



Uema
UNIVERSIDADE ESTADUAL
DO MARANHÃO

PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Renoen
Rede Nordeste de Ensino

2025

Organizadores:

CELINA AMÉLIA DA SILVA

LÉLIA DE OLIVEIRA CRUZ

RAIMUNDO JOSÉ BARBOSA BRANDÃO

SERGIO NOLÊTO TURIBUS

WALÉRIA DE JESUS BARBOSA SOARES

PROFMAT - UEMA

novas perspectivas de uma Educação Matemática
transformadora para o Estado do Maranhão

volume 2


Pascal
Editora

CELINA AMÉLIA DA SILVA
LÉLIA DE OLIVEIRA CRUZ
RAIMUNDO JOSÉ BARBOSA BRANDÃO
SERGIO NOLÊTO TURIBUS
WALÉRIA DE JESUS BARBOSA SOARES
(Organizadores)

PROFMAT - UEMA
novas perspectivas de uma Educação
Matemática transformadora para o Estado
do Maranhão
VOLUME 2

EDITORA PASCAL
2025

Editor Chefe: Prof. Dr. Patrício Moreira de Araújo Filho

Edição e Diagramação: Eduardo Mendonça Pinheiro

Edição de Arte: Marcos Clyver dos Santos Oliveira

Bibliotecária: Rayssa Cristhália Viana da Silva – CRB-13/904

Revisão: Os autores

Conselho Editorial

Dr. Saulo José Figueiredo Mendes

Dr. Leonardo França da Silva

Dr. Will Ribamar Mendes Almeida

Dr. Raimundo Luna Neres

Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua

Dr. Elmo de Sena Ferreira Junior

Dr. André Leonardo Demaison Medeiros Maia

Dr. Othon Carvalho Bastos Filho

Dr. José Francisco dos Reis Neto

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P964v2

Coletânea PROFMAT - UEMA: novas perspectivas de uma Educação Matemática transformadora para o Estado do Maranhão / Celina Amélia da Silva, Lélia de Oliveira Cruz, Raimundo José Barbosa Brandão, Sergio Nolêto Turibus e Waléria de Jesus Barbosa Soares (Orgs.). — São Luís: Editora Pascal, 2025.

278 f. : il.: (PROFMAT - UEMA; volume 2)

Formato: PDF

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN: 978-65-6068-211-5

D.O.I.: 10.29327/5723810

1. Educação. 2. Formação docente. 3. Matemática. 4. Miscelânea. I. Silva, Celina Amélia da. II. Cruz, Lélia de Oliveira. III. Brandão, Raimundo José Barbosa. IV. Turibus, Sergio Nolêto. V. Soares, Waléria de Jesus Barbosa. VI. Título.

CDU: 371.13:51(08)

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

APRESENTAÇÃO

Este II e-book reúne artigos que abordam uma diversidade de temas, evidenciando o potencial e a relevância dos trabalhos desenvolvidos ao longo dos últimos anos no PROFMAT/UEMA. Ao longo desse período, o Programa tem se consolidado como uma instituição associada de destaque no Estado do Maranhão, oferecendo uma formação sólida e de qualidade aos seus egressos.

Conforme descrito no regimento nacional, “o PROFMAT tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando conferir ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.”

Fiel a essa premissa, o PROFMAT/UEMA, por meio do comprometimento de seus professores, técnicos administrativos e colaboradores, tem cumprido rigorosamente sua missão de oferecer uma formação matemática ampla e consistente, fortalecendo o papel do professor como agente transformador no Ensino da Matemática.

Assim, este II e-book apresenta uma coletânea de trabalhos que refletem experiências, projetos e práticas desenvolvidas em escolas e municípios do Estado do Maranhão. Tais iniciativas têm contribuído significativamente para o aprimoramento da formação docente e, conseqüentemente, para a melhoria da qualidade da Educação Básica no Estado.

Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus

ORGANIZADORES

Celina Amélia Da Silva

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (2016), Mestre em Educação pela Universidade Estadual do Maranhão (2000), Especialista em Educação Matemática pela UFRPE e graduada em Ciências (Habilitação em Matemática) e Pedagogia pela Universidade Federal do Piauí. É professora adjunta da Universidade Estadual do Maranhão, atuando nos cursos de Matemática e Pedagogia, nas áreas de Didática da Matemática, História da Matemática, Estágio Supervisionado, Estatística e Prática de Ensino. Orienta trabalhos de graduação e pós-graduação, com pesquisas voltadas à formação de professores de Matemática, e integra o corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat/UEMA).

Lélia de Oliveira Cruz

Possui graduação em Ciências pela UEMA (1986), graduação em Pedagogia pela UEMA (1993), graduação em Matemática pela UEMA (1988), mestrado em Ciências da Educação pelo IPLAC (1999), mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela ULBRA (2013) e doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela ULBRA (2017). Atualmente é colaboradora da Fundação de Amparo à Pesquisa ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - MA e Professora Adjunta II da UEMA. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Formação de professor que ensina matemática, Ensino e Aprendizagem de Matemática, Resolução de Problema, Inovação e Tecnologias Digitais.

Raimundo José Barbosa Brandão

Doutor em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo (2012), com ênfase na formação de professores e ensino de Estatística. Mestre em Educação pela UNIVALI (2008) e em Pedagogia Profissional pelo ISPETP, em Havana, Cuba (2000). Especialista em Metodologia do Ensino Superior (UEMA, 1992) e em Educação a Distância (Faculdade São Francisco, 2008). Professor da Universidade Estadual do Maranhão, atua nos cursos de graduação e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat/UEMA), além de integrar o corpo docente permanente dos doutorados REAMEC e RENOEN. Tem experiência nas áreas de Probabilidade e Estatística, Geometria e Metodologia do Ensino da Matemática, e coordena o Grupo de Estudos e Pesquisa do Ensino de Matemática e suas Tecnologias (GEPEMATEC). Foi chefe da Divisão de Acompanhamento e Avaliação do Ensino (2015–2016) e coordenador do ProfMat/UEMA (2021–2022).

Sergio Nolêto Turibus

Doutorado em Engenharia Nuclear na área de Física Nuclear Aplicada, COPPE/UFRJ. Mestre em Ciências e Tecnologia de Materiais pela UERJ. Professor efetivo de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade Estadual do Maranhão - Campus Balsas. Professor do Mestrado Profissional - PROFMAT/UEMA. Tem experiência nas áreas de Matemática Aplicada, Física, Modelagem Computacional, Programação em Python, Programação em Latex, Programação em R, Tensometria por Difração de raios X.

ORGANIZADORES

Waléria De Jesus Barbosa Soares

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela UNICAMP (2017), com Doutorado Sanduíche na Universidade do Porto (Portugal, 2015) e Mestre em Matemática pela UNICAMP (2009). Possui diversas especializações nas áreas de Psicologia e Coaching, Gestão Escolar, Cinema e Linguagem Audiovisual e Ensino da Matemática. É Professora Adjunta da UEMA, atuando nos programas de pós-graduação PROFMAT/UEMA, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (UFMA) e Doutorado em Ensino (RENOEN/UEMA), do qual é coordenadora. Integra os grupos de pesquisa GHEMAT e GPEM/UFMA e exerce a função de Diretora-Geral da SBEM-MA (2021–2027). Educadora matemática, escritora e poeta premiada, com participação em mais de 200 antologias e autoria de livros como *XIX – Uma história, uma cidade e os primórdios da matemática escolar* e *Uma história sobre o ensino de juros*. Membro de diversas academias de letras e artes no Brasil e no exterior.

PREFÁCIO

Como ensinamos e aprendemos matemática? Como se dá o desenvolvimento do raciocínio lógico, da relação da matemática com a sociedade e da formação do indivíduo? Essas são inquietações do campo de conhecimento conhecido como “Educação Matemática”, que vai além do ensino, pois carrega em si o desafio de analisar criticamente o papel da matemática na vida das pessoas e na sociedade.

Foi com honra e satisfação que aceitei prefaciар esta coletânea, que trata dos questionamentos acima, intitulada “PROFMAT – UEMA: novas perspectivas de uma Educação Matemática transformadora para o Estado do Maranhão”. A obra é composta por artigos elaborados por alunos e professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT (UEMA) e teve como convidados, alunos e professores do Doutorado Rede Nordeste de Ensino – RENOEN (UEMA).

Como professora efetiva desses dois programas de pós-graduação não poderia deixar de fazer uma pausa nesta escrita para ressaltar a minha admiração pelos professores Dr. Sérgio Noleto Turibus e Dr. Raimundo Barbosa Brandão, que iniciaram o processo de construção dessa obra. A competência e dedicação de ambos, frente aos programas de pós-graduação da UEMA e à educação e ao ensino de matemática, são inegáveis e reconhecíveis. Aos senhores, minha gratidão.

Escrever este prefácio me trouxe sentimentos de pertencimento, pois pude refletir sobre a minha própria prática e constatar que, sim, ensinar matemática na atualidade é desafiador. Na sala de aula, nós, professores, precisamos desenvolver metodologias que primem pelo raciocínio lógico, senso crítico e aplicação prática dos conceitos matemáticos, interrelacionando-os às diversas áreas do conhecimento e ao cotidiano. Precisamos ainda, integrar tecnologias digitais, metodologias ativas e fazer conexão com a realidade dos alunos.

Não temos e nem existe um livro de receitas para o ensino de matemática ideal. Mas temos, como aqui, um livro que pode apresentar experiências e reflexões atuais e necessárias sobre o ensino de matemática, que sirvam de inspiração a outros professores.

Cada artigo aqui apresentado nos faz refletir sobre as novas Tendências em Educação Matemática, sem esquecer o rigor e a abstração que são necessários à matemática enquanto ciência. Os autores nos presenteiam com metodologias que passeiam pela modelagem matemática, ludicidade através de jogos, materiais concretos e literatura, tecnologias digitais, resolução de problemas e historicidade, fazendo-nos aumentar o nosso acervo de criatividade

para resolver os desafios das salas de aula, aplicando conceitos matemáticos a problemas reais.

Com este livro plantamos sementes e os frutos serão colhidos em breve, quando nos depararmos com mais professores apaixonantes e alunos apaixonados pela matemática. Expresso o meu desejo de que cada o professor de matemática e/ou que ensina matemática, que tiver acesso a essa leitura possa refletir sobre a Educação Matemática e, assim, repensar suas aulas, sem esquecer o nosso verdadeiro objetivo: fazer com que nossos alunos do Estado do Maranhão (e de todo o Brasil) aprendam e compreendam a matemática.

Dra. Waléria de Jesus Barbosa Soares

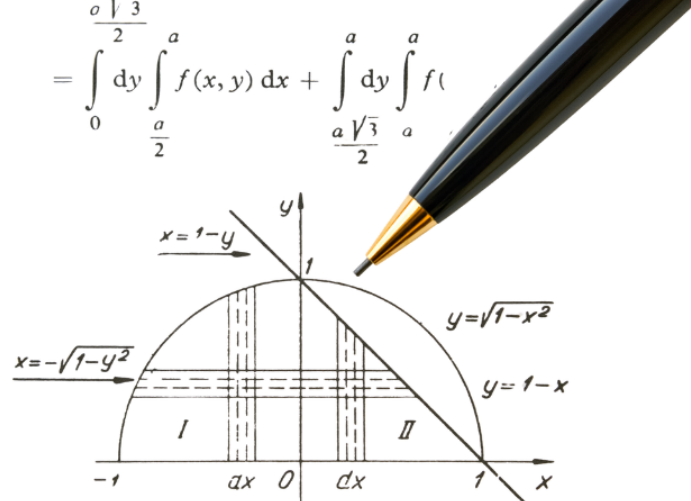
SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	13
CONTRIBUIÇÕES DO DESENHO GEOMÉTRICO NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO: uma proposta utilizando o GeoGebra como ferramenta pedagógica	
<i>Paulo Loreço Cruz de Almeida</i>	
<i>Sergio Nolêto Turibus</i>	
<i>Carlos André Bogéa Pereira</i>	
<i>Jálio Araújo da Silva</i>	
 CAPÍTULO 2.....	 25
OLHAR PARA A ECONOMIA: um modelo prático de ensinar a Matemática Comercial e Financeira no Ensino Básico	
<i>Gilberto Ferreira de Sousa</i>	
<i>Sergio Nolêto Turibus</i>	
<i>Fernando Santana Lima</i>	
<i>Karllos Alexandre Sousa Pereira</i>	
 CAPÍTULO 3.....	 38
GEOGEBRA: recurso facilitador e motivador no processo ensino-aprendizagem para o estudo da estatística no ensino médio	
<i>Israel Costa Abreu</i>	
<i>Sandra Imaculada Moreira Neto</i>	
<i>Alberto Leandro Correia Costa</i>	
 CAPÍTULO 4	 54
TRANSLAÇÃO E REFLEXÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA EM DISPOSITIVOS MÓVEIS	
<i>Priscila Marques Lopes Abitibol</i>	
<i>Sandra Imaculada Moreira Neto</i>	
<i>Geilson Mendes dos Reis</i>	
 CAPÍTULO 5.....	 70
UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DOS NÚMEROS E SUAS PROPRIEDADES	
<i>Cléssio da Silva Araújo</i>	
<i>Roberto Batista dos Santos</i>	
<i>Sílvia Cleide Piquiá</i>	

CAPÍTULO 6.....	86
MÉTODO SIMPLEX E SUA APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM UM CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO	
<i>Agnaldo dos Santos Pereira</i>	
<i>Roberto Batista dos Santos</i>	
<i>Sílvia Cleide Piquiá</i>	
CAPÍTULO 7.....	101
CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁREA NO ENSINO BÁSICO, COM VÍDEO PARA DE- DUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES	
<i>Natanael Carvalho Sousa</i>	
<i>João Coelho Silva Filho</i>	
<i>Celina Amélia da Silva</i>	
CAPÍTULO 8	118
EQUACÕES DIOFANTINAS E CONGRUÊNCIAS LINEARES: uma Aplicação de Solução Simplificada	
<i>João Coelho Filho</i>	
<i>Marcus Vinicius Viegas Rodrigues</i>	
<i>Celina Amélia da Silva</i>	
CAPÍTULO 9.....	137
GAMIFICAÇÃO NO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM: estratégias lúdicas para potencializar a aprendizagem matemática	
<i>Raimundo Cazuza da Silva Neto</i>	
<i>Waléria de Jesus Barbosa Soares</i>	
<i>João Aranha Barros</i>	
<i>Francisco das Chagas Soares</i>	
<i>Giuliano Eduardo Batista Cutrim</i>	
<i>Jadiel Carlos Asevedo Silva</i>	
<i>Harryson Guilherme Moraes Andrade</i>	
<i>Valterlli Costa Rocha</i>	
CAPÍTULO 10.....	148
A EDUCAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A GERAÇÃO Z: propostas de ensino da Geometria através do Autocad e 3Ds Max	
<i>Francinaldo Richele Souza</i>	
<i>Marlon Cesar Santos Oliveira</i>	
<i>Geilson Mendes dos Reis</i>	

CAPÍTULO 11.....	160
MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA NO ENSINO DOS POLIEDROS CONVEXOS	
<i>Paulo Batista Franca</i>	
<i>Lélia de Oliveira Cruz</i>	
<i>Celina Amélia da Silva</i>	
CAPÍTULO 12	174
ANÁLISE DE ERROS: UM CAMINHO PARA APRENDER FUNÇÃO AFIM	
<i>Maria Camila da Cunha dos Santos</i>	
<i>Lélia de Oliveira Cruz</i>	
<i>Sandra Imaculada Moreira Neto</i>	
CAPÍTULO 13	183
PROPORCIONALIDADE E A RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL	
<i>Celina Amélia da Silva</i>	
<i>Thadeu Alves da Silva Júnior</i>	
<i>João Coelho Silva Filho</i>	
CAPÍTULO 14.....	196
O ENSINO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA	
<i>Amujacy da Conceição Pereira Costa</i>	
<i>Celina Amélia da Silva</i>	
<i>Lélia de Oliveira Cruz</i>	
CAPÍTULO 15	207
DESENHANDO APRENDIZADOS: O PAPEL DE PROTAGONISMO DO ALUNO NO ESTUDO DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS EM QUADRINHOS	
<i>Valterlli Costa Rocha</i>	
<i>Waléria de Jesus Barbosa Soares</i>	
<i>Carlos André Bogéa Pereira</i>	
CAPÍTULO 16	224
AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA CRIANÇAS COM TEA	
<i>Jarlisse Nina Beserra da Silva</i>	
<i>Ilka Marcia Ribeiro de Souza Serra</i>	
<i>Jackson Ronie Sá-Silva</i>	
<i>João Aranha Barros</i>	

CAPÍTULO 17	233
ENSINO DE MATEMÁTICA NO LANÇAMENTO DE FOGUETE DE GARRAFA PET: exploração de função quadrática aplicada	
<i>Giuliano Eduardo Batista Cutrim</i>	
<i>Raimundo José Barbosa Brandão</i>	
<i>Raimundo Santos de Castro</i>	
<i>João Aranha Barros</i>	
<i>Raimundo Cazuza da Silva Neto</i>	
<i>Francisco das Chagas Soares</i>	
<i>Jadiel Carlos Asevedo Silva</i>	
 CAPÍTULO 18	 244
FORMAÇÃO DE PROFESSORES E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: investigando saberes, experiências e desafios em uma escola rural quilombola	
<i>João Aranha Barros</i>	
<i>Elvys Wagner Ferreira da Silva</i>	
<i>Raimundo Santos de Castro</i>	
<i>Waléria de Jesus Barbosa Soares</i>	
<i>Jarlisse Nina Beserra da Silva</i>	
<i>Raimundo Cazuza da Silva Neto</i>	
<i>Jadiel Carlos Asevedo Silva</i>	
<i>Giuliano Eduardo Batista Cutrim</i>	
<i>Lindalva do Remedio Oliveira Cerqueira</i>	
<i>George Ramos da Silva Junior</i>	
 CAPÍTULO 19	 252
O USO DO GEOGEBRA NA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA O ENSINO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS NO PROFMAT	
<i>Jadiel Carlos Asevedo Silva</i>	
<i>Waléria de Jesus Barbosa Soares</i>	
<i>João Aranha Barros</i>	
<i>Giuliano Eduardo Batista Cutrim</i>	
<i>Francisco das Chagas Soares</i>	
<i>Raimundo Cazuza da Silva Neto</i>	
 CAPÍTULO 20	 261
CONGRUÊNCIAS NO DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL	
<i>João Coelho Filho</i>	
<i>Roberto Amorim Silva</i>	
<i>Sergio Nolêto Turibus</i>	



1

CONTRIBUIÇÕES DO DESENHO GEOMÉTRICO NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA UTILIZANDO O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

CONTRIBUTIONS OF GEOMETRIC DRAWING IN THE LEARNING OF PLANE GEOMETRY IN HIGH SCHOOL: A PROPOSAL USING GEOGEBRA AS A PEDAGOGICAL

Paulo Loreço Cruz de Almeida¹

Sergio Nolêto Turibus²

Carlos André Bogéa Pereira²

Jálio Araújo da Silva³

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

² Doutor, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

³ Mestre, Instituto Federal do Piauí, IFPI - PI

RESUMO

Este estudo de caso investiga o impacto do Desenho Geométrico na aprendizagem de Geometria Plana no Ensino Médio, destacando a relevância das práticas de construções geométricas com o auxílio de tecnologias atuais. O método adotado envolveu a aplicação de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra, promovendo atividades que estimulam o raciocínio lógico e a compreensão abstrata de figuras planas. Os resultados indicam que o uso de construções geométricas dinâmicas, apoiadas por ferramentas digitais, potencializa o estudo da Geometria, permitindo aos alunos deduzir, conjecturar e justificar resultados geometricamente. Conclui-se que a integração de softwares de geometria dinâmica nas práticas pedagógicas é uma estratégia eficaz para superar o desprestígio histórico da disciplina e melhorar o desempenho dos alunos em Geometria Plana.

Palavras-chave: Desenho geométrico; Construção geométrica; GeoGebra.

ABSTRACT

This case study investigates the impact of Geometric Drawing on the learning of Plane Geometry in High School, highlighting the importance of constructive practices with the aid of current technologies. The method adopted involved the implementation of a didactic sequence using the GeoGebra software, promoting activities that stimulate logical reasoning and the abstract understanding of plane figures. The results indicate that the use of dynamic geometric constructions, supported by digital tools, enhances the study of Geometry, enabling students to deduce, conjecture, and justify geometric results. It is concluded that the integration of dynamic geometry software into pedagogical practices is an effective strategy to overcome the historical disrepute of the discipline and improve students' performance in Plane Geometry.

Keywords: Geometric design; Geometric construction; GeoGebra.

1. INTRODUÇÃO

No Brasil, o ensino de Matemática na educação básica vem sendo discutido e criticado, com frequência, por professores e pesquisadores. Em minha prática docente, tenho observado uma grande insatisfação em relação a essa disciplina. Em particular, se tratando de Geometria, o ensino passou a ser simplificado e muito tendencioso ao “algebrismo”, pois em muitas escolas, este tornou-se restrito ao reconhecimento de figuras geométricas e ao cálculo de área (Zuin, 2001).

Muitos livros da educação básica tratam a Geometria de forma mecânica e dedutiva, não transparecendo a intenção de explorar os resultados obtidos e as relações existentes entre os objetos geométricos, isto é, os discentes não são instigados a buscar argumentos e justificativas para determinadas propriedades. Nesse contexto, exige-se mais do professor no que diz respeito a metodologias que estimulem a exploração do conteúdo. Em geral, durante as aulas de Geometria, é comum que os alunos façam afirmações baseadas em deduções referentes a figuras planas, levando em conta apenas o desenho, que muitas vezes é feito à mão livre, sem levar em consideração os procedimentos para a construção dessas figuras. Esse tipo de abordagem pode resultar em afirmações equivocadas, evidenciando a falta de compreensão dos alunos em relação às figuras geométricas como objetos abstratos.

Considerando a ampla utilização da Geometria em situações cotidianas e a importância do conhecimento geométrico para o avanço nos estudos, é essencial que os alunos apresentem uma boa proficiência nas construções geométricas. Por meio do estudo dessas construções, os alunos são estimulados a desenvolver seu conhecimento de forma prática e concreta.

Atualmente, os meios tecnológicos estão presentes de forma significativa no cotidiano de jovens e adultos. As mídias digitais e dispositivos como celulares e computadores estão cada vez mais sofisticados e não se limitam apenas a realizar ligações ou editar documentos. O acesso a essas tecnologias da informação e comunicação tem se incorporado às práticas docentes e discentes como um meio para promover aprendizagens mais significativas.

Com o objetivo de promover as práticas de construção geométrica com o auxílio do software GeoGebra, é possível adotar duas abordagens distintas. A primeira delas consiste em utilizar as práticas de construção geométrica como ferramenta para introduzir o GeoGebra no estudo da Geometria, o que estimula e aprimora a compreensão da disciplina. Já a segunda abordagem, ao introduzir o GeoGebra ao ensino de Geometria, as práticas de construção geométrica passam a ser uma decorrência natural do aprendizado, aperfeiçoando as habilidades de visualização e raciocínio espacial dos estudantes.

