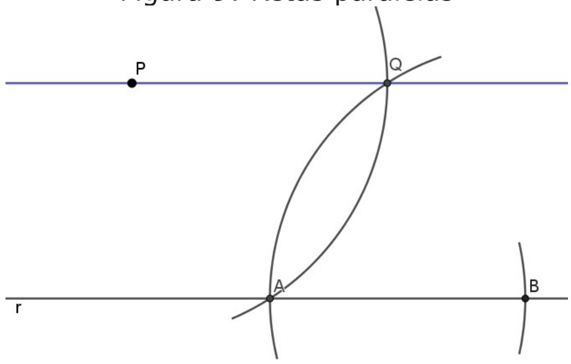
i) Traçamos três círculos, sempre com mesmo raio: o primeiro com centro em P, determinando um ponto A na reta r;

ii) Trace o segundo com centro em A, determinando o ponto B na mesma reta;

iii) Trace e o terceiro com centro em B, determinando o ponto Q sobre o primeiro círculo (Figura 9). Logo PQ é paralela a AB.

Observando como foi feita a construção, temos que $PABQ$ é um losango e portanto, seus lados PQ e AB são paralelos.

Figura 9: Retas paralelas



Fonte: Criado pelo próprio autor

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo será exposta a análise qualitativa e quantitativa do uso de construções geométricas com régua e compasso no processo de ensino- aprendizagem de matemática. Para isso, será mostrado aqui as análises feitas durante a pesquisa a respeito dessas construções geométricas, a saber: análise dos questionários feitos aos alunos, sendo um no início e outro no final do minicurso; análise da coleção de livro didático vigente na escola onde a pesquisa foi realizada; Análise do questionário feito aos professores.

Livros didáticos em uso na escola em que alunos que participaram do minicurso estudam

Foi feita uma análise da coleção Matemática Bianchini, autor Edwaldo Bianchini, editora moderna, em uso de 2017 a 2019. A mesma é usada na escola em que os alunos que participaram do minicurso estudam. Nessa coleção, foi contada a quantidade de construções geométricas, com régua e compasso, propostas aos alunos, foi observado que o livro do 8º ano apresenta o maior número de construções gemétricas no ensino fundamental, na coleção analisada, motivo pelo qual os alunos do 8° ano foram escolhidos para esta pesquisa. Podemos observar quais são as construções geométricas apresentadas em cada ano letivo. Em todos os anos é apresentada alguma proposta de construção geométrica com régua e compasso, exceto no 9° ano do ensino fundamental, que é apresentada nenhuma proposta, haja visto que as construções geométricas elementares foram apresentadas nos anos anteriores.

As construções geométricas propostas nos livros dessa coleção, apre- sentam as soluções passo a passo, para que o aluno possa reproduzi-la. No final de cada construção, pode-se observar a demonstração dessa cons- trução geométrica, de forma bem simplificada, tendo em vista o nível de conhecimento dos alunos. Dessa forma observou-se que esta coleção apresenta as principais construções geométricas elementares.