As práticas de construções geométricas desempenham um papel crucial no aprendizado da Geometria plana. Ademais, o conhecimento em Geometria plana é fundamental para o estudo das geometrias analítica e espacial, que são oferecidas no Ensino Médio. Embora as construções geométricas não sejam mencionadas na BNCC para o Ensino Médio, fornecer atividades revisionais de construções elementares pode contribuir significativamente para melhorar o desempenho dos alunos em Geometria. Vale ressaltar que a BNCC para o Ensino Fundamental reforça a importância das construções geométricas no ensino de Geometria afirmando que:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BNCC, 2018, 271).

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo investigar as contribuições do desenho geométrico na aprendizagem de Geometria Plana no Ensino Médio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta pedagógica, visando resgatar as práticas de Construções Geométricas e potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, para conseguirmos atingir o objetivo geral, precisamos conhecer os fatores históricos que contribuíram para a desvalorização da disciplina de Desenho Geométrico nas escolas brasileiras, com base nos documentos curriculares nacionais. Além disso, propor-se-á o uso do software GeoGebra como ferramenta pedagógica no Ensino de Geometria na Educação Básica. Também será preciso: promover reflexões sobre as dificuldades de aprendizagem em Geometria plana no Ensino Médio; apontar contribuições dos conceitos de Desenho Geométrico com o auxílio do GeoGebra como facilitador na aprendizagem de Geometria; propor sequência didática para a disciplina de Matemática a partir de Construções Geométricas elementares.

2. BREVE CONTEXTO HISTÓRICO SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geométricas apareceram no século V a.C., ainda na época dos pitagóricos, e desempenharam um papel de grande importância no desenvolvimento da Matemática grega. Na Grécia antiga, há 2000 anos, a noção de número real não era bem concebida, pois não se consideravam números negativos ou frações, eram apenas razões entre números. Então, com a aplicação das construções com régua e compasso, surgiu uma nova álgebra inteiramente geométrica, e a palavra solução era sinônimo de construir. Nesse contexto, o estudo de Geometria seguiu um curso paralelo ao estudo das construções geométricas, sendo intimamente ligadas, a ponto de não se estudar Geometria sem o uso de régua e compasso. Desse modo, as práticas de construções geométricas contribuíram diretamente para o avanço da Geometria e da Álgebra (Wagner, 1993).

Construções Geométricas é um ramo da Matemática destinado a explicar ou justificar o porquê de certos procedimentos conduzirem a determinadas construções. Esse estudo não deve ser confundido com Desenho Geométrico, pois neste último são usados outros instrumentos (tais como esquadro e transferidor), além da régua e do compasso, os únicos permitidos nas construções geométricas (Costa, 2013).

No estudo das construções geométricas deve-se considerar que uma figura geométrica é totalmente ideológica, portanto, uma abstração, uma configuração “ideal”, enquanto a figura que construímos é uma coisa física, meramente uma aproximação da construção ideal. Todavia, referindo-se ao uso de régua e compasso, deve-se ter em mente uma “régua ideal” e um “compasso ideal” para traçar retas e círculos (dados dois pontos distintos). E, considerando os procedimentos para a construção, a espessura das marcas de lápis, assim

com outras imperfeições devido à mecânica do desenho, são simplesmente ignoradas. Uma régua pode ser graduada ou não, quando não graduada é chamada de régua (Schaaf, 1967).

Contudo, neste trabalho ir-se-á usar o termo “Desenho Geométrico” para referir-se à disciplina responsável pelo estudo de construções geométricas.

2.1 Desenho Geométrico nos currículos nacionais

Desenho Geométrico já ocupou papel de destaque no Brasil, sendo inclusive matéria eliminatória nos vestibulares de Engenharia e Arquitetura. Em 1930, com a expansão industrial, o Desenho Geométrico passou a ser considerado uma disciplina curricular, sendo bem prestigiado nas escolas brasileiras. Isto mostra a importância da disciplina na primeira metade do século XX, pois além de ser referida como disciplina obrigatória nos currículos nacionais, tinha o caráter eliminatório em exames de vestibulares (Sardinha, 2014).

Zuin (2001) relata que essa disciplina se manteve oficialmente nos currículos escolares por 40 anos, mais precisamente de 1931 a 1971. Contudo, essa situação se manteve mesmo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), lei n. 4.024, de 1961, que oferecia opções em que o Desenho Geométrico não era obrigatório. Essa lei limitou o número de matérias: oito, no colégio, e nove, no ginásio, sendo obrigatórias no máximo sete e no mínimo cinco em cada série.

Na década de 60, já se mostraram os primeiros indícios de desprestígio ao ensino de construções geométricas, o que posteriormente seria mais um motivo para a retirada dessa disciplina do contexto escolar, em 1970, o Desenho Geométrico é retirado pelo MEC dos exames de vestibulares. Dessa forma, essa disciplina vai perdendo destaque gradativamente (Sardinha, 2014).

Com a promulgação da lei n. 5.692/71 - Lei de Bases e Diretrizes da Educação Nacional, os currículos escolares sofreram grandes mudanças. Havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outro de disciplinas optativas, as quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. Além disso, as instituições escolares eram livres para construir sua grade curricular apenas dentro da parte diversificada, e deveriam seguir as determinações da legislação escolar, que estabeleciam a integração da educação artística, em todos os cursos de 1º e 2º graus do ensino básico. Assim, a disciplina de Desenho Geométrico tornou-se optativa da parte diversificada. Com isso, muitas escolas aboliram o ensino de construções geométricas (Oliveira, 2005).

Com base nesse contexto, vale ressaltar que o fato de a disciplina Desenho Geométrico não fazer parte do núcleo de disciplinas obrigatórias nos currículos escolares, juntamente com o fato de não ser exigida nos exames de vestibulares, contribuiu diretamente para o abandono efetivo dessa disciplina no âmbito escolar. Analisando esse contexto histórico, teve momentos de valorização e desvalorização da disciplina de Desenho Geométrico nos currículos escolares e nas escolas brasileiras. No entanto, os períodos de desvalorização causaram consequências em relação ao desempenho dos alunos em Geometria, acarretando o retorno dessa disciplina nas escolas. Como os PCN fazem referências ao Desenho Geométrico, torna-se viável traçar metodologias para promover práticas de construções geométricas como forma de potencializar o estudo de geometria no ensino básico, conforme será sugerido no tópico a seguir.



3. METODOLOGIA

A metodologia empregada nesta investigação consiste na pesquisa de campo, que envolve a coleta direta de informações junto à população pesquisada. Nessa abordagem, é essencial que o pesquisador estabeleça contato direto com os sujeitos envolvidos. Nesse modelo de pesquisa, os dados primários são coletados no local da investigação por meio de instrumentos adequados, embora não seja possível isolar ou controlar as variáveis, essa abordagem permite a observação e o estudo das relações estabelecidas.

O interesse da análise do pesquisador é apreender a essência, o processo, ou seja, a estrutura e a dinâmica do objeto de estudo, assim, o método de pesquisa propicia o conhecimento teórico partindo da aparência e da forma para alcançar a essência do seu objetivo; defende-se que conhecimento teórico é o conhecimento do objeto, tal como ele é em si mesmo, sua reprodução ideal na sua existência real e efetiva (Pereira, 2015).

Para realizar esta investigação, optou-se por uma abordagem de pesquisa qualitativa com intervenção. Essa escolha foi feita devido à necessidade de analisar as causas e consequências dos fenômenos envolvidos durante a realização de uma oficina de ensino e aprendizagem em geometria plana. Uma vez que a pesquisa qualitativa se caracteriza, por ter ambiente natural com fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; O caráter descritivo; o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida como preocupação do investigador e o enfoque indutivo (Godoy, 1995).

A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve uma postura interpretativa e naturalística diante do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem (Denzin; Lincoln, 2005a, p. 3).

O estudo de campo teve como suporte uma pesquisa bibliográfica, pois toda e qualquer investigação se inicia com uma revisão bibliográfica. Neste tipo de investigação, o pesquisador busca leitura em trabalhos sobre o seu tema de interesse que possuem grande relevância, analisando as contribuições já existente sobre o objeto de estudo a ser pesquisado.

A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas. Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar. Seminários, painéis, debates, resumos críticos, monográficas não dispensam a pesquisa bibliográfica. Ela é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões. Portanto, se é verdade que nem todos os alunos realizaram pesquisas de laboratório ou de campo, não é menos verdadeiro que todos, sem exceção, para elaborar os diversos trabalhos solicitados, deverão empreender pesquisas bibliográficas (Andrade, 2010, p. 25).

Assim sendo, propôs-se uma sequência didática por meio de uma oficina na qual os discentes tiveram inicialmente um primeiro contato com algumas construções geomé-

tricas elementares de forma tradicional, isto é (com uso de régua e compasso), e logo em seguida, cada construção ou aplicação desta foi feita de forma dinâmica no software GeoGebra.

As aulas referentes à oficina foram realizadas de forma expositiva e dialogada, instigando os alunos a justificarem os resultados obtidos levando em consideração os procedimentos para realização de tal construção, enfatizando a ideia de lugar geométrico e os processos que conduziram a determinado resultado. Ao final de cada aula, foi feita a justificativa da construção em questão, seguida de uma construção no software GeoGebra, consolidando o conhecimento geométrico adquirido.

Para realizar o trabalho, aplicou-se uma atividade diagnóstica composta por três questões, com o objetivo de avaliar a proficiência dos alunos em construções geométricas e verificar seu conhecimento geométrico, criatividade e raciocínio lógico dedutivo. Toman-do como base a atividade diagnóstica, utilizou-se um questionário composto por 5 (cinco) questões como referência para o desenvolvimento do trabalho. Esse questionário teve como objetivo avaliar a proximidade dos alunos com a disciplina de Desenho Geométrico, sua familiaridade com softwares de geometria dinâmica e a avaliação de seu próprio desempenho em geometria. Antes de aplicar o questionário, obteve-se os termos de consentimento dos participantes.

Em seguida, realizou-se a oficina composta por 06 (seis) aulas, nas quais foram realizadas construções elementares. Durante as aulas, foram feitas afirmações acerca dos resultados obtidos e os alunos foram instigados a justificar os resultados considerando os procedimentos utilizados para obtenção de cada construção. Em cada aula dada, enfatizou-se à ideia de lugar geométrico, com a apresentação da justificativa adequada ao final de cada construção. Após as construções com régua e compasso, foram realizadas construções no software GeoGebra, incluindo a mesma construção ou outra que utilizasse o resultado obtido. Durante o uso do software, foram utilizadas ferramentas de construção instantânea para garantir maior rigor geométrico, além de promover interatividade em sala de aula e demonstrar a eficiência e precisão em cada construção.

Na quinta aula, analisou-se o desempenho dos alunos no primeiro contato com a realização de construções geométricas básicas utilizando o aplicativo GeoGebra para celular. Para facilitar o aprendizado, as construções foram ensinadas com o uso do aplicativo GeoGebra para celular, instalado em um emulador. Isso permitiu que os alunos não tivessem dificuldades em encontrar ou associar as ferramentas do programa para PC com as do aplicativo para celular.

Após a conclusão da oficina, foi aplicada uma atividade com apenas uma questão da atividade diagnóstica inicial para avaliar o impacto da oficina na criatividade e no conhecimento geométrico dos alunos. Foi escolhida a questão que mais intrigou os alunos durante a oficina. Além disso, foi aplicado um segundo questionário para avaliar a contribuição da oficina e a importância que os alunos atribuíram em relação ao seu desempenho em geometria. Para cada análise realizada, foram consideradas as possíveis justificativas, observações e questionamentos em relação às construções. As questões selecionadas para este trabalho foram retiradas e/ou baseadas no livro “Construções Geométricas” de Eduardo Wagner, da coleção Professor de Matemática, 5ª edição.



4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

É importante destacar que, o software GeoGebra, apesar de oferecer diversas ferramentas para construção rápida, exige conhecimento em construções geométricas para figuras com propriedades específicas. Assim, a integração de práticas de construção geométrica básica é essencial no uso educacional do GeoGebra para garantir o progresso adequado no estudo da geometria. A análise do questionário inicial revela que a maioria dos alunos não teve a disciplina de Desenho Geométrico no ensino fundamental, o que afeta negativamente seu desempenho em geometria no ensino médio. Apesar de 75% dos estudantes terem usado régua e compasso, muitos não desenvolveram a proficiência necessária em construções geométricas.

A pesquisa indica um forte apoio (94,4%) ao uso de softwares matemáticos para melhorar o ensino e aprendizagem em matemática, embora 80,6% dos alunos não conheçam ou utilizem tais softwares para estudar geometria. Entre os que usaram, GeoGebra e Excel são os mais mencionados. A autoavaliação dos alunos sobre seu desempenho em geometria é predominantemente mediana a baixa, destacando a necessidade de estratégias pedagógicas que melhorem o ensino e aprendizagem da disciplina.

4.1 Análise das resoluções da atividade diagnóstica

Esta análise, em geometria revelou que os alunos frequentemente recorriam à intuição em vez de métodos geométricos precisos. Muitos não justificaram suas respostas e tiveram dificuldades em visualizar figuras geométricas, confundindo conceitos como mediana e mediatriz. Na primeira questão, por exemplo, os alunos tentaram “ajustar” a circunferência intuitivamente, sem compreender plenamente o conceito de lugar geométrico.

Na segunda questão, a maioria dos alunos errou ao assumir que todos os sólidos resultantes dos cortes no cubo seriam iguais, indicando uma falta de compreensão tanto da geometria plana quanto da espacial. A terceira questão também mostrou limitações, com os alunos restringindo-se a casos específicos e não explorando todas as possibilidades geométricas. Os resultados sugerem a necessidade de um ensino de geometria mais estruturado e sistemático, que permita aos alunos entender e aplicar conceitos geométricos fundamentais de maneira eficaz. Isso enfatiza a importância do estudo de Desenho Geométrico e da Geometria Analítica para a resolução de problemas práticos.

4.2 Comentário sobre a análise das aulas referentes à oficina:

Ao longo das aulas, observou-se uma evolução significativa na compreensão e no engajamento dos alunos com o conteúdo de Geometria. Inicialmente, muitos não estavam familiarizados com o conceito de “Lugar Geométrico”, mas com a introdução de construções geométricas e o uso do software GeoGebra, começaram a justificar seus resultados com mais precisão e a entender a importância das propriedades geométricas.

A cada aula, os alunos mostraram maior interesse e curiosidade, especialmente em relação ao GeoGebra, o que facilitou a compreensão dos conceitos e a aplicação prática das construções geométricas. Mesmo com algumas dificuldades iniciais em expressar suas ideias claramente, houve um progresso notável na capacidade de justificar os procedimentos e resultados. O uso do GeoGebra, tanto no PC quanto no aplicativo para celular, provou ser um recurso pedagógico valioso, promovendo uma aprendizagem mais interativa e dinâmica. Os alunos não só se adaptaram bem ao uso da tecnologia, mas também

demonstraram entusiasmo em explorar e aprender mais sobre as ferramentas disponíveis.



Figura 1. Aula prática com App GeoGebra

Fonte: Almeida (2023)

Assim, a integração da tecnologia nas aulas de Geometria proporcionou uma experiência de aprendizado mais rica e motivadora, permitindo aos alunos desenvolver um entendimento mais profundo e um raciocínio lógico mais apurado na matéria. A evolução dos alunos foi evidente tanto na compreensão teórica quanto na prática das construções geométricas.

Com base nos resultados apresentados no questionário final, pode-se concluir que a oficina de geometria com o uso do GeoGebra foi bem avaliada pelos alunos e contribuiu para a consolidação do conhecimento geométrico. A maioria dos alunos indicou que a oficina foi relevante para a aprendizagem e que o GeoGebra contribuiu significativamente para a compreensão das construções geométricas, auxiliando na visualização das propriedades das figuras.

Apesar de alguns alunos terem apontado que o tempo de realização da oficina não foi suficiente, a maioria considerou que foi suficiente para a aprendizagem. Também foram levantadas sugestões para que haja mais aulas utilizando e/ou ensinando a manusear o GeoGebra. No geral, os resultados mostraram que a oficina foi bem-sucedida em despertar o interesse dos alunos pela geometria, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades e competências importantes para a compreensão da disciplina. Os resultados apontam para a importância de se promover mais aulas práticas, tanto com quanto sem o uso do GeoGebra, a fim de favorecer a proficiência dos alunos em geometria.

4.3 Análise da Atividade diagnóstica final:

A escolha desta questão se deu ao fato de ter sido a mais discutida durante a aplicação da atividade diagnóstica inicial, despertando o espírito investigativo dos alunos. Apesar de nenhum aluno ter conseguido construir ou justificar a circunferência inicialmente, após as aulas da oficina, 28 dos 30 alunos que realizaram a atividade conseguiram construir a circunferência corretamente, e os outros 2, por tentativa e erro.

As construções dos alunos, como as dos alunos 7 e 21, mostraram que as aulas foram eficazes em ensinar tanto o conceito quanto o procedimento das construções geométricas. Os alunos compreenderam as figuras geométricas como lugares geométricos e foram capazes de “construir” a circunferência passando pelos 3 (três) pontos dados na referida questão.

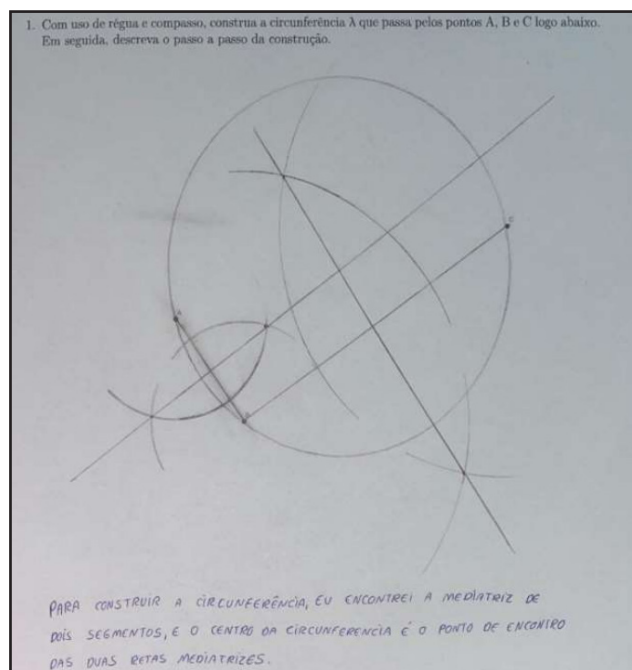


Figura 2. Construção realizada pelo aluno7

Fonte: Almeida (2023)

Com base na Figura 2, é possível observar que a construção da circunferência foi realizada de forma correta. Além disso, a justificativa apresentada pelo aluno(a) também está correta. Isso demonstra que as aulas ministradas propiciaram uma aprendizagem conceitual e procedimental eficiente em relação às construções geométricas, contribuindo para o desenvolvimento do entendimento das figuras geométricas como objetos abstratos.

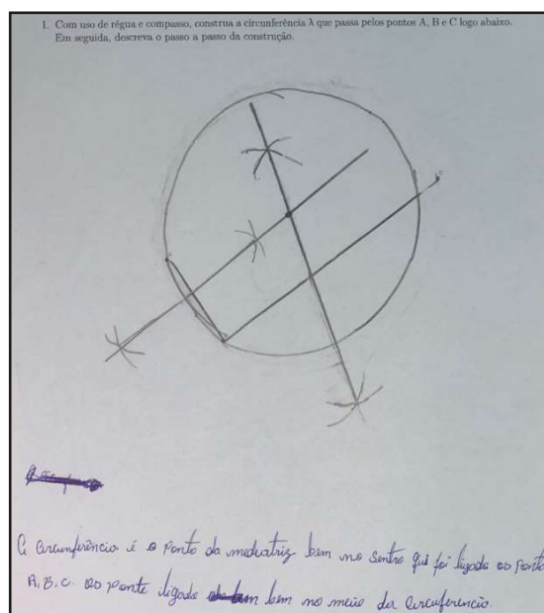


Figura 3. Construção realizada pelo aluno21

Fonte: Almeida (2023)

Conforme a Figura 3, mesmo o aluno não dispondo de régua e compasso, ele desenhou a circunferência, enfatizando os traços que indicam o lugar geométrico necessário para o resultado. Desse modo, as aulas contribuíram para que os alunos compreendessem as figuras geométricas como lugares geométricos, mesmo que sejam feitas a mão livre.

Embora alguns alunos tenham enfrentado dificuldades para expressar suas justifica-

tivas por escrito, eles foram capazes de apresentar suas ideias oralmente de forma clara e objetiva, explicando que o centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos e e f .

Os resultados positivos, apesar do desempenho inicial insatisfatório, demonstram que o ensino foi efetivo e que os alunos aplicaram os conceitos aprendidos com sucesso. Isso indica que o método de ensino foi eficaz e que os alunos estavam motivados e interessados em aprender, resultando em um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento do conhecimento geométrico. Conclui-se que houve um progresso significativo e desenvolvimento no conhecimento geométrico dos alunos após as aulas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização deste trabalho, inferimos que a Geometria, por ser uma disciplina intuitiva, mas ao mesmo tempo metódica e axiomática, necessita de metodologias que proporcionem ao educando autonomia para fazer conjecturas e testar hipóteses, visando melhorar o rendimento nessa disciplina. Assim, o presente estudo sugere as práticas de construções geométricas com o uso de régua e compasso e do software GeoGebra, objetivando preencher lacunas deixadas nessa disciplina e criar um ambiente que estimule o espírito investigativo do aluno e promova novas possibilidades para o estudo da Geometria.

Este trabalho destaca a importância da disciplina de Desenho Geométrico nos currículos escolares nacionais, considerando aspectos históricos que contribuíram para a desvalorização dessa disciplina e a defasagem causada na disciplina de Geometria. É comum nas aulas de Geometria na educação básica que os alunos apresentem resultados dedutivos inválidos, sem saber como verificar a veracidade desse resultado, considerando apenas o desenho da figura e não sua construção. Percebe-se que alguns alunos têm resistência em compreender as figuras geométricas não apenas como objetos palpáveis, mas também como entes abstratos.