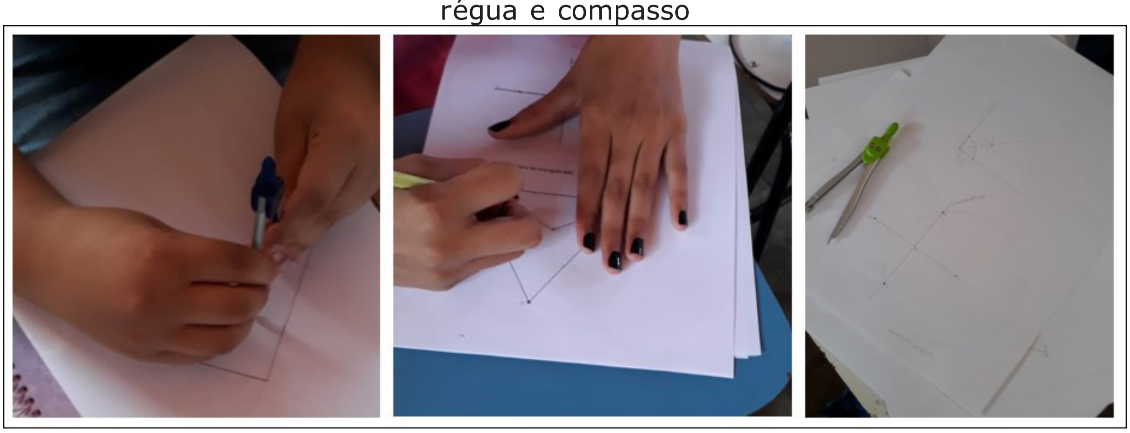
Atividades Propostas

As atividades propostas no minicurso foram feitas na intenção de que os educandos desenvolvessem habilidades para fazerem suas próprias construções geométricas com régua e compasso. A princípio com construções mais simples, aumentando o nível de dificuldade a cada construção, de modo que os alunos fossem concatenando as ideias das construções já feitas para construir outras mais difíceis posteriormente. Observe, na Figura 10, os alunos executando algumas atividades propostas no minicurso.

Análise do questionário 1

A finalidade do questionário 1, é investigar se os alunos tiveram as construções geométricas com régua e compasso e se tiveram, saber se foi significativo.

Figura 10: Alunos executando atividades propostas no minicurso de construções geométricas com régua e compasso



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Quando questionados se sentem dificuldade no processo de ensino-aprendizagem de matemática, 43% disseram que sim, 43% disseram que parcialmente e apenas 14% disseram que não tem dificuldade.

Ao serem questionados se já tiveram aulas práticas referentes aos conteúdos de geometria, 29% afirmaram que sim e 71% afirmaram que nunca tiveram nenhuma aula prática, mostrando que as aulas ainda são em sua maioria somente expositiva.

Ao serem questionados sobre a utilização de construções geométricas com régua e compasso em algum momento na sua vida escolar, 5% afirmaram que ja tiveram contatos com essas construções e 95% afirmaram que nunca haviam trabalhado com régua e compasso na escola.

Um outro questionamento feito aos alunos é se eles acreditam que o uso de construções geométricas com régua e compasso, pode ajudá-los na assimilação dos conteúdos de geometria. Nesse questionamento 4% acham que não, 32% não souberam responder e 64% acham que sim.

As demais perguntas, da 5º até a 11º, foram bem diretas e conceituais, para saber o quanto os alunos conheciam, não os conceitos totalmente iguais aos que tem nos livros, mas pelo menos a ideia daquele conceito, como exemplo da bissetriz, mediana, ponto médio, mediatriz, sendo que alguns eles ja tinham visto anteriormente, e outros não. O que se pôde observar foi que eles tiveram nessas perguntas, em média, 12% de acerto, o que é uma média muito baixa.

Análise do questionário 2

Nesse questionário pôde-se observar a opinião dos alunos após a conclusão do minicurso. Quando questionados como classificariam a oficina de construção geométrica, 100% dos alunos consideraram que foi muito boa, mostrando assim, que mesmo com algumas dificuldades em algumas construções, os alunos gostaram muito de participar.

No segundo questionário, foi perguntado aos alunos o que mais lhe chamou a atenção no minicurso de construção geométrica, e as respostas foram diversas. Seguem algumas das respostas com alunos identificados enumeradamente, por motivo de privacidade.

> *"É bem diferente e bem mais legal do que uma aula normal."* (Estudante 1)
>
> *"O que eu achei mais legal foi aprender a construir tudo na prática"*(Estudante 2)

Na terceira pergunta, eles foram questionados se a prática de construções geométricas com régua e compasso, como recurso complementar as aulas tradicionais de matemática, tornaria o ensino de geometria mais atrativo e compreensível. Nesse questionamento pode-se observar que todos os alunos (100%) disseram que sim, aumentando consideravelmente a porcentagem do questionário inicial, feito antes do minicurso, onde os apenas 64% responderam "sim". Seguem algumas das respostas dos alunos:

> *"Sim porque nós aprendemos muito mais na prática do que somente na teoria."* (Estudante 4)
>
> *"Sim, é bem mais legal porque além de ser explicado o assunto, também fazemos na prática, desse modo aprendemos melhor"* (Estudante 7)
>
> *"Sim, porque nós interagimos mais com as construções geométricas e é bem legal construir."* (Estudante 15)

Análise de questionário feito a professores de matemática da educação básica

Quando perguntados se tiveram a disciplina de desenho geométrico na graduação, 68% dos professores responderam que sim e 32% responderam que não tiveram essa disciplina.

Dos professores que afirmaram que tiveram o curso de desenho geométrico, 57% deles afirmaram que o curso foi relevante para o prática docente e 43% deles afirmaram que não foi relevante.