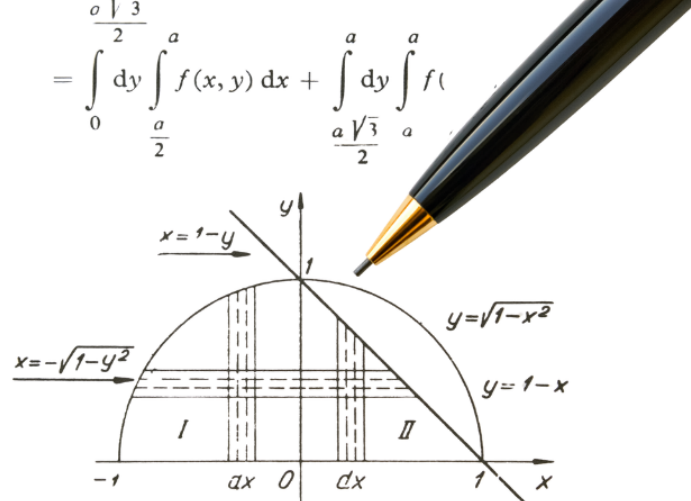
A pesquisa faz referência à inserção de softwares nas práticas pedagógicas, haja vista que as tecnologias da informação e comunicação estão cada vez mais presentes no âmbito escolar e se encontram intimamente ligadas à Matemática. Contudo, na parte prática do trabalho, o software GeoGebra contribui significativamente para as construções geométricas e, de modo geral, para o estudo de Geometria. Entretanto, o uso desse recurso como ferramenta didática não tem a pretensão de substituir os instrumentos como régua e compasso, mas sim estimular o estudo de Geometria, contribuindo para o entendimento dos entes geométricos elementares levando em consideração suas propriedades ao se realizar as construções.

Conclui-se que o ensino de Construções Geométricas, quando desenvolvido com o auxílio do software GeoGebra, torna-se mais viável para que o aluno construa seu conhecimento geométrico, desenvolva o raciocínio lógico e seja capaz de deduzir, conjecturar e justificar resultados com argumentos válidos. Por fim, espera-se que essa pesquisa venha a oferecer subsídios para considerar a possibilidade de inserir tópicos de Construção Geométrica com o auxílio do software GeoGebra nas aulas de Geometria, enriquecendo as práticas pedagógicas dos professores de Matemática.



Referências

- ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico**: elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília (DF), 1961.
- COSTA, André; LACERDA, Geraldo. O uso do GeoGebra no ensino de Geometria: um estudo com estudantes do Ensino Fundamental. **Educação, Escola & Sociedade**, v. 6, n. 6, p. 31-42, 2013.
- DE OLIVEIRA, Clézio Lemes. **Importância do Desenho Geométrico**. Monografia, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.
- ENZIN, N.K.; LINCOLN, Y.S. **Handbook of qualitative research Thousand Oaks**: Sage, 2005.
- GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **RAE - Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.
- PEREIRA, Jaciene. **O atual modelo energético e a gestão ambiental no Brasil: uma análise a partir do caso da UHE-Estreito e os impactos socioespaciais em Carolina**. 2015. 174 f. Mestrado (Dissertação) – Mestrado de Desenvolvimento Socioespacial e Regional. Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2015.
- SARDINHA, Reinaldo Loubach. O uso do GeoGebra no ensino de desenho geométrico nos anos finais do ensino fundamental. **Dissertação**. Juiz de Fora, MG: UFJF, 2014.
- SCHAAF, Minim" L., Ed. Reprint Series: Geometric Constructions. RS-10. **Stanford Univ.**, Calif. School Mathematics Study, 1967.
- WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1993 (Coleção do Professor de Matemática).
- ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. 2001.



doi 10.29327/5723810.1-2

2

OLHAR PARA A ECONOMIA: UM MODELO PRÁTICO DE ENSINAR A MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

*LOOK AT THE ECONOMY: A PRACTICAL MODEL FOR
TEACHING COMMERCIAL AND FINANCIAL MATHEMATICS
IN BASIC EDUCATION*

Gilberto Ferreira de Sousa¹

Sergio Nolêto Turibus²

Fernando Santana Lima²

Karillos Alexandre Sousa Pereira¹

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

² Doutor, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

RESUMO

Este trabalho se constitui como projeto de aulas teóricas e práticas de Matemática Comercial e Financeira no Ensino Básico, desenvolvido no Centro de Ensino Maria José Dias Trovão, na Cidade de Coroatá, Estado do Maranhão. A primeira parte do desenvolvimento do projeto, ocorreu com a explanação teórica dos temas abordados, a fim de despertar a curiosidade e interesse dos alunos pela Educação Financeira. Em seguida, foram feitas pesquisas mensais de preços em supermercados, lojas de móveis e eletrodomésticos, para a coleta de dados, os quais passaram por análise e, por fim, foram expostos em mural da escola. Dessa forma, pretende-se ajudar os alunos e, conseqüentemente, a comunidade na qual a escola está inserida, no controle de orçamento pessoal e familiar, possibilitando tomarem melhores decisões de compras e investimentos. Para verificação da aprendizagem, os alunos participantes da pesquisa responderam a um mesmo questionário diagnóstico, antes e após visita aos estabelecimentos comerciais, com o intuito de se observar a evolução de entendimento acerca do tema. Também como metodologia utilizada, tem-se a pesquisa bibliográfica em livros e artigos sobre Matemática Comercial e Financeira, como Gelson Iezzi, Joamir Souza, Manoel Paiva, Giovanni Junior e outros, e ainda a consulta à Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), material que serve como subsídio para justificar a necessidade de tal estudo.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem, Teoria e prática, Aplicações.

ABSTRACT

This work is a project of theoretical and practical classes on Commercial and Financial Mathematics in Elementary and High School, developed at the Centro de Ensino Maria José Dias Trovão, in the city of Coroatá, state of Maranhão. In the first part of project development, there is a theoretical explanation of the topics covered, in order to arouse the curiosity and interest of students in Financial Education. Then, monthly price surveys in supermarkets, furniture and home appliances stores were made to collect data, which are analyzed and, finally, displayed on the school wall. In this way, it is intended to help students and, consequently, the community where the school is inserted, in the control of personal and family budgets, enabling them to make better purchasing and investment decisions. To verify learning, students who participated in the survey answered the same diagnostic questionnaire, before and after visit commercial establishments, in order to observe the evolution of understanding on the topic. Also used as methodology, there is the bibliographic research in books and articles on Commercial and Financial Mathematics, such as Gelson Iezzi, Joamir Souza, Manoel Paiva, Giovanni Junior and others, as well as consultation with the Lei Diretrizes e Bases da Educação (LDB) and the Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), material which serves as a subsidy to justify the need for such a study.

Keywords: Teaching and learning, Theory and practice, Applications

1. INTRODUÇÃO

O mundo atravessa um momento de grande instabilidade econômica causada pela pandemia da Covid-19. O nosso país, que já apresentava sinais de uma relevante instabilidade econômica, política e social, atualmente, apresenta um cenário ainda mais crítico, tendo como consequência o aumento da inflação e do desemprego, que, por sua vez, acarretou na elevação do número de brasileiros endividados. Diante disso, ressalta-se que a temática abordada por esta pesquisa se torna apropriada ao momento vivenciado.

Os meios de comunicação atuam como informantes em torno dos efeitos da pandemia na economia, tais como taxas percentuais, criação de novos impostos, cotações nas bolsas de valores etc. Conforme a Confederação Nacional do Comércio de Bens e Serviços e Turismo CNC (2015), o volume de brasileiros com dívidas em cheque especial, empréstimo, cartão de crédito, prestação de carro e carnê de loja, alcançaram o nível mais elevado da história em julho de 2020. O percentual de famílias endividadas, consultado pela Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (PEIC), alcançou 67,1%, atualizando o mais alto patamar da série registrado até então. Esse estudo teve início em janeiro de 2010.

Iezzi (2014) disserta que a Matemática Comercial corresponde à Matemática da vida cotidiana, aquela que se volta para a relação das pessoas com o dinheiro em meio ao comércio, operações financeiras; orçamentos domésticos; na abertura de uma poupança; na gestão da renda familiar etc. A Matemática Financeira expõe as categorias de juros simples e compostos, os financiamentos e empréstimos, os instrumentos de ajustes de valores em investimentos financeiros, entre outros.

De acordo com Teixeira (2005), a Educação Financeira é de suma importância para que o cidadão se torne ciente da relevância da boa administração de suas finanças para o alcance de uma melhor qualidade de vida. Dessa forma, é importante que as crianças, os adultos consumidores do amanhã, devam ser preparadas logo cedo, para melhor gerirem seus recursos financeiros no futuro, assinalando assim, o papel da escola e da família na inserção de novos padrões comportamentais na formação das novas gerações. Através da Educação Financeira, tem-se a possibilidade de constituir cidadãos conscientes e orientados a atuarem no desenvolvimento socioeconômico do país.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Contextualizando a Matemática Comercial e Financeira

Desde os primórdios, é perceptível o cuidado do homem para com as atividades que lhe permitiam melhor compreender a realidade financeira e patrimonial de suas transações. A partir dos estudos de Feijó (2007), tem-se conhecimento que a partir do século XVII, momento marcado pela efervescência das atividades comerciais e a inspiração pelo conhecimento, surgiram os primeiros textos em torno da aritmética. Esses documentos se apresentavam em duas modalidades; uma primeira elaborada em latim, compostos por conhecimentos oriundos de intelectuais clássicos; e a segunda, em uma escrita local, elaborada por professores com vocações práticas que tinham como intuito o treinamento de jovens para prosseguir em carreiras ligadas ao comércio.

Segundo Dante (2017), até os anos 2000 a.C, o comércio era promovido através das trocas entre produtos e serviços, prática conceituada como escambo. Diante do elevado fluxo comercial, o exercício do escambo se tornou obsoleto. O dinheiro teve seu surgimen-



to atrelado à necessidade de uniformizar a variedade de produtos com uma mesma tipificação de valores. Em 1000 a.C, o dinheiro se tornou elemento base na organização e formação das sociedades.

É importante mencionar que o câmbio compreende a uma das primeiras operações relacionadas à Matemática Financeira, em que, cada país estabelecia suas moedas, necessitando, assim, que o comércio lançasse uma equivalência entre elas. As pessoas envolvidas nesse exercício eram conhecidas como cambistas, as quais se locavam em bancos em meio aos mercados, nesse contexto, surgia o conceito de banco. Pinto (2005) assinala que, em 575 a.C, já se registrava a existência de banqueiros internacionais operando na Babilônia, em que estes obtinham renda através das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seus recursos monetários para o financiamento do comércio internacional. Diante disso, é notório que os juros correspondem a uma das formas mais antigas da aplicação da Matemática Financeira, passando por poucas alterações até chegar os dias atuais.

2.2 Conceitos Básicos de Matemática Financeira

Conforme Souza (2011), ao se suceder a compra ou venda de referido produto ou serviço, empréstimos bancários, cálculo de prestações, pagamento de impostos, entre outras atividades, estão sendo abordados elementos da Matemática Financeira. Se, por exemplo, a realização de um pagamento de um referido produto for executado na modalidade à vista, quase sempre é ofertado um desconto, todavia, se o pagamento for a prazo, pode existir a inserção de um acréscimo, conhecido como juros.

A Matemática Financeira é amplamente manuseada pelas instituições bancárias no ato de calcular a taxa de juros de um empréstimo ou de um investimento, como também aplicada nos financiamentos e nas simplificações de operações financeiras. De forma generalizada, a Matemática Financeira ajuda na resposta de questionamentos cotidianos, tais como:

- Durante quanto tempo devo aplicar uma quantia, a certa taxa, para que ao final obtenha determinado juro?
- Quanto terei que pagar de juros por certo empréstimo?
- Qual é a taxa de juros que essa loja cobra ao vender seus produtos a prazo?

Portanto, fez necessário direcionar ao estudo dos conceitos básicos e principais fundamentos que cercam o estudo da Matemática Financeira, como porcentagem, juros e suas aplicações.

2.2.1 Porcentagem

Ao decorrer do dia a dia, muitos indivíduos, facilmente necessitam realizar cálculos que envolvam porcentagem para obter o percentual de algum valor.

Conforme Souza (2011, p.53), “a porcentagem corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Para indicá-la, utilizamos o símbolo %. Toda razão xy com $y=100$ é denominada taxa percentual”.

2.2.2 Juros Simples

Souza (2011) afirma que, ao se contratar um empréstimo no banco, o indivíduo devolve a instituição além do valor tomado emprestado, um valor a mais que compreende aos juros, ou seja, corresponde a um tipo de “aluguel” pelo tempo em que o dinheiro foi emprestado. Um outro exemplo, abordando a aplicação dos juros, pode ser visto quando uma pessoa promove uma aplicação de dado valor, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento, nesse caso, a pessoa obtém os juros conforme o período que seu capital ficou aplicado. Quando a efetuação de um pagamento de fatura ocorre de forma atrasada, também é acrescido uma taxa de juros referente ao tempo em atraso.

Adiante serão expostos alguns termos usuais em situações que envolvam os juros.

- Capital (C): quantia em dinheiro investida ou emprestada;
- Juro (J): rendimento, acréscimo ou “aluguel” pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia;
- Taxa de juros (i): porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia;
- Tempo (t): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser dado em dias, meses, anos etc;
- Montante (M): soma do capital com o juro, podendo ser indicado por $M = C + J$.

A taxa e o tempo (prazo) devem ser sempre expressos na mesma unidade. Por exemplo, se i for uma taxa diária, t deverá ser expresso em dias; se a taxa for mensal, t deverá ser expresso em meses; e assim por diante (Souza, 2011, p.65).

Os juros simples correspondem àqueles que são calculados em torno do capital inicial de um empréstimo. Giovanni (2011) afirma que os juros simples (J) são diretamente proporcionais ao capital (C), à taxa (i) e ao tempo (t), podendo ser aplicada a seguinte relação:

$$J = C * i * t$$

Esse tipo de aplicação não é importante para o investidor porque o rendimento é calculado somente sobre o capital inicialmente aplicado. Desse modo a partir do segundo período de aplicação, o dinheiro do investidor deixa de ser capitalizado, e perde o poder de compra.

2.2.3 Juros Compostos

Os juros compostos, também conhecidos como juros sobre juros, é tido como o regime mais utilizado nas transações financeiras. Nessa modalidade, o valor dos juros gerados em um dado período é acrescentado ao capital e passa a integrar a composição de juros no período seguinte. Giovanni (2011) destaca que este regime também é conceituado como capitalização acumulada, e, para que os cálculos não sejam muito extensos, é possível descobrir o montante de uma aplicação fazendo uso da fórmula demonstrada a seguir.

Considerando um capital C, aplicado a juros compostos, a uma taxa de juros i – expressa na forma decimal – fixa por períodos. Ressalta-se que o período considerado deve se encontrar em conformidade com a unidade de tempo da taxa. Temos:



Tempo	Capital no início do período	Montante ao final do período
1	C	$C + Ci$ $C(1+i)$ colocamos C em evidência
2	$C(1+i)$	$C(1+i) + C(1+i)i$ $C(1+i)(1+i) \rightarrow$ colocamos $C(1+i)$ em evidência $C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2i$ $C(1+i)^2(1+i) \rightarrow$ colocamos $C(1+i)^2$ em evidência $C(1+i)^3$
4	$C(1+i)^3$	$C(1+i)^3 + C(1+i)^3i$ $C(1+i)^3(1+i) \rightarrow$ colocamos $C(1+i)^3$ em evidência $C(1+i)^4$
...	...	...
t	$C(1+i)^n$	$C(1+i)^{t-1} + C(1+i)^{t-1}i$ $C(1+i)^{t-1}(1+i) \rightarrow$ colocamos $C(1+i)^{t-1}$ em evidência $C(1+i)^t$

Tabela 1. Demonstração da fórmula do montante de juros compostos

Fonte: Autoria própria (2021)

Obtendo-se assim a fórmula do montante de juros compostos, conforme raciocínio mostrado na Tabela 1:

$$M = C(1+i)^t$$

3. METODOLOGIA

Consoante Minayo (1993, p.23), a pesquisa é considerada como:

A atividade básica das ciências na sua indagação e descoberta da realidade. É uma atitude e uma prática teórica de constante busca, que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente. É uma atividade de aproximação sucessiva da realidade que nunca se esgota, fazendo uma combinação particular entre teoria e dados.

A pesquisa quanto aos seus objetivos pode ser: exploratória, descritiva ou explicativa. Apresenta natureza descritiva, aquela que tem por fim, segundo Vergara (2000), a exposição de características de dado grupo ou fenômeno, deliberando correlações entre variáveis e indicando suas naturezas. A autora destaca, ainda, que a pesquisa não necessariamente manifesta o compromisso de esclarecer os fenômenos que descreve, embora sirva de base para tal explicação.

À vista disso, a pesquisa se justifica como descritiva por tentar descrever as características da Matemática Comercial e Financeira, como o seu desenvolvimento e aplicação em meio ao Ensino Básico.

O presente trabalho teve seguimento de caráter teórico, representando a coleta de

da- dos, em que estes correspondem a documentos já implementados e fundamentados, servindo como embasamento para construção do projeto Olhar para economia: um modelo prático de ensinar a Matemática Comercial e Financeira no Ensino Básico. Dessa maneira, quanto aos procedimentos técnicos, optou-se pela pesquisa bibliográfica, que, conforme Marconi (2000, p.183):

Abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas, quer gravadas.

No que diz respeito à sua abordagem, o estudo se apresenta tanto como uma pesquisa qualitativa como quantitativa, pois tem como intuito englobar a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão dos aspectos do estudo. Goldenberg (2004) afirma que a junção da pesquisa quantitativa e qualitativa concede ao pesquisador a chance de interceptação de suas conclusões, de forma que os dados obtidos não se apresentam como frutos de um procedimento específico ou de alguma situação em particular.

É importante mencionar que, durante a elaboração da pesquisa, ao longo de todas as suas etapas, foram promovidas a análise e a separação criteriosa de todos os dados bibliográficos, base fundamental para a construção deste trabalho científico.

Como a Matemática Comercial e Financeira está presente no nosso cotidiano, o aluno deve ser instruído e capacitado para lidar com as informações no aspecto econômico, o que exige o desenvolvimento de pedagogias que facilitem o ensino e a aprendizagem, para isso, foi desenvolvido um seminário “Economia em foco”.

Para o âmbito da comunidade, na qual a escola está inserida, o seminário foi pensado com o intuito de informar e orientar acerca do comércio local. E foi desenvolvido com pesquisas de campo; análise e organização dos dados pesquisados em tabelas; e exposição dos dados num mural na escola trabalhando de forma teórica e prática.

A pesquisa foi realizada em um período em que o nosso país enfrenta uma série de restrições causadas pela pandemia da Covid-19. Tendo em vista essas restrições, entre elas, a não aglomeração de pessoas, as aulas presenciais foram suspensas e, o seminário ficou resumido a um grupo de alunos que participaram da execução do projeto, cujas etapas são:

- Avaliação diagnóstica, antes e depois da pesquisa de campo;
- Confecção do mural;
- Pesquisas de campo;
- Avaliação dos dados pesquisados;
- Exposição dos dados no mural.

Vale ressaltar que as atividades foram realizadas cumprindo todos os protocolos exigidos pela vigilância sanitária do Brasil.

A figura a seguir é do colégio onde trabalho, e, onde foi desenvolvido projeto de pesquisa.





Figura 1. Centro de Ensino

Fonte: Autoria própria (2021)

Os dados coletados em cada pesquisa de campo ficarão expostos no mural do Centro de Ensino Maria José Dias Trovão, localizado a Rua Joaquim Teixeira, S/N Trisidela, Coroatá-MA. Fundado em 1982, conta com biblioteca, sala de leitura, auditório, sala dos professores, 8 salas de aula (ensino médio), pátio e quadra esportiva cobertos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Execução do Seminário

No cenário atual de uma economia globalizada, nenhum projeto alcança bom êxito sem que sejam levados em conta todos os seus aspectos financeiros sendo assim, diante da importância da Matemática Financeira na prática cidadã, espera-se que o aluno da educação básica, saiba optar conscientemente por uma compra à vista ou a prazo, e entender as informações corretas sobre porcentagens e juros.

Em princípio, foram feitas revisões e explicações dos conteúdos e do objetivo a ser alcançado através do projeto. Devido a pandemia da Covid-19, as aulas foram ministradas de forma online utilizando o Google Meet. Conforme registrado na figura abaixo.

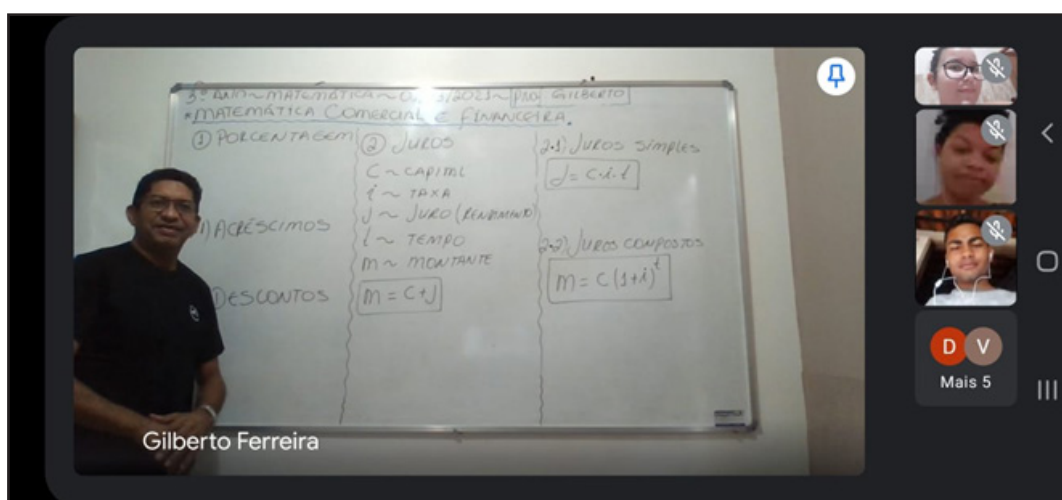


Figura 2. Registro da aula online

Fonte: Autoria própria (2021)

Foi aplicado um questionário diagnóstico, após 4 aulas teóricas, em Março, antes das pesquisas de campo. Embora 9 alunos tenham respondido o questionário, conforme a Fi-

gura 9, apenas 8 participaram das pesquisas de campo e das avaliações dos resultados. Portanto, o resultado do questionário diagnóstico, foi calculado somente com os 8 alunos que participaram de todas as etapas da pesquisa. A reaplicação aconteceu em abril, após a última pesquisa.



Figura 3. Alunos respondendo o questionário diagnóstico

Fonte: Autoria própria (2021)

Para finalizar o projeto, foi feita a conclusão da confecção do mural e, devido às restrições a cerca, das aglomerações de pessoas, apenas 4 alunos puderam participar dessa etapa.

4.2 A Pesquisa de Campo

A pesquisa de campo, que consistiu em coletar dados referentes aos preços de determinados produtos, foi dividida em dois segmentos: cesta básica e eletrodomésticos. E aconteceu num período de dois meses.

O levantamento de preços de cada item de cesta básica é cotado observando as duas marcas mais ofertadas nos dois supermercados. Esses preços foram organizados em tabelas para facilitar as análises.

Item	Supermercado P		Supermercado Q	
	Marca A	Marca B	Marca A	Marca B
Arroz tipi 1 (5Kg)				
Feijão Carioca (1Kg)				
Farinha Branca (1Kg)				
Açúcar Cristal(1Kg)				
Óleo de soja (900ml)				
Café Moído (250g)				
Margarina vegetal (250ml)				

Tabela 2. Organização dos dados pesquisados com os preços em reais.

Fonte: Autoria própria (2021)

Feita de forma simples e objetiva, a pesquisa de eletrodomésticos pretendia conhecer as taxas de juros praticados nos estabelecimentos e os descontos nas compras à vista.

Foram pesquisados três produtos (celular, geladeira e notebook) em duas lojas de eletrodomésticos, cuja busca consistiu em:

- Preço na etiqueta;
- Preço à vista;
- Condições de financiamento;
- Parcelamento no cartão de crédito.

A tabela para as anotações de cada objeto pesquisado foi confeccionado de acordo com o modelo abaixo, sendo fornecidos os valores em reais da loja que oferecer as melhores condições de pagamento.

Meses	Preços			
	Etiqueta	À vista	Cartão de crédito	Financiado
Março				
Abril				

Tabela 3. Preço do eletrodoméstico.

Fonte: Autoria própria (2021)

4.2.1 A pesquisa nos supermercados e nas lojas de eletrodomésticos

Nos supermercados, foram pesquisados os preços de sete produtos da cesta básica; e nas lojas de eletrodomésticos, foram pesquisados os preços de três produtos (notebook, celular e geladeira).



Figura 5. Pesquisa de preço no supermercado 1

Fonte: Autoria própria (2021)



Figura 6. Pesquisa de preço na loja de eletrodoméstico

Fonte: Autoria própria (2021)

As Figuras 5 e 6 representam os registros das pesquisas de campo realizadas mensalmente em dois supermercados e duas lojas de eletrodomésticos, ambas localizadas na cidade de Coroatá-MA.

Os produtos citados nas pesquisas de preços, eram os mais consumidos pela população coroaense, no período das pesquisas.

4.3 Dados pesquisados

Após a pesquisa, os dados passaram por análise, para organização e registro no mural confeccionado no Centro de Ensino Maria José Dias Trovão.

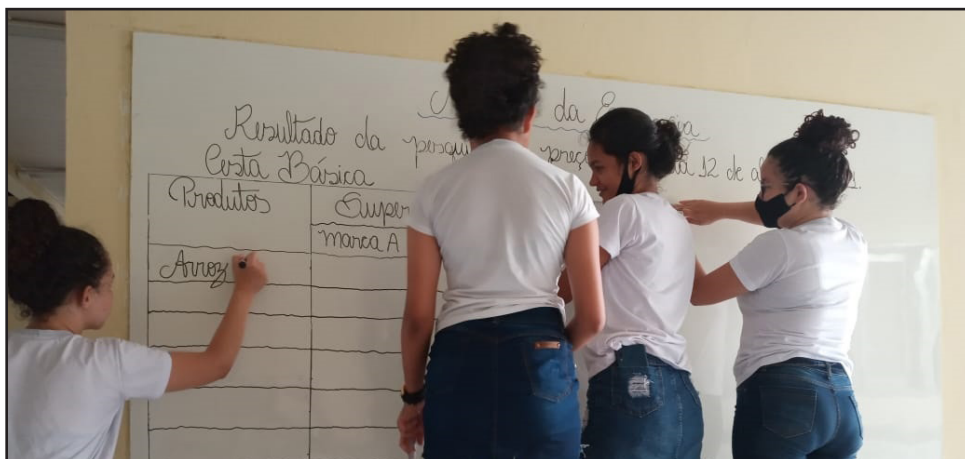


Figura 7. Organizando os dados no mural

Fonte: Autoria própria (2021)

4.3.1 Questionário diagnóstico

Em Março, antes das pesquisas de campo foram explicados, em quatro aulas online, os conteúdos de porcentagem, juros simples e juros compostos. Em seguida, foi aplicado o questionário diagnóstico, de forma presencial, a um grupo de nove alunos do 3o ano do ensino médio, cumprindo com os protocolos exigidos pela vigilância sanitária. Essas aulas se deram de forma remota devido a pandemia da Covid-19, e, por esse motivo, apenas 8 alunos puderam participar ativamente do projeto.



Figura 8. Reaplicação do questionário

Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 18 representa o registro dos alunos respondendo o questionário diagnóstico, no dia 29 de abril de 2021 após as pesquisas de campo e as análises dos resultados pesquisados, tendo como conteúdos as variações de preços, descontos e os juros nas vendas financiadas.

Nas Tabelas 11 e 12, constam os resultados, considerando o número de acertos, das avaliações diagnósticas, antes e depois das pesquisas de campo, respectivamente.

Conteúdos	Percentual de acertos
Porcentagem	12,5%
Juros Simples	12,5%
Juros Compostos	0,0%

Tabela 4. Resultado do questionário diagnóstico (antes das pesquisas).

Fonte: Autoria própria (2021)

Conteúdos	Percentual de acertos
Porcentagem	75%
Juros Simples	79,16%
Juros Compostos	37,5%

Tabela 4. Resultado do questionário diagnóstico (após as pesquisas).

Fonte: Autoria própria (2021)

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho abordou a temática, Olhar para economia: um modelo prático de ensinar a Matemática Comercial e Financeira no Ensino Básico, conciliando teoria e prática.

Diante das dificuldades dos alunos em assimilar os conteúdos de matemática, a pesquisa buscou analisar o nível de aprendizagem, quando usamos o método de ensino que concilia a teoria e a prática, na Matemática Financeira. Para isso, realizamos pesquisas de preços no comércio local, e analisamos as porcentagens e os juros embutidos nos preços dos produtos.

Este trabalho teve como objetivo principal contribuir e aprimorar o conhecimento em torno da Matemática Comercial e Financeira, tornando os alunos em cidadãos mais críticos e capazes de tomarem as melhores decisões financeiras.

Analisando os resultados dos alunos na avaliação diagnóstica, antes e depois das pesquisas de campo, obteve-se os seguintes resultados:

- Antes das pesquisas de campo, o percentual médio de acertos dos alunos foi de 8,33%;
- Após as pesquisas de campo, o percentual médio de acertos dos alunos foi de 63,88%.
- Calculando o percentual de aumento nos acertos das questões do questionário diagnóstico:
- Antes, percentual médio de 8,33;
- Após, percentual médio de 63,88;
- O aumento entre os percentuais médio é $63,88 - 8,33 = 55,55$.

Estabelecendo uma regra de três, temos:

$$\begin{cases} 8,33 \rightarrow 100\% \\ 55,55 \rightarrow i\% \end{cases}$$

$$8,33i = 100 * 55,55$$

$$8,33i = 5,555$$

$$i = \frac{5,555}{8,33}$$

$$i = 666,86\%$$

Observa-se, então, que houve um crescimento de 666,86%. Com isso, entende-se que, quando conciliamos a teoria e a prática como método de ensino, a aprendizagem dos alunos é muito maior.

Segundo a CNC, grande parte da população brasileira - cerca de 66,5% conforme consulta em janeiro de 2021, está endividada. Esse cenário, no entanto, poderia ser diferente se, durante a formação escolar, o estudante tivesse um estudo específico da Matemática Comercial e Financeira Aplicada, o que formaria um sujeito mais consciente de sua condição financeira e, possivelmente, mais responsável, por educar-se financeiramente, podendo, inclusive, influenciar a família a partir desse conhecimento. Daí, percebe-se a relevância de impactar uma comunidade ou mesmo a sociedade em geral.

Referências

CNC. **Número de brasileiros endividados cresce e volta a bater recorde em junho**. In: Confederação Nacional do Comércio de Bens e Serviços e Turismo. 2015. Disponível em: <<http://www.cnc.org.br/editorias/economia/noticias/numero-de-brasileiros-endividados-cresce-e-volta-bater-recorde-em-junho>>. Acesso em: 12 jan 2024.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

FEIJÓ, A. B. **O ensino de Matemática Financeira na Graduação com a utilização da Planilha de Calculadora**: Uma investigação comparativa. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado Acadêmico em Educação e Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul –PUC/RS, Porto Alegre, 2007.

GIOVANNI, J. R. B. J. R. **Matemática: uma nova abordagem**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2011.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8.ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

IEZZI, G. **Matemática**: ciências e suas aplicações. 8.ed. São Paulo: Atual, 2014.

MARCONI, E. M. L. Marina de A. **Projetos e Relatórios de Pesquisa em Administração**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento**. São Paulo: Hucitec, 1993.

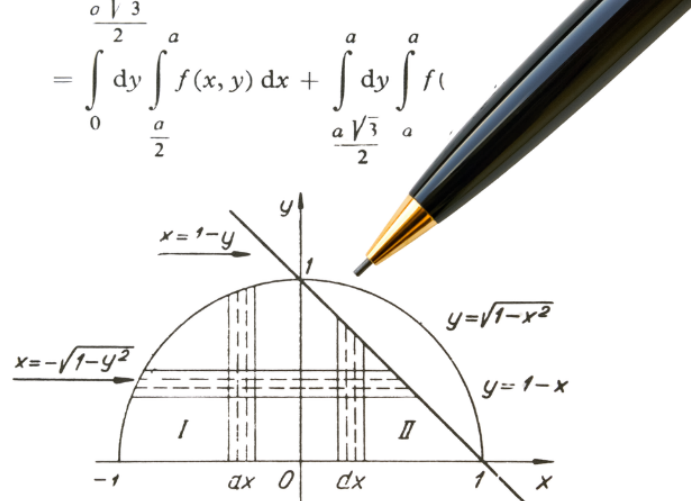
PINTO, G. J. **Educação Financeira: como está sendo abordada nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental?** 2005. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em: 18 jan 2024.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2011.

TEIXEIRA, J. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira**. Tese (Doutorado) — (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo–PUC/SP, São Paulo, 2005.

VERGARA, S. C. **Projetos e Relatórios de Pesquisa em Administração**. 3. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2000.





doi 10.29327/5723810.1-3

3

GEOGEBRA: RECURSO FACILITADOR E MOTIVADOR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM PARA O ESTUDO DA ESTATÍSTICA NO ENSINO MÉDIO

GEOGEBRA: FACILITATING AND MOTIVATING RESOURCE IN TEACHING-LEARNING PROCESS FOR THE STUDY OF STATISTICS IN HIGH SCHOOL

Israel Costa Abreu¹

Sandra Imaculada Moreira Neto²

Alberto Leandro Correia Costa³

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - Maranhão

² Doutora, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - Maranhão

³ Doutor, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - Maranhão

RESUMO

Neste estudo apresenta-se uma proposta de utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica no processo ensino-aprendizagem da estatística no Ensino Médio. Propõe-se uma abordagem na qual conceitos-chave envolvendo a Estatística Descritiva, tais como: gráfico, tabela, média, mediana e moda, são construídos e trabalhados pelos alunos de uma maneira mais prática por meio do referido software utilizando-se de aparelhos telefônicos celulares. Apresenta-se também um relato de uma experiência prática em que a referida proposta foi implementada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio da rede pública. Por fim, avalia-se o impacto da utilização da proposta segundo alguns aspectos relacionados à motivação em estudar o tema, participação na aula e desenvolvimento de competências e de habilidades por parte dos alunos.

Palavras-chave: GeoGebra, Ensino, Estatística, Ensino Médio.

ABSTRACT

In this study, we present a proposal concerning utilization of software Geogebra as a pedagogical tool in the teaching-learning process of Statistics at the High School level. An approach is proposed in which key concepts involving Descriptive Statistics, such as: graph, table, mean, median and mode, are constructed and worked on by students in a more practical way through the aforementioned software using cell phone devices. A report of a practical experience is also presented in which the aforementioned proposal was implemented in a first year public high school class. Finally, it evaluates the impact of using the proposal according to some aspects related to motivation in studying the topic, participation in class and development of skills and abilities on the part of students.

Keywords: GeoGebra, Teaching, Statistics, High School.



1. INTRODUÇÃO

Um tema de constante investigação, nos últimos tempos, no que concerne às práticas docentes, gira em torno de metodologias que incluam o aluno no processo de construção do saber, permitindo-o dar mais concretude e significância aos conteúdos curriculares adotados pelo sistema nacional de educação, de forma que este se familiarize com as aplicações dos conhecimentos adquiridos em sala de aula, conforme sua realidade e vivência. Discute-se uma nova postura educacional planejada de forma que dentro do processo de ensino-aprendizagem se incorporem os aspectos da cultura do aluno, permitindo que os conteúdos estudados possam se materializar nas aplicações práticas do seu dia-dia.

Acontece que para além das aplicações, a própria forma de abordar tais conteúdos ensejam essa conexão entre a vivência dentro da sala de aula e a experiência fora dela. Dessa forma, outro aspecto relevante relacionado a esta questão, é o uso de estratégias e ferramentas pedagógicas que conectam a abordagem do conteúdo a ser ensinado com a vida cotidiana do estudante. Nesse sentido, a utilização de atividades práticas como estratégia pedagógica volta-se para tratar desta questão, objetivando uma abordagem que permita o aprendizado para além do conteúdo curricular, incentivando o aluno a relacionar esses conteúdos curriculares com outros aspectos da sua vida cotidiana, e possibilitando-o, ainda mais, entender a relevância dos seus estudos na sua vida concreta.

Um aspecto fundamental nessa discussão está relacionado com o avanço do uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) em todos os setores da sociedade global, que vem provocando mudanças constantes no modo de viver dos indivíduos e constituindo parte imprescindível dos seus cotidianos e suas realidades. Com isso, uma constante exigência de desenvolvimento de novas competências na formação do cidadão da sociedade contemporânea se impõe pela necessidade de uso de instrumentos tecnológicos, desde o simples imperativo de se comunicar com amigos e familiares por meio de *smartphones*, até a necessidade de se executar atividades laborais com uso de computadores e *softwares* especializados. E essa disseminação da informática na sociedade impõe a necessidade de novos conhecimentos, novas práticas pedagógicas que preparem o aluno para essa nova realidade comunicacional e laboral, incluindo esses aspectos tecnológicos da sua vida no modo de abordar os conteúdos a serem ensinados. De acordo como preconiza a Base Nacional Comum Curricular, a inclusão dessas ferramentas por parte da escola é de fundamental importância na sociedade contemporânea:

Todo esse quadro impõe à escola desafios ao cumprimento do seu papel em relação à formação das novas gerações. É importante que a instituição escolar preserve seu compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada e contribua para o desenvolvimento, no estudante, de uma atitude crítica em relação ao conteúdo e à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais (BRASIL, 2017, p. 59).

Atualmente, o uso do *smartphone* e *tablets*, se faz presente no cotidiano de praticamente todos os adultos, adolescentes e crianças. Desse modo, inserir estes equipamentos como ferramenta auxiliar no estudo dos conteúdos pode ser uma estratégia que venha contribuir na motivação e engajamento dos alunos, nas aulas expositivas e na realização das tarefas escolares. E nada mais atrativo do que usar um aparelho com o qual os alunos já têm afinidade, de acordo como discute Moura (2016, 83):

[...] Uma das escolas participantes promoveu o uso dos dispositivos dos próprios alunos, no entanto, as reações foram variadas, porque alguns alunos preferiram usar os próprios dispositivos. O mesmo tem verificado Moura (2014) relativamente aos tablets da escola, os alunos preferem usar os seus próprios smartphones. Nas conclusões gerais destes estudos, uma das mais significativas recomendações para o uso de qualquer tipo de tecnologia na aprendizagem é aceitar que os alunos querem usar as suas próprias tecnologias na escola e a necessidade de serem os professores a adaptar os ambientes aos alunos, em vez de esperar que sejam eles a adaptarem-se ao ambiente do professor.

No que concerne ao campo da Estatística, o imperativo de se trabalhar com quantidade grande de dados, enseja o uso de planilhas e ferramentas computacionais, dessa forma vislumbra-se no ensino da Estatística, um campo prolífico para a inserção de ferramentas tecnológicas computacionais na abordagem dos conteúdos no processo de ensino-aprendizagem em torno desta matéria, desde os conceitos iniciais, como moda, média, mediana e outros. Nesse sentido, a pergunta que norteia este estudo é a seguinte: *O uso do GeoGebra através do smartphone pode constituir uma ferramenta auxiliar que contribua positivamente no interesse e aprendizado dos alunos nas aulas de Estatística no 1º ano do Ensino Médio?*

No intuito de trazer respostas à pergunta acima colocada, Abreu (2021) em sua dissertação, analisou os resultados obtidos em pesquisa de campo realizada durante o ano de 2021 com alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola estadual Centro de Ensino Liceu Maranhense, no Município de São Luís-MA. A pesquisa foi realizada por meio de um minicurso ofertado com duração de 16 horas, com alunos de três turmas de 1º ano do Ensino Médio da instituição acima citada. Essa pesquisa culminou com a dissertação de mestrado com o título GEOGEBRA: recurso facilitador e motivador no processo ensino-aprendizagem para o estudo da Estatística no Ensino Médio de autoria de Israel Costa Abreu, então discente do PROFMAT/UEMA.

Vale ressaltar que esta pesquisa se desenvolveu em meio à pandemia do coronavírus (SARS-CoV-2). Nesse contexto, o uso das TDICs no processo de ensino consistiu em um imperativo, devido à necessidade de se fazer aulas remotas. Professores de todos os níveis educacionais tiveram que se adaptar de forma abrupta a essa nova realidade. Isto reforça o caráter crescente e progressivo do uso dessas novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem escolar. O presente trabalho foi desenvolvido com base na dissertação acima mencionada.

2. O GEOGEBRA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Nesta seção discutimos como o Geogebra vem auxiliando professores na tarefa de abordar os conteúdos de Matemática de forma mais acessível e dinâmica.

2.1 As TDICs no processo de ensino-aprendizagem em Matemática

As Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação (TDICs), a cada dia, se tornam mais necessárias nas salas de aula. Principalmente, em uma sociedade cada vez mais conectada por intermédio de ambientes virtuais e aplicativos. Nesta perspectiva o ambiente escolar não poderia estar à parte deste processo. Logo, aliar estratégias pedagógicas



gicas coerentes, aos ambientes digitais com o uso de *softwares* especializados, podem viabilizar a ação do professor ao abordar determinados conteúdos. De acordo com o que afirmam Anjos e Silva (2018, p. 30):

As TDICs aparecem como recursos para ampliar o repertório de signos, sistemas de armazenamento, gestão e acesso à informação, impulsionando as aprendizagens. Há de se considerar que as TDICs transformaram numerosos aspectos da vida e fazem emergir novas perspectivas educativas.

Fundamentado na concepção dos teóricos, entende-se que a escola tem evoluído e muitos paradigmas vêm sendo quebrados. O espaço escolar, continuará sendo um local de conhecimentos e encontros e, as plataformas virtuais serão um apoio a mais nesse processo de ensino. Enquanto, os softwares, tendem a dinamizar e auxiliar nas construções do conhecimento, como exemplo, o software GeoGebra, que facilita as construções matemáticas. A seguir será abordado como esse software facilita as representações geométricas e algébricas nas várias áreas da matemática, tais como: geometria, funções, matrizes, trigonometria, estatística, que é o foco deste trabalho.

2.2 Software GeoGebra

O software GeoGebra é um dos recursos inovadores no estudo da matemática relacionando-a à tecnologia, trazendo ferramentas que facilitam as construções no ramo da Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística e outros. Essas ferramentas aumentam o universo da aprendizagem, pois permitem fazer uma gama de atividades, em todos os níveis educacionais, desde o fundamental até o superior.

GeoGebra é uma comunidade de milhões de utilizadores localizados em quase todos os países. Tornou-se o fornecedor líder de software de matemática dinâmica, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. O mecanismo matemático do GeoGebra alimenta centenas de sites educacionais em todo o mundo de diferentes maneiras, desde simples demonstrações até sistemas completos de avaliação on-line (Geogebra.org, 2024).

O GeoGebra nasceu de um projeto, em 2001, ou seja, seu idealizador e criador, *Markus Hohenwarter*, o defendeu como dissertação de mestrado, na universidade de *Salzburg*. Desde sua criação, o GeoGebra vem inovando e avançando suas representações e ferramentas, tanto geométricas quanto algébricas, tendo ganhado diversos prêmios no mundo inteiro.

Basta fazer uma pesquisa rápida na plataforma Google Scholar ou no portal de periódicos da CAPES para constatar que nos últimos 15 anos, o número de trabalhos tratando do uso do GeoGebra no ensino dos mais variados temas de Matemática na Educação Básica vem crescendo significativamente. Isso evidencia a eficácia dessa ferramenta que auxilia o professor na tarefa de tornar mais clara, dinâmica e atraente os conteúdos ensinados em sala de aula.

Uma vantagem do GeoGebra é sua gratuidade, ou seja, estar disponível no mundo digital e pode ser baixado para os recursos computacionais dessa e das futuras gerações, em forma de aplicativos. O software GeoGebra pode ser executado: em computadores, é possível fazer o *download* no site www.geogebra.org/download; em *smartphones*, pode-se baixá-lo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho; ou pode-se acessá-lo *online* no site <https://www.geogebra.org/classic>.

3. EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E A BNCC

Segundo Batanero e Godino (2005, p. 01), as estatísticas estão incluídas nos currículos escolares não apenas por sua natureza instrumental, mas também o desenvolvimento do raciocínio estatístico tem valor em uma sociedade caracterizada pela disponibilidade de informação e necessidades de tomada de decisão em um ambiente incerto. Assim, a educação estatística proporcionada pelas escolas está em ascensão, permitindo aos alunos não só compreender, mas também participar na sociedade da informação.

Os conteúdos de Estatística foram inseridos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental nas publicações dos anos de 1997 e 1998 (Brasil, 1997, 1998) e no currículo do Ensino Médio, nosso foco de estudo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCNEM, nos anos de 2002 e 2006. De modo geral, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM, orientam que a Matemática do Ensino Médio deve possibilitar aos alunos o conhecimento de dados atuais e indispensáveis, a fim de que seja possível uma aprendizagem gradual e contínua (Brasil, 2002). Em outras palavras, os PCNEM apontam a relevância de a escola preparar o aluno para um aprendizado permanente.

Essas propostas curriculares foram reavaliadas para a elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo a BNCC (Brasil, 2017), os conceitos estatísticos fazem parte do tópico Estatística e Probabilidade, compondo assim uma das cinco unidades temáticas da Matemática a serem desenvolvidas nos segmentos da Escola Básica, percorrendo todos os níveis do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Atualmente a Estatística constitui parte importante do currículo da disciplina de Matemática do Ensino Médio. A BNCC estabelece que,

Ao final do segundo ano, os alunos devem saber, por exemplo, como coletar, classificar e representar dados em tabelas simples e gráficos de colunas, além de classificar eventos cotidianos em poucos ou muito prováveis, improváveis e impossíveis (Brasil, 2017).