Quando perguntados quando ocorreu o primeiro contato com a prática de construções geométricas com régua e compasso, 50% dos professores responderam que havia sido no ensino fundamental e 50% deles afirmaram que primeiro contato com as construções geométricas ocorreu apenas no ensino superior.

No questionário realizado com professores da educação básica, 100% dos docentes responderam que acreditam que as atividades práticas auxiliam, de forma significativa, no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Esse resultado mostra que os professores acreditam que so- mente as aulas expositivas, não são suficientes para uma boa formação do educando.

Quando foi perguntados aos docentes entrevistados quantos já fizeram aulas práticas com uso de construções geométricas com régua e compasso, 60% afirmaram que sim e 40% afirmaram que nunca utilizaram dessa prática em sala de aula.

Quando foi perguntado por que muitas vezes o professor abre mão de atividades práticas, sabendo que os mesmos as acham relevantes, 15% disseram achar o conteúdo muito extenso, restando pouco tempo para aulas práticas, 15% deles acham que o motivo é a falta de planejamento do docente, 20% disseram que o motivo é o fato dos horários serem muito curtos, 20% tem outros motivos, não citados no questionário, e que 30% dos entrevistados, afirmaram que o motivo pelo qual muitos docentes não utilizam atividades práticas, como o exemplo das construções geométricas com régua e compasso, é a falta de habilidade do professor.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de ensino-aprendizagem de matemática no Brasil não tem sido eficiente, haja vista os índices precários de medidores nacionais (Ideb), e internacionais (Pisa) de qualidade de ensino. Com notas baixas no medidor nacional e entre as últimas colocações no medidor internacional, ver-se claramente a necessidade de mudanças, não só em políticas educacionais, mas também no modo como tem sido ensinado os conteúdos de matemática.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo relatar, através do minicurso, como as construções geométricas podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de geometria/Matemática, fazendo com que os educandos tenham uma melhor assimilação dos conteúdos propostos. Esse objetivo foi alcançado, uma vez que foi notado, através de questionarios, uma melhor compreensão dos conceitos geométricos apresentados aos alunos que fizeram a prática dessas construções, com uso de régua e compasso.

Essa pesquisa foi feita com uma análise qualitativa de 20 alunos de 8º ano, de modo que eles foram submetidos a um minicurso, em forma de tutorial, de construções geométricas com duração de 12 h/a. Os alunos tiveram aulas sempre aliando teoria a prática dessas construções, onde foram lançados desafios para que eles, com seus conhecimentos, assimilados no minicurso previamente, traçassem seus próprios caminhos na construção geométrica proposta.

Através dos questionários feitos aos alunos e da análise qualitativa durante o minicurso, pôde-se observar que o uso de construções geométricas com régua e compasso foi efetivo no processo de ensino-aprendizagem de geometria, uma vez que torna as aulas mais atrativas, fomentando nos educandos um sentimento de desafio, de querer resolver outros problemas com um nível maior de dificuldade.

Analisando esta pesquisa, observou-se, que a prática de construção geométrica como ferramenta de ensino, é eficiente, tornando as aulas mais atrativas, motivadoras e significativas e consequentemente melhorando a aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília, DF, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular (BNCC). São Paulo, SP, 2018.

LORENZATO, Sérgio. **Para Aprender Matemática.** 3.ed. São Paulo: Autores associados, 2010.

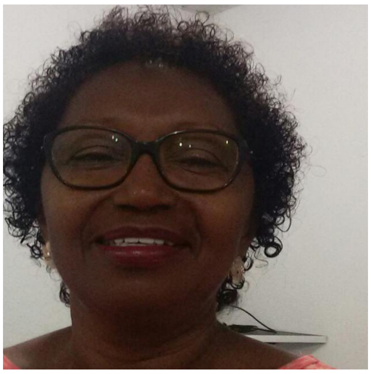
PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso. **Revista do Professor de Matemática**, n. 13, p. 368 – 374, 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas.** 6.ed. Rio de Janeiro, 2009.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas: exercícios e soluções** 1.ed. Rio de Janeiro, 2009.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Dissertação (Mestrado) — UFMG, Faculdade de Educaçãao, 2001.