Podemos notar que os conteúdos envolvendo estatística vêm ganhando espaço nos currículos da Educação Básica. Desse modo, investigar as maneiras de abordar esses conteúdos para estabelecer uma relação entre estes e os aparatos tecnológicos que nos rodeiam e com as mais variadas fontes de informações disponíveis, é de extrema importância no processo educacional.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa apresenta um enfoque qualitativo e quantitativo, com a aplicação simultânea desses dois tipos de abordagens para interpretação e análises do objeto de estudo. Com relação à abordagem quantitativa, utilizou-se porcentagem para aferir o nível de aceitação e satisfação por parte dos alunos no que se refere a proposta pedagógica aplicada. No que concerne à abordagem qualitativa, seguindo o que orienta Gil (2008) procurou-se observar, analisar e, interpretar os fatos ou fenômenos (variáveis), sem interferir neles ou os manipular. Conforme destaca o autor: “Este tipo de pesquisa tem como objetivo fundamental a descrição das características de determinada população ou fenômeno” (Gil, 2008, p. 42). Neste enfoque procurou-se analisar o comportamento dos alunos e suas respostas aos questionários aplicados, a fim de entender as contribuições do uso do aplicativo no interesse pelas aulas, na motivação e na colaboração que os alunos desenvolveram durante as atividades.



4.1 Etapas da pesquisa

Requisitou-se a assinatura da carta de anuência pelo gestor e diretor da escola e enviou-se aos pais o termo de consentimento de livre e esclarecido, através do qual se solicitou a permissão deles para colher informações relacionadas aos alunos, em observância da menoridade dos estudantes.

Em seguida, realizou-se um teste diagnóstico em sala de aula com perguntas relacionadas aos conteúdos de estatística descritiva que seriam abordados no decorrer do projeto. Aplicou-se também um questionário antes do início do minicurso e da apresentação do software GeoGebra com o intuito de identificar o nível de familiaridade dos alunos com as ferramentas tecnológicas em questão. O questionário continha perguntas como: *Você possui celular, smartphone ou tablet? Você tem acesso à internet? Você já usou algum aplicativo para desenvolver conteúdos de Matemática em sala de aula? Quando os professores utilizam o computador, smartphone ou tablet como ferramenta pedagógica na rotina de suas aulas nessa escola?*

Após diagnosticar as dificuldades e necessidades dos alunos em relação aos conceitos estatísticos desenvolveu-se, com as turmas do 1º ano em análise, algumas aulas envolvendo conceitos estatísticos fundamentais, além de construções de tabelas, gráficos e cálculos de medidas de tendência central de forma interativa, usando como base o livro didático: *Prisma Matemática* (Bonjorno; Giovanni Junior; Sousa, 2020). Foram utilizadas também algumas questões das provas do Exame Nacional do Ensino Médio e um recurso não tão convencional ao ensino de matemática em sala de aula: o *smartphone*.

No segundo momento, apresentou-se o software GeoGebra aos alunos, destacando suas principais ferramentas, características e funções. E, mediante a apresentação do projeto em sala de aula para os alunos, solicitou-se que baixassem o software em seus celulares. Posteriormente, foram desenvolvidas, na forma de tutorial, atividades de familiarização de modo a facilitar a compreensão dos princípios básicos de funcionamento do software.

As quatro primeiras aulas, que foram presenciais, tiveram duração de 1 h/a cada encontro e nas quatro últimas, que foram on-line, tiveram duração de 3 h/a cada encontro.

No último dia do minicurso, aplicou-se um questionário a fim de verificar a receptividade que as atividades propostas tiveram, além de verificar se o uso do software influenciou positivamente no processo de ensino aprendizagem em relação aos conteúdos de Estatística Descritiva na percepção dos alunos envolvidos.

É importante mencionar que neste período, as turmas estavam reduzidas pela metade e alternadas semanalmente devido às restrições ocasionadas pela pandemia do coronavírus e, por isso, foi trabalhado com apenas um grupo de cada série do 1º ano, que tinham um número de 20 alunos por turma. Sendo que 32 estudantes participaram integralmente de todas as etapas da pesquisa.

4.2 Sobre o teste diagnóstico usado para aferição do conhecimento estatístico

Para aferir o conhecimento estatístico dos alunos de forma objetiva, foi realizado um teste composto de 06 questões elaboradas com os assuntos básicos do tema estatística. Além do uso para este trabalho, o teste serviu como avaliação parcial para obtenção de nota para o período escolar, assim como a participação durante o processo. Segue a descrição dos conteúdos envolvidos no teste:

- Questão 01: Conceito Básico de Estatística- média;
- Questão 02: Conceito Básico de Estatística- frequência;
- Questão 03: Média Aritmética Simples, Moda e Mediana;
- Questão 04: Média Aritmética Simples, Frequências Absoluta e Relativa;
- Questão 05 e 06: Análise de Gráficos.

5. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A realização das atividades se deu em dois ambientes. Além da sala de aula, onde se usou o quadro branco, telefones celulares, data show e outros acessórios, trabalhou-se também através da plataforma Google Meet, utilizando-se computadores e dispositivos móveis para as reuniões e execução de tarefas. Nos dois espaços, foram desenvolvidas cinco atividades com os alunos, sendo que as questões utilizadas nas aplicações das atividades foram elaboradas com dados aleatórios e dados dos próprios alunos que participaram da pesquisa.

Os discentes aprenderam, por exemplo, a fazer uma distribuição de frequência para dados agrupados por valor e por intervalos de classe, construir gráficos estatísticos e calcular medidas de tendência central, familiarizando-se com o aplicativo e o conhecimento matemático.

As atividades seguintes consistem em analisar e simular as notas bimestrais de 30 alunos de uma turma onde essas notas são números inteiros de 1 até 10. Apesar de ser muito indicado que trabalhem com dados reais, neste caso, vamos indicar dados aleatórios para poder através das funcionalidades do aplicativo gerar diferentes volumes de dados, diferentes comportamentos e potencializar, assim, as discussões.

A sequência das atividades realizadas pelos alunos usando o software GeoGebra juntamente com os seus respectivos objetivos e execução estão descritos a seguir.

5.1. Atividade 1

A primeira atividade refere-se ao conceito de frequência. Foi perguntado aos alunos o que cada um deles entendiam por frequência. Em seguida foi usado o aplicativo para o entendimento do conceito e os passos usados estão descritos a seguir:

1º passo: Para a realização desta atividade foi solicitado que os alunos abrissem o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra e selecionassem em ‘ferramentas básicas’, o item ‘controle deslizante’ e, depois, clicarem na janela gráfica e colocassem os dados. O mínimo 1 e o máximo de 30 já que a questão trata da nota de 30 alunos de uma turma. No campo ‘passo’, coloca-se o número 1, o que irá gerar somente valores inteiros. A Figura 5.2 abaixo, ilustra o processo:



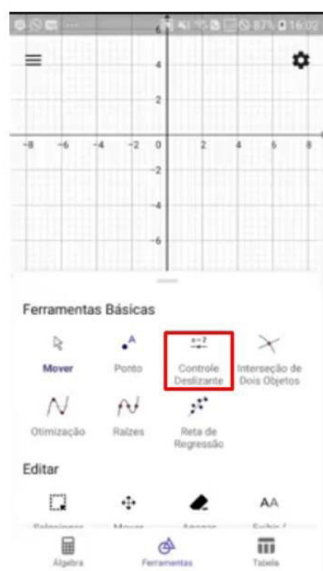


Figura 5.1 – Seleção do controle deslizante. Fonte: Próprio autor.

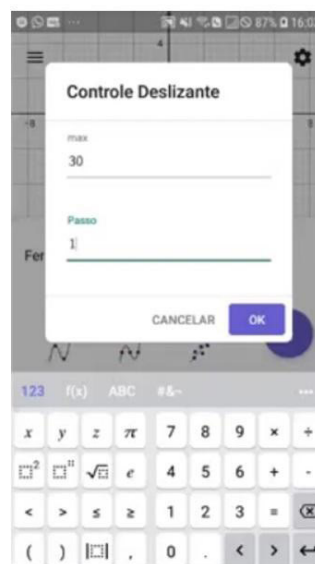


Figura 5.2 – Inserindo os dados controle deslizante. Fonte: Próprio autor.

2º passo: Selecionar a janela de álgebra e clicar na linha de entrada. Depois clique nos 3 pontinhos à direita para selecionar os comandos (ver Figuras 5.3 e 5.4)

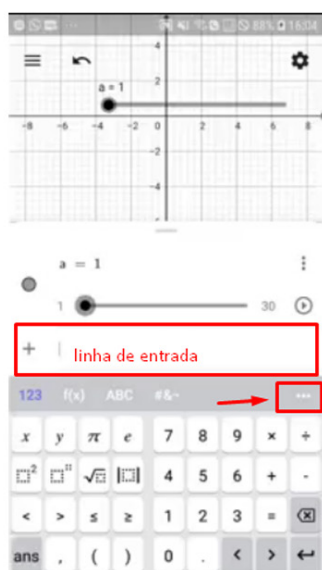


Figura 5.3 – Linha de entrada e seleção dos comandos. Fonte: Próprio autor.

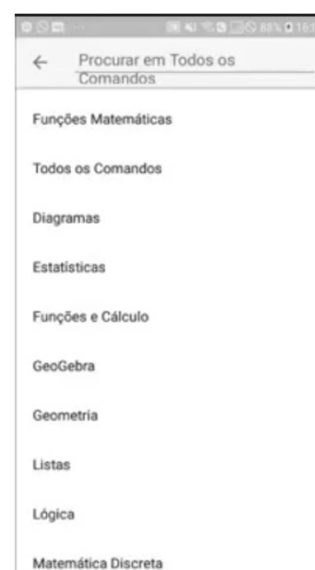


Figura 5.4 – Linha de comandos. Fonte: Próprio autor.

3º passo: Selecionar o comando sequência. Depois dentro do parêntese do comando sequência pressione o ponteiro e clique novamente nos 3 pontinhos à direita para selecionar o comando número aleatório, ou seja, digite: + Sequência (Número Aleatório (0,10), n,1,a) seguida da tecla Enter, ver Figuras 5.3 e 5.4. Note que ao movimentar o controle deslizante tanto aluno quanto professor vai gerar diferentes sequências numéricas e, nesse momento, podemos trabalhar com a relação do conceito de frequência. E, nesse sentido, foi perguntado aos alunos o que eles entendiam por frequência.

Após a observação dos dados, cada estudante escreveu o que entendia por frequência em uma folha de papel. As Figuras 5.5 e 5.6 mostram alguns desses relatos:

É: Entendo por frequência a repetição contínua de um elemento ex: Juliana vai com frequência ao centro da cidade

Figura 5.5 – O que você entende por frequência? (Estudante 9).
Fonte: Acervo pessoal.

É uma grandeza que indica número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo.

Figura 5.6 – O que você entende por frequência? (Estudante 14).
Fonte: Acervo pessoal.

5.2. Atividade 2

Esta atividade refere-se a distribuição de frequência para dados agrupados por valor. O objetivo é que os alunos identifiquem a distribuição de frequência dos dados de forma imediata e dinâmica através do aplicativo. A construção da tabela de distribuição de frequência utiliza os dados notas bimestrais de 30 alunos e os passos usados no aplicativo estão descritos a seguir:

1º passo: Repita os procedimentos dos passos utilizados na atividade 1.

2º passo: Clicar na linha de entrada e nos 3 pontos para abrir os comandos. Feito isso, digite na linha de comandos o nome tabela de frequências. Agora dentro do parêntese do comando selecionado digite o nome da lista com os dados, ou seja, l1 seguida da tecla Enter. Veja que a tabela com a frequência das notas aparecerá ao lado conforme mostra a Figura 5.7.



Figura 5.7 – Tabela de frequência.
Fonte: Próprio autor.

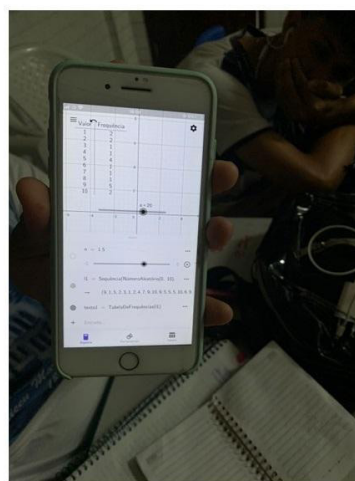


Figura 5.8 – Tabela de frequência feita por um aluno.
Fonte: Acervo pessoal.

Observe, ainda, que ao mover o controle deslizante a sua tabela muda e, assim, poderá fazer diferentes simulações com as notas dos alunos. Além de discutir com os seus alunos a frequência da ocorrência de determinadas notas.

5.3. Atividade 3

A terceira atividade refere-se à construção de gráficos de pontos e barras. O resultado pretendido nesta tarefa é que os alunos, através dos seus aparelhos, visualizem a compilação dos dados em forma dos gráficos, e a partir disso interpretem e tirem conclusões sobre os dados. Para isso, utilizou-se os dados envolvendo notas bimestrais de 30 alunos. Os passos usados no aplicativo estão descritos a seguir:

Construção do gráfico de pontos:

1º passo: Repita os procedimentos dos passos utilizados na atividade 2.

2º passo: Clicar na linha de entrada e selecionar o comando diagrama de pontos, ver Figura 5.9. E depois dentro do parêntese do comando digite 11 seguida da tecla 'Enter'. Para melhor visualização e manipulação gráfica, você pode colocar o celular na horizontal, além de poder, posicionar tanto a tabela quanto o diagrama de pontos.

A figura 5.10 abaixo ilustra os passos acima:

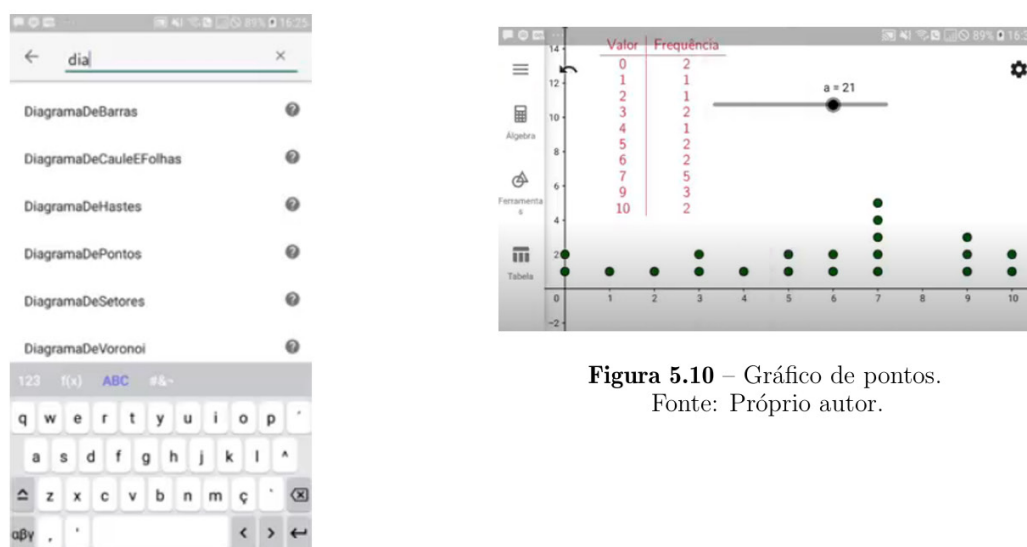


Figura 5.10 – Gráfico de pontos.
Fonte: Próprio autor.

Figura 5.9 – Comando diagrama.
Fonte: Próprio autor.

Nesse momento, apresentaram-se outras possibilidades para que os alunos pudessem fazer discussões, gerando e simulando diferentes situações com relação à quantidade de estudantes e as suas respectivas notas. Perguntaram-se onde os alunos percebem mais elementos e se a turma estava indo bem ou não em relação à média escolar. E por quê? Como podemos observar na Figura 5.10, por exemplo, assumindo que a média escolar é 6, temos 12 alunos com nota dentro da média escolar e 9 alunos com nota abaixo dela.

Posteriormente, pediu-se que os alunos usassem suas próprias notas e fizessem um diagnóstico do desempenho do conjunto dos alunos do minicurso em comparação com a média escolar, aula os mesmos perceberam e diagnosticaram se a turma está indo bem ou mal nas notas em relação à média escolar. E fazendo a simulação gráfica e tabular dos dados com os alunos em sala de aula, os mesmos perceberam e diagnosticaram se a turma está indo bem ou mal nas notas em relação à média escolar.

A Figura 5.11 abaixo ilustra a construção do gráfico de pontos executado por um aluno em seu aparelho celular.

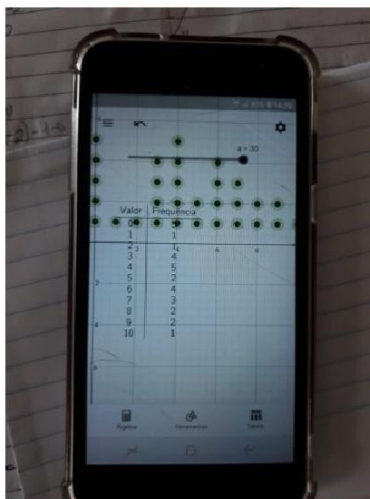


Figura 5.11 – Gráfico de pontos feito por um aluno em sala de aula.
Fonte: Acervo pessoal.

Construção do gráfico de barras:

1º passo: Repita os procedimentos dos passos utilizados na atividade 2.

2º passo: Clicar na linha de entrada e selecionar o comando diagrama de barras, ver Figura 5.9. Dentro do parêntese do comando digite 11 e 0.5 para definir a largura das barras seguida da tecla Enter, ver Figura 5.12 abaixo.

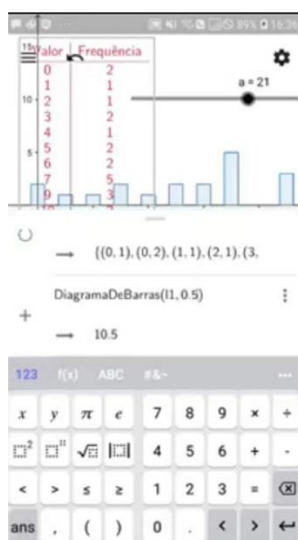


Figura 5.12 – Gráfico de barras.
Fonte: Próprio autor.

5.4. Atividade 4

No início desta atividade perguntou-se aos alunos o que eles entendiam por média, mediana e moda. E alguns dos relatos estão descritos a seguir:

Para o cálculo da média aritmética, moda e mediana basta selecionar o comando correspondente e digitar 11 dentro do parêntese do comando selecionado seguido da tecla Enter.

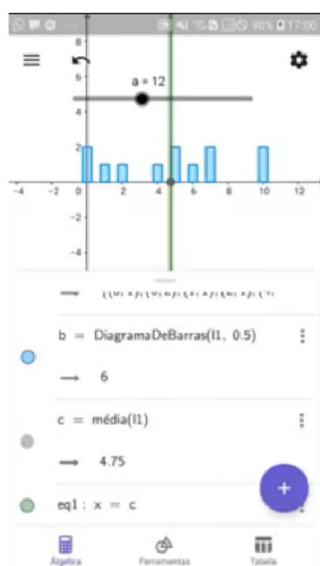


Figura 5.16 – Média aritmética.
Fonte: Próprio autor

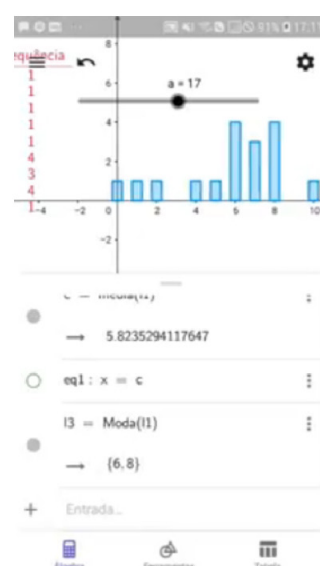


Figura 5.17 – Moda.
Fonte: Próprio autor

Após os relatos dos alunos sobre o que entendiam por média, foi apresentado como se calculava a média aritmética no aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra usando o comando `media`. Vale ressaltar, ainda, que antes de usar o comando `media` é interessante mostrar aos alunos que a média aritmética é obtida pela soma das notas e dividida pela quantidade de dados. Para isso, podemos utilizar o comando `soma` e inserir dentro do parêntese `l1` e clicar ‘Enter’ e após dividir pela quantidade de dados correspondentes. Outra sugestão é trabalhar com as notas bimestrais dos alunos e mostrar como é realizado o cálculo de suas médias.

Durante a realização dessa atividade pouquíssimos alunos tinham o conhecimento do que era moda e mediana. Já com relação à média, muitos alunos tinham noção desta medida. Com relação à mediana foi trabalhado e simulado para valores com quantidade de dados pares e ímpares onde o aluno verificou que a mediana tem a função de mostrar onde e que está o valor que divide o nosso conjunto numérico em duas partes iguais.

5.5. Aplicação de questionário

Ao finalizar o minicurso solicitou-se que os estudantes respondessem um segundo questionário, no qual se avaliou a execução e o desenvolvimento das atividades. No primeiro questionamento foi solicitado que os estudantes classificassem a oficina como: muito boa, boa, regular ou ruim. Em seguida, pediu-se aos estudantes que respondessem o seguinte questionamento: O que mais lhe chamou atenção ao usar o GeoGebra? Você aprendeu algo novo?

E por fim, questionou-se aos estudantes se eles acreditavam que a utilização do GeoGebra como recurso complementar às aulas tradicionais de Matemática tornou o conteúdo mais atrativo e compreensível.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em resposta ao questionário 1, cerca de 96% dos alunos afirmaram possuir aparelho celular, e 100% deles disseram possuir acesso à internet. Quando questionados se já usa-

ram aplicativos em sala de aula para desenvolver conteúdos de matemática, 89,5% responderam que não e 10,5% disseram que sim. O que mostra que, mesmo tendo acesso às ferramentas para a utilização de softwares, eles ainda são pouco utilizados tanto pelos alunos quanto por professores em suas aulas.

No que se refere ao GeoGebra especificamente, nenhum dos estudantes participantes conhecia o *software*. O que reforçou a necessidade durante o minicurso de serem exploradas atividades de familiarização.

E quando perguntado se acreditavam que o uso de softwares ou aplicativos pode ajudá-los a aprender conteúdos de Matemática, 87,5% responderam que sim, enquanto 12,5% disseram que não acreditam.

Abaixo segue algumas das respostas a esta última pergunta:

Estudante 1: *Creio que quanto mais ferramentas usarmos melhor vai ser o nosso aprendizado.*

Estudante 3: *Eu acredito, pelo fato de simplificar o conteúdo. Desenvolvendo o estudo de uma forma mais clara.*

Estudante 9: *Tecnologia pode ser empregada para melhorar efetivamente o aprendizado dos alunos e o dia a dia dos professores.*

Estudante 27: *Porque pode ser uma forma mais simples de aprender matemática.*

Estudante 28: *Pois é uma nova maneira de aprender a matemática, de uma forma mais didática.*

Estudante 31: *Facilita o estudo.*

O que evidenciou uma predisposição dos estudantes a incluir as ferramentas citadas no processo de abordagem dos conteúdos e realização das tarefas. Criando um ambiente propício para a implementação da estratégia pedagógica proposta.

Como resultado do questionário aplicado ao final das atividades, com relação à primeira pergunta, a totalidade dos discentes participantes avaliaram como positiva a sua interação com o aplicativo como forma de trabalhar os conteúdos, sendo que 57,1% dos estudantes classificou sua experiência no minicurso como muito boa e 42,9% classificou como boa. Com relação à segunda pergunta, passamos a transcrever algumas das respostas dos estudantes:

Estudante 3: *Sim, pois fica mais fácil de compreender.*

Estudante 6: *O fato de ser um programa bem completo, ajuda muito nos cálculos matemáticos.*

Estudante 7: *Sim, a construção dos gráficos.*

Estudante 11: *Os gráficos, aprendi a mexer com esses tipos de software.*

Estudante 21: *A colaboração do processo de aprendizagem entre os alunos.*

Estudante 25: *E ter uma maior facilidade para resolver as questões e as atividades.*

Estudante 32: *Me proporcionou maior praticidade na resolução das atividades, além de facilitar na compreensão do estímulo à criatividade e ao desenvolvimento lógico.*



Com relação à última pergunta, 100% dos alunos responderam de forma afirmativa, que a utilização do GeoGebra contribuiu de forma positiva no seu aproveitamento durante o minicurso.

Pode-se depreender dos dados acima que houve uma boa aceitação com relação à metodologia utilizada na abordagem dos conteúdos de estatística em questão. A totalidade dos alunos avaliou como positiva sua experiência com o uso do *smartphone* e aplicativo GeoGebra. Do ponto de vista da percepção dos alunos, a totalidade dos participantes avaliou que a metodologia de ensino adotada contribuiu de forma significativa para o aprendizado do conteúdo. Alguns pontos positivos percebidos pelos estudantes como contribuição da estratégia pedagógica pautada no uso do aplicativo, foi uma maior dinamização na realização das tarefas, conforme depoimento dos estudantes, que classificaram o aplicativo como sendo de fácil manuseio. Outro ponto a se destacar foi o da colaboração entre os estudantes na hora de realizar as tarefas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procurou-se, nesta pesquisa, analisar a utilização do Geogebra como ferramenta motivadora e facilitadora nas aulas de estatísticas para alunos do 1º ano do Ensino Médio. De acordo com as observações feitas, já foi possível notar de início, uma mudança de postura dos educandos diante da possibilidade do manuseio de um aplicativo para ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática. Mesmo que os alunos não estivessem inicialmente interessados em conhecimentos matemáticos, foi-se observando uma evolução no decorrer do trabalho, já que tais conhecimentos eram necessários para que a ferramenta em suas mãos tivesse um uso adequado. Compreender a Estatística junto com os saberes inerentes a ela foi de suma importância para um bom desenvolvimento das atividades.

Em geral, observou-se uma facilidade dos alunos ao manusear o aplicativo GeoGebra. Acredita-se que tal facilidade ocorre pelo fato de muitos deles usarem o celular no dia a dia para comunicação e até mesmo para o lazer, como o uso para jogos.

Quanto ao desempenho nas tarefas realizadas, foi possível verificar a eficácia da utilização do GeoGebra como ferramenta facilitadora e motivadora no processo de ensino-aprendizagem da Estatística com relação à turma em questão. De fato, os objetivos propostos foram alcançados, pois pode-se constatar que a utilização do GeoGebra facilitou a compreensão dos conteúdos.

Em conclusão, a análise dos resultados obtidos nesta pesquisa, evidencia que a utilização do *software* GeoGebra no estudo de Estatística contribuiu significativamente na motivação e aprendizagem dos alunos, possibilitando-os participar de forma ativa e colaborativa na construção dos saberes estatísticos. No entanto, é importante destacar que as estratégias e práticas a serem adotadas devem ser avaliadas e estudadas, a fim de se construir as metodologias de ensino, de acordo com as necessidades educacionais e sociais de cada grupo.

REFERÊNCIAS

ABREU, I. C. **GeoGebra: recurso** facilitador e motivador no processo ensino-aprendizagem para o estudo da Estatística no Ensino Médio.: PROFMAT Dissertações, 2022. Disponível em: <https://profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=Israel&titulo=&polo=>. Acesso em: 05/2024.

ANJOS, S; SILVA, G. E. G. **Tecnologias digitais da informação e da comunicação (TDICs) na educação**. Cuia-

bá: Universidade Federal de Mato Grosso, Secretaria de Tecnologia Educacional, 2018.

BATANERO, C.; GODINO, R. Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. *In*: BRANCO, L. (Org.). Líneas de **investigación en Didáctica de las Matemáticas**. Universidade de Extremadura. Extremadura. 2005. Disponível em: www.researchgate.net/publication/275097566_Perspectivas_de_la_educacion_estadistica_como_area_de_investigacion.

BONJORNO, J. R.; CÂMARA, P. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Prisma matemático**: estatística, combinatória e probabilidade. São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

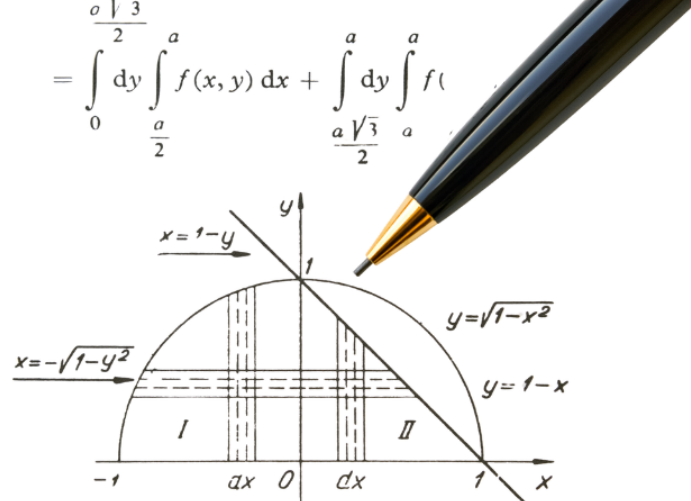
BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/fundamental>.

GEOGEBRA.ORG. **GEOGEBRA**, © 2024. O que é o GeoGebra? Disponível em www.geogebra.org/about?lang=pt-PT.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MOURA, A. Aprendizagem Móvel e ferramentas digitais para inovar em sala de aula. *In*: SOUZA, K. P. et al. (org.). **Jornadas Virtuais**: Vivências práticas das tecnologias educativas. Secretaria de Educação do Estado do Ceará. Fortaleza: Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia, 2016. p.75-94. Disponível em: www.academia.edu/34696942/Jornadas_Virtuais_Viv%C3%AAs_e_Pr%C3%AAticas_das_Tecnologias_Educativas?auto=download.





4

TRANSLAÇÃO E REFLEXÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA EM DISPOSITIVOS MÓVEIS

TRANSLATION AND REFLECTION OF THE GRAPH OF THE QUADRATIC FUNCTION USING GEOGEBRA ON MOBILE DEVICES

Priscila Marques Lopes Abitibol¹
Sandra Imaculada Moreira Neto²
Geilson Mendes dos Reis¹

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

² Doutora, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de um estudo que teve como objetivo investigar as contribuições do aplicativo GeoGebra em dispositivos móveis para o processo de compreensão do conteúdo gráfico de funções quadráticas em uma turma do primeiro ano do ensino médio da escola pública Centro de Ensino Professor Robson Campos Martins do município de Paço do Lumiar – MA, com o objetivo de verificar se existe um maior aprendizado com o uso desse *software*. Com uma metodologia de pesquisa-ação e método de caráter quali-quantitativa, os dados foram coletados e analisados. Ao final da pesquisa, os alunos opinaram que o uso do *software* GeoGebra no *smartphone* facilitou bastante a compreensão do estudo do gráfico da função quadrática, indicando que seu uso teve um impacto positivo no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Função quadrática; Recursos tecnológicos; GeoGebra; Dispositivos móveis.

ABSTRACT

This paper presents the results of a study whose objective was to investigate the contributions of the GeoGebra application on mobile devices to the process of understanding the graphical content of quadratic functions in a first year high school class at the Centro de Ensino Professor Robson Campos Martins, in Paço do Lumiar - MA, with the aim of verifying if there is a greater learning outcome with the use of this software. Using a research-action methodology and a qualitative-quantitative method, data were collected and analysed. At the end of the research, students indicated that the use of the GeoGebra app on their smartphones greatly facilitated their understanding of the study of quadratic function graphs, suggesting that its use had a positive impact on the teaching-learning process.

Keywords: Quadratic function; Technology Resources; GeoGebra; Mobile devices



1. INTRODUÇÃO

A Matemática permeia todas as esferas da vida, sendo essencial para resolver desde situações simples até as mais complexas. A aplicação do conhecimento matemático na solução de problemas reais confere significado ao processo de ensino-aprendizagem. Assim, é crucial que todo conteúdo ensinado tenha uma finalidade prática, voltada para a resolução de problemas de diversas naturezas e áreas.

Na atualidade, onde a tecnologia está em todos os lugares, sua incorporação no ensino não é apenas uma escolha, mas uma necessidade urgente. Isso ocorre devido à situação dos alunos imersos numa era digital, caracterizada por mudanças rápidas e comunicação instantânea. Entre as diversas ferramentas tecnológicas utilizadas diariamente na escola, o celular se destaca, e quando usado de forma orientada pelo professor, pode oferecer grandes benefícios para melhorar o aprendizado da Matemática.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda, não apenas nas habilidades específicas do componente, o uso tanto de objetos concretos e situações do cotidiano que possam identificar significado, como de recursos tecnológicos. Conforme Brasil (2017, p. 276):

Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados às situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

Nesse contexto, uma investigação foi conduzida com o propósito de avaliar se o uso do software GeoGebra contribui para a compreensão do estudo da função quadrática, incluindo sua construção, leitura e interpretação de gráficos. Os resultados dessa pesquisa evidenciaram que a utilização do GeoGebra efetivamente melhorou a compreensão e a percepção dos alunos sobre a função quadrática.

2. USO DA TECNOLOGIA EM SALA DE AULA

2.1 A tecnologia e o ensino da matemática

Não é de hoje que o ensino de Matemática é motivo de discussões no meio acadêmico, a motivação para essas discussões é gerada pelos vários problemas que a disciplina apresenta em todas as fases de ensino, em especial na Educação Básica: o modo como é apresentada pelo professor, de forma tradicional e sem nenhum atrativo e a falta de motivação pelos discentes por terem um pensamento enraizado de que a Matemática é difícil de aprender e descontextualizada da realidade.

Segundo D'Ambrósio (2005) a sociedade passa por grandes transformações, com grandes reflexos na educação e corroborando essa discussão, professores e pesquisadores em Educação Matemática vêm trabalhando com a perspectiva de mudar esse quadro, ou de pelo menos, contribuir com essa mudança. Nesse contexto, como suporte às aulas de Matemática para tornar a aprendizagem mais dinâmica, se insere o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC) como instrumentos pedagógicos.

O uso das tecnologias como recurso didático nas aulas de Matemática leva os alunos a aprenderem o conteúdo de uma forma dinâmica e investigativa, estimula-os na busca de respostas, na criação de métodos próprios, promovendo criatividade e desenvolvendo habilidades para a obtenção do conhecimento matemático.

Ressalta-se, entretanto, a importância do professor de Matemática saber fazer uso desses recursos tecnológicos e estar preparado para realizar um planejamento eficiente para aplicá-los em suas aulas, evitando o risco de serem meros elementos de distração e ocupação. De acordo com Borba e Penteado (2003, p. 64-65): “(...) À medida que a tecnologia informática se desenvolve, nos deparamos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada”.

É importante ressaltar que a presença desses instrumentos tecnológicos nas aulas de Matemática não substitui o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem, eles atuam apenas como ferramentas de apoio didático.

2.2 O uso de dispositivos móveis nas aulas como instrumento pedagógico

Os dispositivos móveis, mais especificamente os celulares, já se tornaram indispensáveis no cotidiano das pessoas e são cada vez mais necessários para as mais diversas tarefas, desde acessar dados de contas bancárias a compartilhar textos, imagens e vídeos através de aplicativos de mensagens como o *WhatsApp*. Este cenário não poderia ser diferente no ambiente escolar onde a maioria dos alunos possuem ou têm acesso a um *smartphone*. Bairral, Assis e Silva (2015, p. 21), pontuam que:

As tecnologias digitais móveis vêm ganhando cada vez mais espaço na vida dos indivíduos. São celulares com *touchscreen*, notebooks, *tablets* e *ipads* que também passam a fazer parte do cotidiano da maioria dos nossos alunos.

Apesar dos dispositivos móveis estarem presentes no cotidiano escolar, seu uso em sala de aula é bastante polêmico, discutido e pesquisado à exaustão, tanto que foi até tema abordado pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura, em sua publicação anual que traça um panorama da educação no mundo. Em Relatório de Monitoramento Global da Educação intitulado “A tecnologia na educação: uma ferramenta a serviço de quem?”, publicado em 23 de julho de 2023, a organização afirma que o uso do celular em sala de aula causa impactos negativos na aprendizagem e concentração dos estudantes atrapalhando a gestão dos professores com as turmas.

Diante disso, percebemos que utilizar dispositivos móveis como recurso pedagógico na sala de aula exige do professor um planejamento bem elaborado, com estratégias que não permitam aos alunos o desvio do foco ou a dispersão.

Quando utilizados para fins pedagógicos, com objetivos específicos e bem definidos, os celulares são capazes de promover a interação e auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, é o que aponta Oliveira *et al.* (2012, p. 408) que afirma:

Porém, para ser positiva, a adoção desta tecnologia deve possuir a adaptação dos professores e alunos, uma vez que nenhum recurso garante o aprendizado, mas pode auxiliar na construção do conhecimento, formando cidadãos reflexivos, dinâmicos, críticos e capazes de construir o seu próprio conhecimento através de experiências e vivências.



Considerando que muitas escolas não dispõem de laboratório de informática ou estes estão desatualizados, é preciso que novas estratégias sejam pensadas. Então os dispositivos móveis como *tablets* e *smartphones* podem vir a ser uma possibilidade, já que esses aparelhos além da simples função de telefone, podem assumir o papel de um computador móvel.

Portanto, ao utilizar o dispositivo móvel, os discentes podem fazer da própria sala de aula um laboratório, estendendo-o para suas casas, dando maior autonomia e significado no processo de ensino aprendizagem, em particular, da Matemática.

2.3 O uso do GeoGebra no estudo do gráfico da função quadrática

Dos vários conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio, Função é um dos que mais possui relação prática com as situações vivenciadas pelos alunos. O conceito de funções é amplamente utilizado, pois não se restringe apenas à Matemática, mas também a outras áreas como Física, Química e Biologia.

Os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a OCEM (Orientações Curriculares para o Ensino Médio), no que se referem ao ensino de funções, orientam que seja feita uma abordagem a partir do cotidiano dos alunos, buscando sempre relacionar com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998; BRASIL, 2006).

O conteúdo de função quadrática é de extrema importância para o currículo escolar de um estudante do ensino médio devido sua grande capacidade de utilização interdisciplinar e também por sua aplicação nas mais diversas situações do cotidiano: cálculo do lançamento de projéteis, estimativa do ângulo da antena parabólica, otimização de áreas, dentre outras.

No primeiro ano do Ensino Médio é perceptível a dificuldade dos discentes em compreenderem o conteúdo de função quadrática, principalmente no que se refere à construção de gráficos, talvez pelo fato de estarem saindo de um ensino fundamental fragilizado ou de não haver nenhuma estratégia dos docentes em fugir de um ensino com práticas puramente tradicionais que não permitem ao aluno visualizar dinamicamente o que acontece com o gráfico quando fazemos mudanças de parâmetros na função. De acordo com Andrade e Brandão (2019, p. 26):

O que se percebe, de um modo geral, é que o estudo das funções quadráticas vem acontecendo de modo artificial, limitando-se a construção de tabelas e gráficos, com pouca interpretação do comportamento da curva que representa o gráfico dessa função e sem muito significado para o aluno.

Sendo assim, uma alternativa que contribuirá para sanar as dificuldades do processo ensino-aprendizagem da função quadrática, especificamente no ensino do comportamento do gráfico, pode ser a utilização de recursos tecnológicos.

O *software* GeoGebra é uma excelente ferramenta para potencializar o entendimento do gráfico da função quadrática, pois permite ao aluno visualizar as representações algébrica e Geométrica da função, possibilitando a análise de seu gráfico quando os parâmetros da função se alteram gerando movimentos de rotações e translações. Silva (2015, p.197) afirma que:

O *software* GeoGebra, muito usado em geometria dinâmica, é uma ferramenta atraente e facilitadora no ensino de funções quadráticas. Com ele o apren-

dizado se torna mais interessante e faz com que os educandos compreendam significativamente o conteúdo.

O *software* GeoGebra tem se apresentado uma excelente ferramenta no processo ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, sobretudo no estudo das funções quadráticas. As construções geométricas feitas com a utilização do *software* são dinâmicas e interativas e melhoram a compreensão dos estudantes para as transformações gráficas que ocorrem com a função quadrática.

2.4. Algumas noções básicas sobre a função quadrática

A função quadrática pode ser usada para modelar diversos fenômenos, cujo movimento descrito no gráfico seja uma parábola. Segundo Balestri (2016, p. 88), Galileu Galilei (1564 - 1642), astrônomo e matemático italiano, foi o pioneiro na percepção de que no lançamento oblíquo de um objeto, desconsiderando a resistência do ar, o movimento por ele realizado se assemelha a uma parábola.

Apresentaremos aqui alguns conceitos importantes do estudo da Função Quadrática segundo Bonjorno (2020), Lima (2012) e Okada (2013). Um estudo mais aprofundado dessa função pode ser encontrado nessas referências. Todos os gráficos representados foram construídos utilizando o *software* Matemático GeoGebra.

Definição da função quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando são dados números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lima (2012, p. 104) nos atenta para o fato de que os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume, isto é, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c', \forall x \in \mathbb{R}$, então $a = a', b = b' \text{ e } c = c'$.

Esta observação permite que se identifique uma função quadrática com um polinômio do segundo grau, consequentemente podemos fazer um abuso de notação e chamar uma função quadrática de função polinomial do segundo grau.

Gráfico da função quadrática

O gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma curva chamada parábola; essa curva pode ser definida da seguinte forma: dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a *parábola de foco F e diretriz d* é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d . A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se *eixo da parábola*. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se *vértice* dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a reta diretriz d . A Figura 01 apresenta o exemplo do gráfico de uma função quadrática, uma parábola.



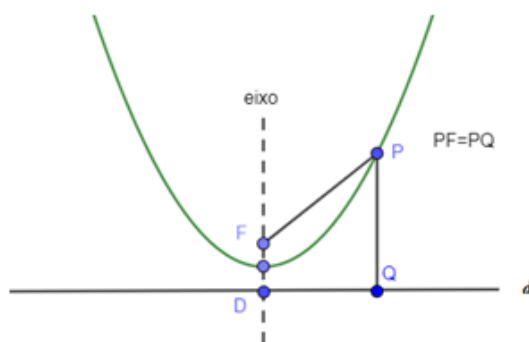


Figura 1. Parábola de foco F e diretriz d

Fonte: Autoria própria

O coeficiente a da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ fornece informações a respeito da concavidade da parábola que representa o gráfico de f . Se $a > 0$, a parábola terá sua concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, a parábola terá sua concavidade voltada para baixo. O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo Oy em seu ramo crescente ou decrescente. Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo Oy em seu ramo crescente, se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo Oy no vértice e se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo Oy em seu ramo decrescente. O coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo Oy.

Transformações no gráfico da parábola

Translação vertical

Sejam a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e k um número real. A translação vertical $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$ transforma o gráfico definido pela função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ no gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (ax^2 + bx + c) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.1 Na Figura 02, estão representados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ (cor verde), da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 + 2$ (cor vermelha), e da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2 - 2$ (cor azul).

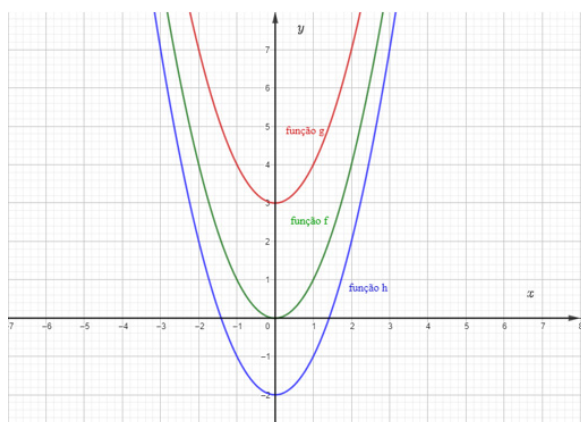


Figura 2. Translação vertical

Fonte: Autoria própria

Translação horizontal

Sejam a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, e k um número real. A translação horizontal $(x, y) \rightarrow (x + k, y)$ transforma o gráfico da função f no gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = a(x - k)^2 + b(x - k) + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.2 Na Figura 03, estão representados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ (cor lilás), da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x - 2)^2$ (cor verde) e da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (x + 2)^2$ (cor vermelha).

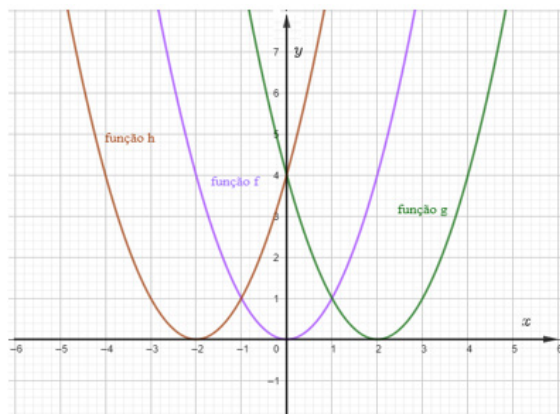


Figura 3. Translação horizontal

Fonte: Autoria própria

Observamos que a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$ (cor lilás), o gráfico da função $g(x) = (x - 2)^2$ (cor verde) sofre uma translação horizontal para “direita” de duas unidades e a função $h(x) = (x + 2)^2$ (cor vermelha) sofre uma translação horizontal para “esquerda” de duas unidades.

Reflexão em torno do Eixo Ox

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. A reflexão em torno do eixo Ox transforma o gráfico definido pela função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ no gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -(ax^2 + bx + c)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.3 Na Figura 04, estão representados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2$.

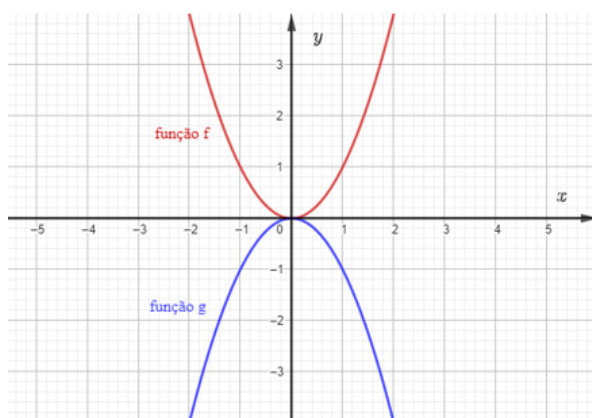


Figura 4. Reflexão em torno do eixo Ox

Fonte: Autoria própria

Observamos que o gráfico da função $g(x) = -x^2$ (cor azul) em relação ao gráfico da função $f(x) = x^2$ (cor vermelha) faz uma reflexão em torno do eixo Ox. Para efeito de ilus-

tração, note que os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ pertencentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ são refletidos para o outro lado do eixo Ox , respectivamente, nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,-1)$ do gráfico de $g(x) = -x^2$. O mesmo vale para os outros pontos das funções.