AUTORES



Celina Amélia da Silva

Possui graduação em Licenciatura Plena em Ciências, com Habilitação em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (1983), graduação em Licenciatura Curta em Pedagogia pela Universidade Federal do Piauí (1984), Especialista em Educação matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco e Mestrado em Educação pela Universidade Estadual do Maranhão (2000). Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil - CANOAS RS (2016). Atualmente é professora adjunto da Universidade Estadual do Maranhão. Exerce a docência superior nos Cursos de Matemática e Pedagogia, com ênfase nas disciplinas Didática da Matemática, Introdução a Prática de Ensino, História da Matemática, Estágio Supervisionado, Estatística, Prática de Ensino. Orienta Monografias na Graduação e dissertações na Pós-Graduação. A ênfase na pesquisa é em Formação do Professor de Matemática. É professora do mestrado profissional em Matemática em Rede - PROFMAT/UEMA.

ORCID: 0000-0001-8055-0421

Lélia de Oliveira Cruz

Possui graduação em Ciências pela Universidade Estadual do Maranhão (1986), graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual do Maranhão (1993), graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (1988), mestrado em Ciências da Educação pelo Instituto Pedagogico Latinoamericano Y Caribeno (1999), mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (2013) e doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (2017). Atualmente é profº mag iv - Secretaria de Estado da Educação e professor adjunto da Universidade Estadual do Maranhão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: matemática, ensino de matemática, aprendizagem, formação de professores e ensino-aprendizagem.

ORCID: 0000-0002-9605-4091

Sandra Imaculada Moreira Neto

Doutora em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), mestre em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB), licenciada e bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV). Professora da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). Corpo docente do mestrado em Matemática da Universidade Federal do Maranhão (UFMA) e do Mestrado profissional em Matemática em nacional PROFMAT-UEMA.

ORCID: 0000-0001-6816-005X

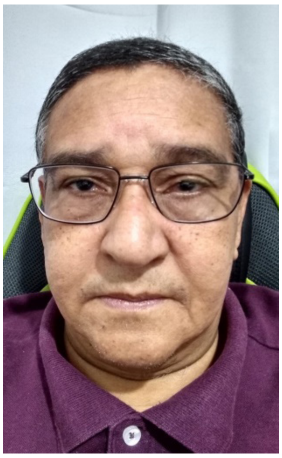
Lusitonia da Silva Leite

Doutora em Educação Ciências e Matemática - Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) - Cuiabá - MT, polo - Universidade Federal do Pará (UFPA) - Belém - PA. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática - Universidade Federal de Goiás (UFG)- Goiânia- GO. Pós em nível de especialista - Informática Educacional e Matemática e Estatística , ambas - Universidade Federal de Minas Gerais - UFLA - Lavras -MG. Graduada em Ciências Habilitação Matemática - Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) - Balsas -MA. Professora efetiva da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), concursada para ministrar as disciplinas: História da Matemática e Lógica Matemática e Rede estadual de Ensino médio - Secretaria de Educação do Estado do Maranhão (SEEDUC) - Balsas -MA, ensino de matemática. Experiência em formação de professores - UEMA - Universidade Estadual do Maranhão, UVA - Universidade do Vale do Acaraú e FACAM -Faculdade do Maranhão. Desenvolve pesquisa na área de Formação de Professores no âmbito dos processos de ensino e aprendizagem de Ciências e Matemática; na área da Toponimia/onomástica ao que se refere aos dados estatisticos e informática, além de identificar topônimos e a frequencias com que ocorrem, a motivações que leva(ra)m à escolha de determinado nome e as relações entre os microtopônimos; projetos de iniciação científica no âmbito das tecnologias educacionais.

ORCID: 0000-0003-0260-8362

João Coelho Silva Filho

Graduado em Matemática pela UFMA (1993), Mestre em Matemática pela UFPB (2001) e Doutor em Engenharia Elétrica/Telemática pela UNICAMP (2008). É professor do Departamento de Matemática e Informática DEMATI-UEMA, onde é docente dos cursos de Matemática Licenciatura, Física Licenciatura e Engenharias Civil, Mecânica e de Produção. Coordenou o projeto de criação do Mestrado profissional em Engenharia e Sistema (UEMA). É Coordenador do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - UEMA. Orientou várias dissertações de Mestrado, dezenas de monografias, vários projetos de Iniciação Científica e de Extensão. É Coordenador do Grupo de Pesquisa de Teoria dos Números e da Codificação. Possui experiência em Matemática Pura e Aplicada nas Áreas de Teoria dos Números, Álgebra, Teoria da Codificação e Educação Matemática.