Reflexão em Torno do Eixo Oy

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. A reflexão em torno do eixo Oy transforma o gráfico definido pela função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ no gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = a(-x)^2 + b(-x) + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.4 Na Figura 05, estão representados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x - 2$ (cor verde) e da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (-x)^2 - (-x) - 2$ (cor vermelha).

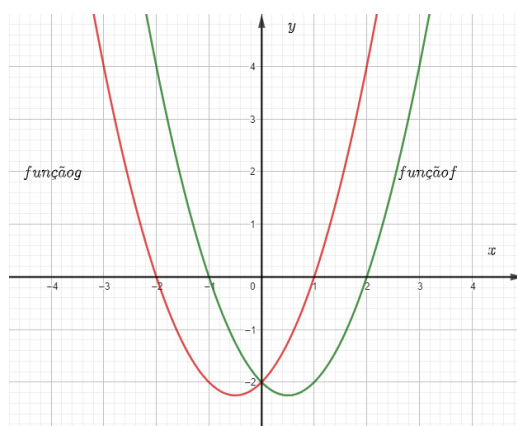


Figura 5. Reflexão em torno do eixo Oy

Fonte: Autoria própria

Observamos que o gráfico da função $g(x) = (-x)^2 - (-x) - 2$ (cor vermelha) em relação ao gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 2$ (cor verde) faz uma reflexão em torno do eixo Oy . Para efeito de ilustração, desenvolvendo $g(x)$, obtemos:

$$g(x) = f(-x) = (-x)^2 - (-x) - 2 = x^2 + x - 2.$$

As raízes de g são $x = -2$ e $x = 1$, que são os opostos das raízes de f . O mesmo vale para os outros pontos da função.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa possui uma abordagem quali-quantitativa, isto é, a aplicação simultânea das abordagens qualitativa e quantitativa para interpretação e análise do objeto de estudo, pois em um primeiro momento fizemos uma análise quantitativa dos dados por meio de questionário e depois uma análise mais subjetiva qualificando-os.

Quanto à natureza, trata-se de uma pesquisa aplicada com ênfase na prática e resolução de problemas, pois tem o objetivo de gerar conhecimentos de aplicação prática para os problemas específicos. Para Gil (2010, p.32), a pesquisa aplicada “abrange estudos elaborados com a finalidade de resolver problemas no âmbito das sociedades em que os pesquisadores vivem”.

Quanto aos meios é uma pesquisa-ação, pois há a associação entre a teoria e a ação, onde a pesquisadora participa diretamente da pesquisa, intervindo no fenômeno estuda-

do e modificando-o.

Quanto aos objetivos, trata-se de uma pesquisa descritiva, pois objetiva levantar opiniões, comportamentos e condições de vida de uma população, entre outros. De acordo com Vergara (2000, p. 47), a pesquisa descritiva expõe as características de determinada população ou fenômeno, estabelece correlações entre variáveis e define sua natureza.

A pesquisa foi feita na escola pública estadual Centro de Ensino Professor Robson Campos Martins localizada no município de Paço do Lumiar – MA, em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio do turno matutino com um total de 46 alunos.

A coleta de dados se deu por meio de uma intervenção pedagógica constituída por dois questionários semiestruturados, aplicados em dois momentos: no início do estudo e no final de sua realização. O questionário diagnóstico (contou com oito perguntas: seis objetivas e duas subjetivas, e o questionário avaliativo, contou com quatro perguntas: todas subjetivas.

3.1 Etapas da Pesquisa

Inicialmente, solicitou-se a autorização da gestora da escola por meio de ofício e enviou-se aos pais o termo de consentimento livre e esclarecido, através do qual foi solicitada a permissão deles para a coleta de informações relacionadas aos alunos, visto que os mesmos são menores de idade.

Num segundo momento foram ministradas oito aulas expositivas tradicionais. Nessas aulas foram abordados os conteúdos: definição de função quadrática com a construção de gráficos, estabelecendo a relação entre seus coeficientes e o comportamento gráfico, transformações gráficas de translações horizontal e vertical, reflexões horizontal e vertical, eixo de simetria da parábola, zeros e vértice da função quadrática, crescimento, decréscimo, imagem da função quadrática e análise de seu valor máximo ou mínimo na resolução de situações-problema.

Num terceiro momento, foi aplicado o questionário diagnóstico em sala de aula com perguntas relacionadas ao acesso à internet pelos alunos, o uso do celular para fins pedagógicos e o uso de softwares nas aulas de Matemática.

E em seguida foi feita a apresentação do software GeoGebra aos alunos, destacando suas principais ferramentas, características e funções. Após a apresentação em sala de aula, solicitou-se que baixassem o *software* em seus celulares, uma vez que ele é livre e gratuito para download.

Num quarto momento foram realizadas seis atividades sobre funções quadráticas que tiveram duração de quatorze aulas de 50 minutos cada. Os alunos trabalharam em duplas para a realização das atividades, conscientes da importância de ter entre eles um comprometimento tanto com os colegas como com os exercícios propostos.

E, finalmente, após as aulas, foi aplicado o questionário avaliativo para avaliar o nível de compreensão dos alunos, verificar a receptividade das atividades utilizando o aplicativo GeoGebra no celular e analisar se o uso do software influenciou positivamente no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de função quadrática.



4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Questionário diagnóstico

O objetivo do questionário diagnóstico foi verificar se os 46 estudantes participantes da pesquisa tinham acesso à internet, se usavam o celular para fins pedagógicos e investigar se durante a vida estudantil, considerando até o nono ano do ensino fundamental, eles tiveram algum contato com os recursos tecnológicos na escola e de que modo esses recursos foram utilizados.

Ao serem questionados sobre o acesso à internet em casa e qual aparelho mais utilizado para fazer esse acesso na maior parte do tempo, 100% afirmaram que utilizam o serviço de internet em casa e também que o aparelho mais utilizado é o *smartphone*.

Sobre a compreensão dos conteúdos matemáticos, dezenove alunos afirmaram sentir dificuldade na aprendizagem matemática, vinte e três afirmaram sentir dificuldade parcialmente e apenas dois disseram não apresentar dificuldades, como mostra o Gráfico 01.

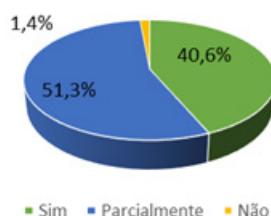


Gráfico 1. Você sente dificuldade na aprendizagem dos conteúdos matemáticos?

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ao serem questionados sobre a utilização do computador ou dispositivo móvel pelo professor de Matemática como ferramenta dinâmica de ensino, a grande maioria, 44 alunos, afirmaram que em nenhum momento de sua vida estudantil, até o nono ano, nenhum professor utilizou desses aparelhos eletrônicos em sala de aula com a proposta de melhorar o processo ensino-aprendizagem de Matemática.

Esse resultado comprova que a tecnologia para o ensino de matemática não está sendo aproveitada de maneira eficiente, uma vez que os alunos têm acesso a ela pelo celular, mas, em sala de aula, não é usada com o propósito educacional.

4.2 Atividades Propostas

4.2.1 Atividade 01 (Translação vertical utilizando o papel milimetrado)

Essa atividade não utiliza os recursos do GeoGebra, pois o objetivo era verificar as dificuldades de compreensão enfrentadas por eles. Posteriormente, a mesma seria resolvida com o auxílio do *software*. A atividade abordava translações verticais e pedia que os alunos desenhasssem os gráficos de algumas funções quadráticas no papel milimetrado e indicassem o que perceberam. Os discentes apresentaram um pouco de dificuldade na realização das contas para esboçar o gráfico e, embora já tivessem conhecimento sobre o assunto, apenas 15% responderam à pergunta de forma satisfatória, enquanto 75% não responderam da forma esperada. Percebe-se ainda, que os erros ocorreram possivelmente por falta de atenção pois a maioria dos gráficos apresentados por eles estavam desenhados corretamente.

4.2.2 Atividade 02 (Variação dos coeficientes da função quadrática utilizando o GeoGebra)

Na atividade 02 foi solicitado aos alunos que inserissem a função quadrática geral no aplicativo GeoGebra e respondessem o que acontecia quando deixavam dois de seus parâmetros fixos e faziam um terceiro variar utilizando o botão “controle deslizante” e também o que acontecia quando o coeficiente “a” era fixado em zero.

Os estudantes apresentaram um pouco de dificuldades ao inserirem a função quadrática geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ na janela algébrica, pelo fato de terem de fazer mudança entre os teclados do aplicativo, então foi feita uma intervenção mínima para que eles pudessem trabalhar de forma autônoma e compartilhar suas ideias; porém mostraram bastante facilidade em manusear o controle deslizante para visualizarem o movimento do gráfico com as mudanças de parâmetros na janela geométrica.

No item (a), todos os alunos responderam da forma esperada, todos conseguiram relacionar o sinal do coeficiente “a” com a concavidade da parábola e também conseguiram perceber que quando “a” se anula, a parábola torna-se uma reta, isto é, a função quadrática torna-se uma função afim. Isso possivelmente deve-se à dinamicidade que o aplicativo proporciona na visualização das curvas na janela geométrica. A Figura 6 apresenta a resposta fornecida por uma das duplas, a qual reflete essencialmente a resposta dada pela maioria da turma.

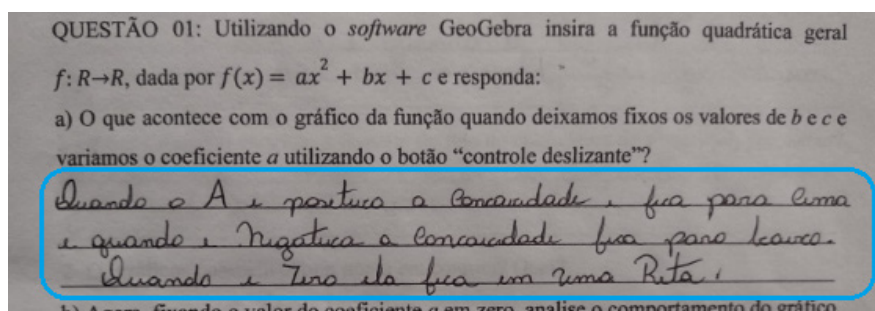


Figura 6. Resolução da atividade 02 pela dupla D15

Fonte: Acervo pessoal

O item (c) solicitava aos alunos a percepção deles em relação à variação do parâmetro “b” e o comportamento do gráfico, a maioria conseguiu observar que a variação do coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo Oy em seu ramo crescente ou decrescente.

No item (d) nota-se que muito mais alunos, além dos que já haviam tido essa percepção na Atividade 01 de translação vertical, perceberam a movimentação vertical do gráfico de acordo com a variação do parâmetro “c”. Isso evidencia a eficácia do uso do aplicativo, pois os alunos conseguiram visualizar de forma dinâmica como o gráfico da função quadrática se movimentou ao se modificarem os parâmetros.

4.2.3 Atividade 03 (Translação vertical utilizando o GeoGebra)

Na Atividade 03 foi proposto aos alunos que respondessem às questões da Atividade 01, agora com o auxílio do GeoGebra, isto é, que eles inserissem as funções na janela algébrica do aplicativo, observassem seus gráficos na janela geométrica e indicassem o que perceberam. Foi notório a melhora do desempenho dos discentes ao fazerem a resolução da atividade com a ajuda do GeoGebra, comparada à atividade 01, onde foi utilizado apenas o papel milimetrado. Aqui, o percentual de alunos que respondeu à pergunta

de forma satisfatória subiu de 15% para 89,1%, enquanto que o percentual de discentes que não responderam da forma esperada, que eram 75%, caiu para 10,9%. Esses resultados mostraram a eficiência e eficácia da utilização do *software* GeoGebra em potencializar a aprendizagem do conteúdo “gráfico da função quadrática”, aqui, mais especificamente, o movimento de translação vertical.

4.2.4 Atividade 04 (Translação horizontal utilizando o GeoGebra)

A Atividade 04 abordava translações horizontais e pedia aos alunos que inserissem algumas funções quadráticas no aplicativo GeoGebra e comentassem o que era possível concluir comparando os gráficos. Todos os discentes conseguiram perceber que os gráficos, a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, sofrem uma movimentação horizontal para a direita quando adicionamos um valor negativo ao seu argumento e, da mesma forma, sofre uma movimentação horizontal para a esquerda quando adicionamos um valor positivo a seu argumento. Aqui, para minha surpresa, alguns ainda conseguiram identificar que o valor em que os gráficos tocam o eixo Oy é o quadrado do termo independente da função desenvolvida e que as funções possuem dois zeros reais iguais. Constatar que, nessa atividade com o auxílio do GeoGebra, 100% dos alunos conseguiram compreender o conceito de translação horizontal é muito satisfatório para a pesquisa.

Para validação da atividade, veja na figura 7 o registro fotográfico da resolução de uma das duplas participantes da pesquisa.

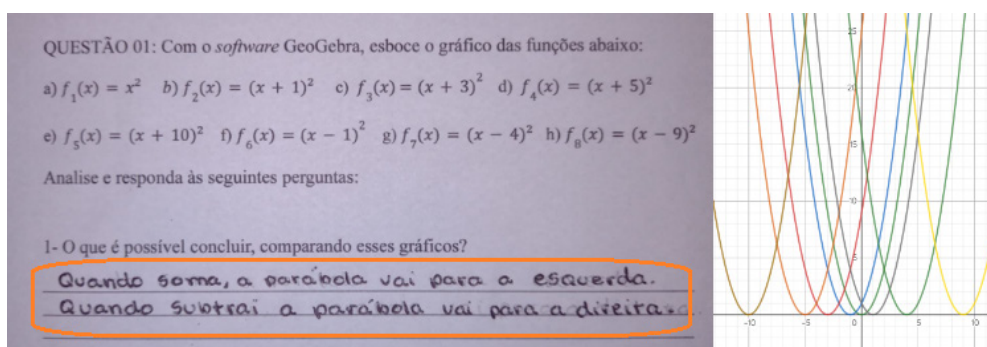


Figura 7. Resolução da atividade 2 pela dupla D30

Fonte: Acervo pessoal

4.2.5 Atividade 05 (Reflexão em torno dos eixos Ox e Oy utilizando o GeoGebra)

A questão 01 abordava o conteúdo de reflexão em torno do eixo Ox . Nesta situação eles chegaram às conclusões que satisfazem as expectativas, conseguiram perceber que o gráfico da função $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo Ox do gráfico de sua oposta $-f(x)$, isto é, que um é reflexo do outro. Aqui, mais uma vez os discentes conseguiram relacionar o sinal do coeficiente “ a ” com a concavidade da parábola e, para minha surpresa, alguns até conseguiram captar que quanto mais o coeficiente “ a ” cresce ou diminui, mais a parábola se aproxima do eixo Ox .

Veja na figura 8 a resposta dada pela dupla D09, juntamente com a captura de tela feita pelos alunos para a questão.

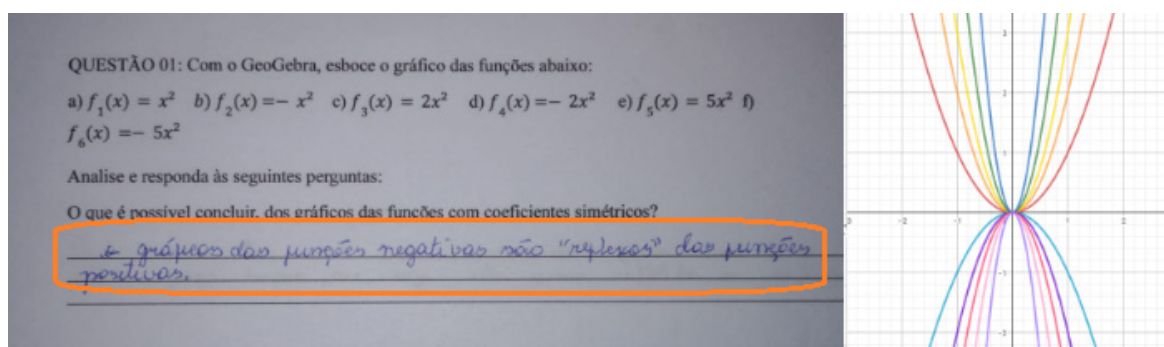


Figura 8. Resolução da atividade 05 pela dupla D09

Fonte: Acervo pessoal

A questão 02 abordava o conceito de reflexão em torno do eixo Oy. Nesta situação, alguns alunos, inicialmente, se mostraram um pouco confusos, isso se deu, possivelmente, pela atividade conter apenas uma função para a mudança de argumento. Uma intervenção foi feita, realizando a manipulação de mais funções que não estão na questão, daí a maioria teve uma percepção satisfatória e alguns até lembraram exatamente da nomenclatura dada à transformação gráfica.

4.3 Questionário avaliativo

Ao final da pesquisa foi solicitado que os alunos respondessem a outro questionário, que avaliou a execução das atividades. Inicialmente foi perguntado aos alunos se eles acreditavam que a utilização do *software* GeoGebra, utilizado como recurso complementar às aulas tradicionais de Matemática, tornaria os conteúdos mais atrativos e compreensíveis. De forma unânime, os estudantes afirmaram que sim, reconheceram a importância do aplicativo como uma ferramenta que auxilia no aprendizado dos conteúdos matemáticos.

A questão três, a título de comparação, tinha o intuito de comprovar o que já havia sido coletado no primeiro questionário, na questão oito, quando se perguntou como os discentes avaliavam a utilização dos dispositivos móveis (*smartphones*, *tablets* etc.) em sala de aula como ferramenta de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Os resultados são mostrados abaixo no Gráfico 02.

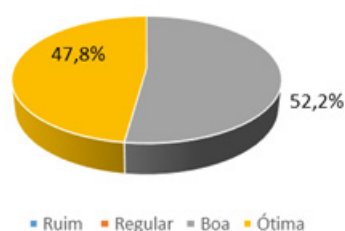


Gráfico 02. Como você analisa a ideia de utilizar dispositivos móveis em sala de aula como ferramenta de aprendizagem dos conteúdos matemáticos?

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nos primeiros resultados, antes da realização do estudo que inseriu a tecnologia com o aplicativo GeoGebra, os dados se mostraram distribuídos entre as opiniões ruim, regular, boa e ótima. Após ter passado pela experiência de usar o *software* GeoGebra no *smartphone* nas aulas, nenhum aluno permaneceu com a ideia de que utilizar dispositivos móveis em salas de aula para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos era ruim ou regular,

suas opiniões mudaram para boa ou ótima.

Ao serem perguntados se o estudo do gráfico da função quadrática ficou mais compreensível com a utilização do GeoGebra, mais uma vez os estudantes foram unânimes em dizer que sim.

Percebe-se de maneira geral, baseado nos depoimentos dos alunos, que o GeoGebra potencializou o entendimento do estudo do gráfico da função quadrática, pois permitiu ao discente visualizar as representações algébrica e Geométrica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do atual cenário em que a educação brasileira se encontra, observamos alunos desmotivados e descontentes por não conseguirem relacionar teoria e prática e professores insatisfeitos com as várias dificuldades encontradas no exercício da profissão, a realização da pesquisa mostrou que a integração entre o método de aulas tradicionais e o uso de tecnologias, proporciona ao aluno um aprendizado mais atrativo e efetivo.

Utilizar o celular como meio de aprendizagem, permitiu o acesso de todos os alunos ao aplicativo GeoGebra, pois a maioria dos estudantes possuem celular e utilizar esses aparelhos os permitiu fazer da própria sala um laboratório, estendendo-o para suas casas.

Utilizar o *software* GeoGebra no estudo foi de grande relevância, pois permitiu aos alunos maior manipulação e observação dos conceitos matemáticos. A precisão dos gráficos, a rapidez em suas construções e a visualização dinâmica e interativa das construções gráficas possibilitou uma maior percepção acerca dos conteúdos

Após verificar as respostas dadas às atividades desenvolvidas, comprovou-se que GeoGebra ampliou o conhecimento dos alunos acerca do conteúdo de função quadrática, em especial das construções e transformações gráficas. Foi possível observar o bom desempenho dos discentes ao responderem as questões sobre translações e reflexões do gráfico, a maioria respondeu de forma satisfatória às atividades.

Após a analisar as respostas dadas pelos alunos aos questionários, observou-se que todos eles concordam que o GeoGebra para dispositivos móveis é um potencial ferramenta para melhorar o entendimento dos conceitos matemáticos e acreditam na sua utilização como recurso complementar às aulas a fim de tornar os conteúdos mais atrativos e compreensíveis.

O GeoGebra mostrou-se ainda um instrumento de inclusão e democratização do ensino, pois foi possível perceber a evolução no aprendizado de um aluno surdo participante da pesquisa. O mesmo relatou que com o uso do *software* sentiu-se parte do processo de ensino-aprendizagem e conseguiu um entendimento mais amplo sobre o conteúdo estudado, uma vez que o aplicativo explorou sua competência mais desenvolvida, o visual espacial.

Referências

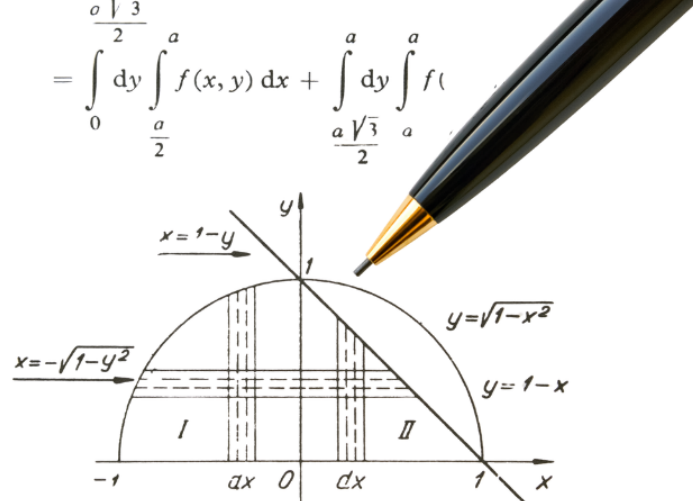
ANDRADE, Wendel Melo; BRANDÃO, Jorge Carvalho. **O estudo das funções quadráticas com a mediação do software GeoGebra**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2019.

BAIRRAL, Marcelo; ASSIS, Alexandre; SILVA, Bárbara Caroline de. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Ed. da UFRRJ, 2015.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia**. São Paulo: Leya, 2016.

- BONJORNO, José Roberto. **Prisma matemática**: conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2017.
- BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**. Educação e Pesquisa, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- OKADA, Satiro. **Explorando gráficos das funções elementares por meio do software GeoGebra**. 2013. 72 f.. Dissertação (PROFMAT) - UESC, Ilhéus, BA, 2013.
- OLIVEIRA, J. B. et al. **O uso de tablets e o geogebra como ferramentas auxiliaadoras no ensino da matemática**. In: Conferencia Latino americana de GeoGebra, 2012, Montivideo. Anais eletrônicos... Montivideo: 2012. Disponível em: < <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/66.pdf> >. Acesso em: 27 mar. 2014.
- SILVA, Cleber. **Modelagem, cálculo e GeoGebra**: uma nova proposta de ensino para funções quadráticas. 2015. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.
- VERGARA, Sylvia Constant. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. 3.ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2000.