Raimundo José Barbosa Brandão

Possui graduação em Engenharia Agronômica pela Universidade Estadual do Maranhão (1992). Licenciado em Ciências - Matemática (1994). Lato Senso em Docência do Ensino Superior - UEMA (1994). Mestre em Pedagogia Profesional pelo Instituto Superior Pedagógico para la Educacion Técnica y Profesional Hector Alfredo Pineda Zaldivar - LA HABANA - CUBA(1999)..Mestre em Educação pela UNIVALI/SC (2008). Possui Doutorado em Educação Matemática pela UNIBAN (2012). Docente do quadro Permanente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT. Tem experiência na graduação e pós no ensino em Probabilidade e Estatística, Geometria, Didática da Matemática e da Estatística, Metodologia do Ensino da Matemática e Metodologia da Pesquisa. É Coordenador do PROFMAT e do Grupo de Estudos e Pesquisa do Ensino da Matemática e suas Tecnologias/GEPEMATEC.

ORCID: 0000-0002-5554-3091

Sergio Nolêto Turibus

Doutorado em Engenharia Nuclear na área de Física Nuclear Aplicada, COPPE/UFRJ. Mestre em Ciências e Tecnologia de Materiais pela UERJ. É professor efetivo de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade Estadual do Maranhão - Campus de Balsas. Professor do Mestrado Profissional - PROFMAT/UEMA. Tem experiência nas áreas de Matemática Aplicada, Física, Modelagem Computacional, Programação em Python, Programação em Latex, Programação em R, Tensometria por Difração de raios X.

ORCID: 0000-0003-1301-1385

Weslley Jonh Barros Silva

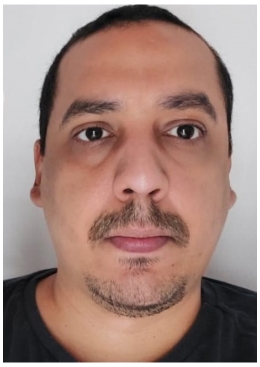
Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) no programa Profmat (MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL). Especialista em Estatística Aplicada as Ciências pela UEMA e em Matemática Pela Faculdade Rio Sono; Graduado em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (2007-2011). Com Experiência como professor na Universidade Estadual do Maranhão (2014- 2016) e na Faculdade Pitágoras (2015-2018) por três anos em ambas, ministrando principalmente as disciplinas de Cálculo Diferencial e integral, Estatística, Geometria Analítica e Álgebra vetorial; Professor de matemática no município de Governador Edison Lobão por 14 anos na educação básica, atualmente trabalhando como coordenador de matemática e ciências, no município, atuando com formação de professores e também professor substituto na Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL), desde outubro 2019.

ORCID: 0000-0002-7959-4264

Vilson Morais de Sousa

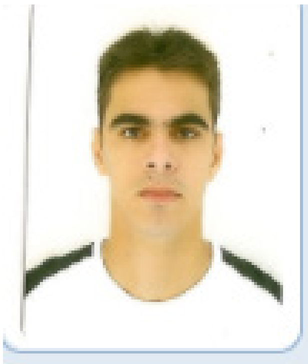
Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (PROFMAT-UEMA). Especialista em Matemática Financeira e Estatística pela Faculdade Única de Ipatinga. Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal do Maranhão (IFMA-Campus Codó). Professor EBTT no Instituto Federal do Maranhão (IFMA - Campus São José de Ribamar).

ORCID: [0000-0001-6835-9798](0000-0001-6835-9798)



Adriano Sousa de Farias

Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão - UEMA (2021). Especialista em Educação Especial/Educação Inclusiva/EAD - Universidade Estadual do Maranhão, UEMA, São Luís, Brasil. Graduação em Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual do Maranhão, UEMA, São Luís. Servidor Público - Professor de Matemática na Rede estadual MA e Rede municipal de São Bernardo MA.



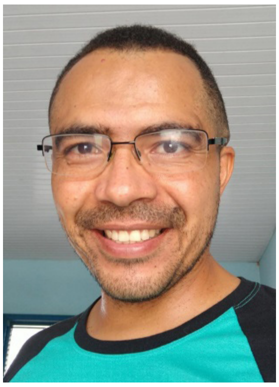
Filliphe de Almeida Leitão

Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão - UEMA (2021). Possui graduação em Licenciatura plena em matematica pela Universidade Federal do Piauí (2010). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, com atuação em duas monitorias (Cálculo e Algebra Linear), no Pre-Vestibular Popular da Universidade Federal do Piaui, atuando com professor da area de Matemática durante dois anos.

Marlon Maiko Barros Martins

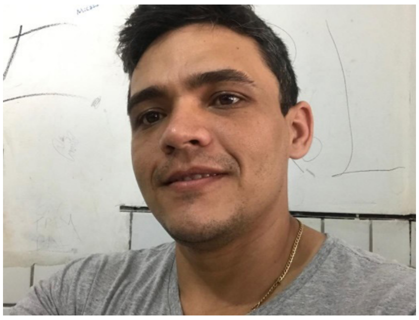
Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão - UEMA (2021), licenciado em Matemática pelo Instituto Federal do Maranhão (2017), licenciado em Física pela Universidade Cruzeiro do Sul (2020), bacharel em Segurança Pública pelo Curso de Formação de Oficiais da Polícia Militar do Maranhão, pela Universidade Estadual do Maranhão (2008) e bacharel em Direito pela Universidade Cidade de São Paulo (2015). Atualmente é major da Polícia Militar do Maranhão. Tem experiência na área de Defesa, com ênfase em Segurança Pública.

ORCID: 0000-0001-7974-3437



Giuliano Eduardo Batista Cutrim

Possui graduação em matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (2008), mestrado em mestrado em rede pela Universidade Estadual do Maranhão (2019). Atualmente trabalha como professor efetivo de matemática da secretaria de educação do estado do Maranhão (2010) e da secretaria municipal da cidade de Pindaré (2012). Tem experiência na área de matemática com ênfase em matemática.



Darcio Pereira Damaceno

Possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual do Maranhão (2009), graduação em Formação Pedagógica para Não Licenciados pelo Instituto de Ensino Superior Franciscano (2017) e mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede pela Universidade Estadual do Maranhão (2018). Atualmente é engenheiro de segurança do trabalho do Instituto Federal do Maranhão. Tem experiência na área de Engenharia Mecânica, com ênfase em Segurança do Trabalho.

Valderlândio de Araújo Pontes

Possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual do Maranhão (1997), Licenciatura em disciplinas de Ensino Médio e Profissionalizante pela Universidade Estadual do Maranhão (2001), MBA em Gestão Escolar pela UNIVIMA em parceria com o IBMEC-RJ (2014) e Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEMA (2018). Atualmente é Professor de Matemática do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino do Estado do Maranhão. Possui ainda Curso de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática (Pró-Ciências) pela CAPS/GEPLAN/GDH/UFMA (2000) e Curso Técnico em Rede de Computadores pela UEMA (2016). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática.

Alysson Rangel Sousa Brito

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (2012), Mestrado em Matemática em Rede Nacional pela Universidade estadual do Maranhão (2020). Atualmente atua como professor do ensino fundamental anos finais na rede privada em São Luís.

José Haito de Moura Filho

Mestrado em Matemática. Pós-graduação Lato Sensu em Educação Matemática. Graduação em Ciências - Matemática. Universidade Estadual do Maranhão, UEMA. Professor efetivo na rede estadual de ensino do Estado do Tocantins. Atua na programação de games voltados para a educação matemática.

ORCID: 0000-0002-1072-6310

Nathanael de Sousa Barreto

Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão - UEMA (2019). Possui graduação em Matemática pelo Instituto Federal do Piauí (2015). Atualmente é professor - Secretaria Municipal de Educação - Rosário e professor do Governo do Estado do Maranhão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática.

Antonio Washington dos Santos Silva Washington

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (UEMA - PROFMAT), Graduado pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI) em Licenciatura Plena em Matemática e Especialista em Matemática (Nos Níveis: Fundamental, Médio e Superior) e professor da rede privada em Teresina - PI. Tenho experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática.

ORCID: 0000-0003-3508-5844

Apresentamos a presente obra, uma coletânea de textos relativos à produção acadêmico científica resultante dos trabalhos de conclusão de curso de mestrandos, professores da Educação Básica que cursaram mestrado no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT/UEMA, coordenado pela SBM, com apoio do IMPA, vinculado à CAPES.

ISBN: 978-65-86707-74-8

9 786586 707748

Pascal
Editora