5

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DOS NÚMEROS E SUAS PROPRIEDADES

A HISTORICAL APPROACH TO NUMBERS AND THEIR PROPERTIES

Cléssio da Silva Araújo¹

Roberto Batista dos Santos²

Sílvia Cleide Piquiá¹

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, São Luís - Maranhão

² Doutor, Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, São Luís - Maranhão

RESUMO

O trabalho é um recorte da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), que visa discordar sobre a história dos números ainda desconhecidos para o aprendizado dos estudantes do Ensino Médio. Esta pesquisa apresenta a evolução histórica dos números, sua origem e as alterações sofridas ao longo dos séculos, com o intuito de mostrar o mundo dos números e os padrões e propriedades que os envolvem. A pesquisa foi bibliográfica respaldada em autores como Stewart (1996), Ifrah (1989;1997), Eves (2004), entre outros. O resultado foi a demonstração de conceitos, padrões e propriedades intrínsecas de como se estruturam números simples e complexos.

Palavras-chave: História dos números. Contagem. Sistema de numeração.

ABSTRACT

The work is an excerpt from the Professional Master's thesis in Mathematics (PROFMAT), which aims to discuss the history of numbers that is still unknown to the learning of high school students. This research presents the historical evolution of numbers, their origin and the changes they have undergone over the centuries, with the aim of showing the world of numbers and the patterns and properties that surround them. The research was bibliographic based on authors such as Stewart (1996), Ifrah (1989;1997), Eves (2004), among others. The result was the demonstration of concepts, patterns and intrinsic properties of how simple and complex numbers are structured.

Keywords: History of numbers. Score. Numbering system



1. INTRODUÇÃO

A Matemática está presente nas diversas atividades humanas e áreas do conhecimento tendo como elo principal os números. É por meio do raciocínio matemático que o homem consegue classificar, estabelecer padrões e resolver problemas simples e enigmáticos. A prática da contagem e a evolução dos números possuem propriedades e proporcionam incontáveis maneiras de representá-los.

Este trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa bibliográfica, em que se fez um levantamento dos principais autores que relacionam a história da Matemática com as propriedades dos números. Tem como objetivo geral servir como base de estudo e pesquisa para professores de Matemática para formação docente e diminuição da aflição de estudantes para o aprendizado da disciplina. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2006) afirmam que a história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem da disciplina, ao revelar a matemática como uma condição humana, mostrando suas aplicações e evolução em diferentes culturas e momentos históricos.

Essa pesquisa foi relevante devido a importância de se trabalhar didaticamente os conceitos matemáticos para aproximar os estudantes do Ensino Médio para o aprendizado escolar mostrando a relação da evolução da história dos números com suas próprias vidas.

2. EVOLUÇÃO DA CONTAGEM E DA BASE NUMÉRICA

O conceito de número surgiu a partir da necessidade humana de sistematizar a relação de contagem e os objetos de diferentes conjuntos. A partir da contagem criou-se o número natural que tinha um símbolo desenvolvido por civilizações com linguagem escrita. Entretanto, já houve um momento em que o homem não sabia contar, ou seja, desprovido de qualquer tipo de noção abstrata de número.

[...] O homem das épocas mais remotas desta história devia também ser incapaz de conceber os números em si mesmos. E suas possibilidades numéricas deviam, do mesmo modo, resumir-se numa apreciação global do espaço ocupado pelos seres e pelos objetos vizinhos. Nosso ancestral remoto devia no máximo poder estabelecer uma nítida diferença entre a unidade, o par e a pluralidade (Ifrah, 1989, p.16-17).

Apesar da ausência do significado de número, os seres humanos, mesmo nas épocas mais remotas, tinham algum tipo de senso numérico. As pessoas sabiam reconhecer mais e menos, ou seja, quando se acrescentava ou retirava elementos de um determinado conjunto.

A história milenar dos números mostra a necessidade do homem em quantificar as coisas, isto é, mensurar a quantidade de elementos de um conjunto através de números. E para quantificar é necessário saber contar. O que significa contar objetos? Contar objetos significa atribuir a cada um desses elementos um símbolo que corresponde a um número que está associado a uma sequência, começando com a unidade e prosseguindo até o encerramento dos elementos.

Frege (*apud* Stewart, 2015, p.27) referiu-se ao fato de que a noção de número independe de qualquer forma de representação simbólica, mas, na verdade, constitui-se de uma correspondência entre dois conjuntos. Como exemplo, temos uma fila com 50 pessoas. Se tiver a necessidade de contar o número de pessoas dessa fila, procede-se atribuindo o “número 1” à primeira pessoa da fila, e assim por diante, até que o número 50 seja atribuído à última pessoa da fila. Nota-se que a enumeração conduzirá ao resultado 50, ou seja, a qualquer pessoa da fila poderia ser atribuído o “número 1”, desde que se esgotarem todos os elementos do conjunto.

A questão do conceito de número, que de início parecia elementar, agora se torna algo sofisticado. Essa noção abrange dois aspectos complementares: o número cardinal e o número ordinal. Como exemplo, podemos utilizar o mês de junho. Esse mês tem 30 dias. O número 30 representa a quantidade de dias que esse mês tem. Nesse caso é um número cardinal. Por outro lado, se considerarmos a expressão “dia 30 de junho”, o número 30 não está sendo empregado no aspecto cardinal. Ele designa uma ordenação: o trigésimo dia do mês de junho. Ou seja, ele especifica a posição desse elemento (o último da sucessão dos dias desse mês). Trata-se então de um número ordinal.

Aprendemos de forma tão natural a passar do número cardinal para o ordinal que não conseguimos distinguir esses dois aspectos. Quando aprendemos o conceito de número cardinal não precisamos mais recorrer a outro conjunto para equiparar seus elementos: simplesmente o contamos. No entanto, o conceito de contagem está associado ao de sucessão, que é a essência do número ordinal. Isso nos mostra que os sistemas de numeração estão intimamente relacionados a esses aspectos: o de correspondência e o de sucessão. Isto é, o princípio da correspondência deu sentido à prática da contagem. De acordo com Ifrah (1989, p. 25):

Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata.

É muito provável que a arte de contar tenha surgido através desse conceito que hoje denominamos de relação biunívoca (relação entre dois conjuntos de forma que cada elemento do primeiro conjunto esteja em correspondência única com outro elemento do segundo conjunto). A propriedade de equiparação entre os dois conjuntos retira a distinção que existe entre os dois conjuntos mencionados, em razão da natureza de seus respectivos elementos. A correspondência um a um, exercida tem um importante papel na enumeração de elementos de um determinado conjunto. Esse método de correspondência não apenas possibilita a comparação de conjuntos distintos, mas também oferece uma maneira de englobar vários números mesmo sem ter o conhecimento das quantidades envolvidas. Foi através desse método que o homem pré-histórico conseguiu praticar a aritmética mesmo sem ter a noção abstrata de número.

Graças às noções de abstração dos números e a distinção entre número cardinal e ordinal é que o homem passou a enxergar os seus instrumentos sob a ótica da contagem. Mesmo com a utilização de seus instrumentos como símbolos numéricos, o homem passou a enfrentar obstáculos ao conceber números cada vez mais extensos. Assim, o número de dedos das mãos ou das partes do corpo já não era mais suficiente para contar. O homem passou então a buscar soluções para essa necessidade: a de tentar expressar números cada vez maiores com o mínimo possível de símbolos. As bases se transformaram em preciosas ferramentas de contagem como afirma Eves (2004, p.27):



Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Isso foi feito dispondo-se os números em grupos básicos convenientes, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte pelo processo de correspondência empregado.

Existem poucas evidências sobre as bases primitivas e suspeita-se que 2, 3 e 4 foram as primeiras bases a serem utilizadas. Já o sistema de base 5 tem origem antropomórfica. A base quinária tem sua razão de existência no fato de que alguns povos passaram a contar numa única mão, agrupando os objetos por feixes de cinco.



Figura 1 e 2: Práticas primitivas de contagem

Fonte: <https://www.docsity.com/pt/escrever-mais-depressa-simplificar-a-notacao-o-passo-decisivo-in/4781489/>

Há indícios também de que o homem pré-histórico utilizava a contagem por dúzias, principalmente em relação a medidas. A utilização da base 12 certamente trouxe um sistema de numeração mais cômodo do que as 2, 3, 4 e 5, pelo fato do 12 ser divisível por 1, 2, 3, 4 e 6. Esta numeração foi muito utilizada em antigos sistemas comerciais. Os sumérios tinham o hábito de subdividir o dia em doze partes iguais, aos quais chamavam *danna*, que hoje equivalem a duas de nossas horas. Até hoje tem-se o hábito de contar banana e pães na base 12. Não é à toa que a expressão “dúzia de padeiro” ficou consagrada. A origem da base duodecimal talvez esteja fundamentada na mão. O Ifrah (1989) afirma que a base 12 é um sistema numérico em que os dedos efetuam as operações.

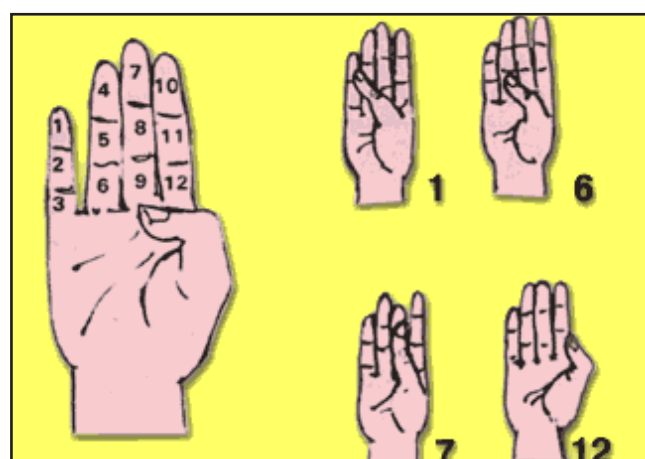


Figura 3: Retratando a contagem duodecimal

Fonte: <https://ipemsp.wordpress.com/tag/sistema-duodecimal/>

Uma hipótese curiosa é a da fusão de duas práticas de contagem: uma que utilizava a contagem por dúzias (que era muito utilizada pelos sumérios) e outra que utilizava a contagem por dezenas. Isto teria favorecido a utilização da sessentena como base principal, devido o 60 ser o mínimo múltiplo comum entre essas bases secundárias, além de ser o menor número que apresenta os seis primeiros números naturais como divisores. De qualquer maneira, essa forma de contar possibilitou outra interessante técnica com os dedos, onde o 60 aparecia como base principal e 12 e 5 como bases auxiliares. Nas palavras de Ifrah (1989,70), essa técnica era utilizada usando as duas mãos, primeiro usa-se a mão direita “apoando o polegar nas três falanges dos quatro dedos opostos da mesma mão. Ao atingir a dúzia numa mão dobra-se o mindinho esquerdo e volta-se à primeira mão e continua a contagem repetindo a técnica”.

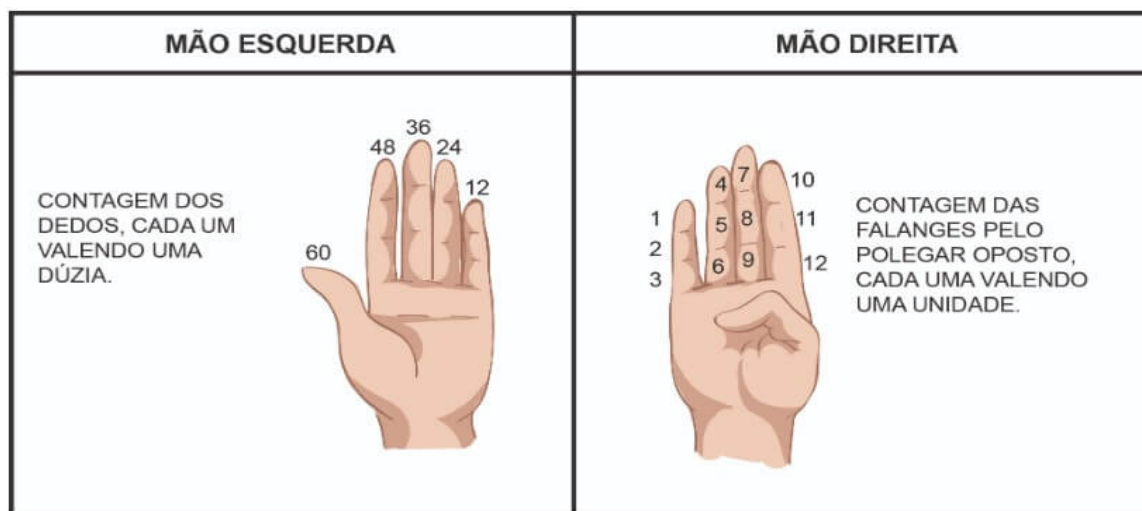


Figura 4. Retrutando a forma de contagem sexagesimal

Fonte: <https://www.coladaweb.com/matematica/sistema-sexagesimal>

A base 10 tem possivelmente origem no fato de pastores (possivelmente do Oriente médio), em épocas muito remotas, terem o costume de contar seus rebanhos empregando uma técnica que utilizava conchas e fio de lã branca. Supõe-se que o emprego da base 10 também tem raiz antropomórfica. O homem passou a agrupar objetos em grupos de 10, associando cada elemento a um dos dedos das mãos. A sua utilização tem vantagens claras, motivo pelo qual a base 10 é universalmente utilizada e adotada até os dias atuais.

Uma dessas vantagens reside no fato de que não é uma base grande, como a vigesimal e a sexagesimal, portanto, apresenta poucos símbolos para representar seus elementos. Logo, uma simples tabela de multiplicação seria de fácil memorização. Da mesma forma, a base decimal tem vantagem sobre as bases pequenas, como a binária e a quinária, pois evita uma representação extensa do numeral. Para se ter uma ideia o número 53, escrito na base 10 tem 2 algarismos. Já na base binária ele é escrito com 6 algarismos.

3. INSTRUMENTOS DE CONTAGEM

Historicamente, a mão se tornou o nosso primeiro instrumento de contagem. O método que utilizamos hoje, consiste em atribuir a cada dedo um número natural, iniciando a contagem de forma sucessiva e tendo a unidade como ponto de “partida”. Ifrah (1989, p. 80) comenta que as crianças aprendem a contar usando as mãos. Esse procedimento “consiste em atribuir um valor inteiro a cada dedo na ordem da sucessão regular dos números, começando pela unidade.” Esta técnica digital apresenta variações múltiplas em

todo o mundo, pois a atribuição numérica pode ser feita levantando sucessivamente os dedos ou baixando uns após os outros a partir de uma posição e uma ordem aberta.

Uma técnica comum até hoje na China e na Índia é a contagem usando as falanges dos dedos das mãos. Com essa técnica é possível contar de 1 a 14 em uma das mãos (e até 28 usando as duas mãos). Para isso, deve-se levar em conta que cada falange tem valor de unidade, começando a contagem em uma das mãos pela falange inferior do dedo mindinho e prosseguindo até a falange superior do polegar.

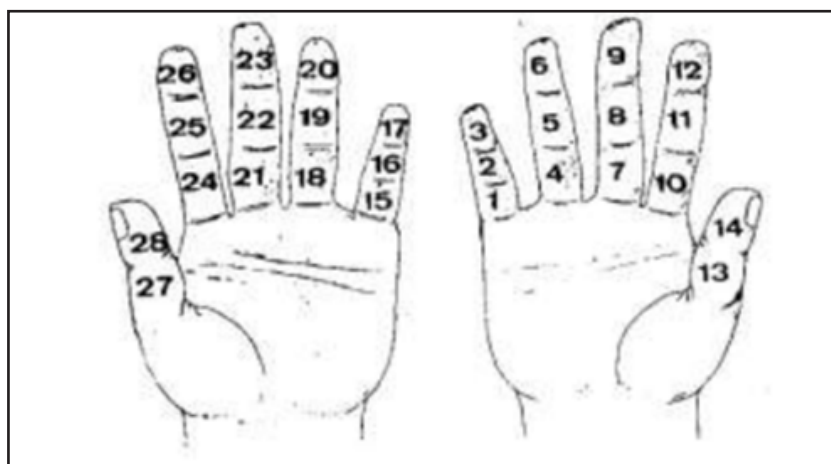


Figura 5. Técnica de contagem para os números de 1 a 28.

Fonte: Ifrah, 1989, p. 83

A mão, além de ser um importante instrumento de contagem, também pode ser utilizada para efetuar diversas operações aritméticas básicas, como a multiplicação. Há vestígios de povos antigos que efetuavam cálculos aritméticos com os dedos das mãos sem recorrer a nenhum tipo de artifício, quer seja geométrico ou algébrico.

Ifrah (1989, p.94-95) afirma que um amigo seu, como exemplo, para multiplicar 8 por 9 dobrava numa das mãos tantos dedos quantas unidades suplementares há em 8 com relação a 5 (3 dedos) e mantinha os dois outros estendidos. Em seguida, dobrava na outra mão os dedos correspondentes às unidades, suplementares de 9 em relação à 5 (4 dedos), mantendo o último estendido. A partir daí ele encontrava o resultado multiplicando inicialmente por 10 o número de dedos dobrados nas duas mãos, o que dava $(3+4) \times 10 = 70$, acrescentando em seguida este resultado parcial ao produto dos dedos levantados da primeira mão pelos dedos idênticos da outra (isto é: $2 \times 1 = 2$). Assim, ele chegava a $8 \times 9 = (3 + 4) \times 10 + (2 \times 1) = 72$.

Inúmeras foram as ferramentas desenvolvidas pelo homem no intuito de aperfeiçoar a contagem. A civilização inca usava, em seu sistema de contabilidade, um sistema interessante de cordões em nós. Esse sistema era denominado quipu (que significa “nó”). O quipu em essência era uma corda de aproximadamente 60 cm de comprimento em que eram amarrados vários fios (cordões) coloridos e postos em intervalos regulares. O quipu era um instrumento que se baseava na base decimal e tinha uma grande utilidade no sistema de contabilidade dos incas. De acordo com Ifrah (1989, p. 100) “num cordão munido de diversas marcas consecutivas, equidistantes umas das outras, as nove unidades simples eram representadas efetuando-se tantos nós quantos fossem necessários no nível da primeira marca, a partir da ponta do cordão pendente.”

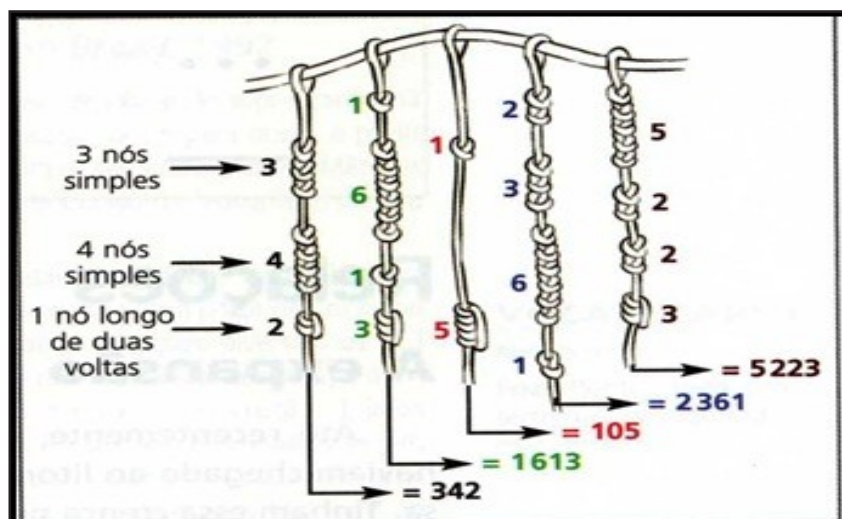


Figura 6: Representação da forma inca de contagem (quipu)

Fonte: <https://falandodematematica.weebly.com/histoacuteria-da-matemaacutetica/voc-conhece-os-quipus>

Outra técnica primitiva que permitia a memorização e representação dos números era o entalhe. Os entalhes eram divididos de modo regular, quando na verdade a prática do entalhe consistia apenas numa série contínua de traços. esse método já demonstrava um rudimentar senso aritmético. Para não ter a necessidade de contar várias vezes o conjunto de entalhes, o homem acabava por agrupá-los de cinco em cinco, provavelmente tendo como referência os cinco dedos da mão. Dessa forma, o homem estabeleceu uma notação gráfica dos primeiros números inteiros na base quinária.

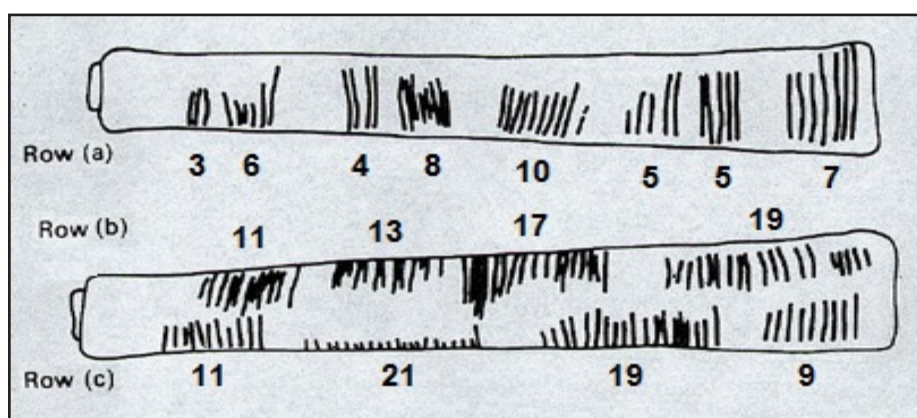


Figura 7. Representação de uma forma primitiva de contagem (entalhe).

Fonte: <https://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html>

Outro método que desempenhou um papel importante na aritmética e na contabilidade foi o uso dos “montes de pedrinhas” (ou outros objetos que pudessem ser de fácil acesso e de fácil agrupamento) é o ponto de partida de qualquer método numérico, pois não exige nenhuma memorização nem conhecimento abstrato dos números. As pedras estão intimamente relacionadas à origem dos ábacos. A palavra ábaco deriva do grego abakos, derivado da palavra abax (tábua de cálculos). Este instrumento teve origem provavelmente na Babilônia e foi de extrema importância no comércio, impulsionando o surgimento das primeiras máquinas de calcular. Historiadores acreditam que o ábaco tenha surgido das tábuas de cálculos desenvolvidas pelo homem na tentativa de criar instrumentos que possibilitaram o registro e a simplificação de contagens. Dentre os primeiros ábacos destaca-se o ábaco de bolso romano, que consistia numa placa metálica com um

determinado número de ranhuras paralelas, em que botões móveis deslizavam ao longo dessas ranhuras.

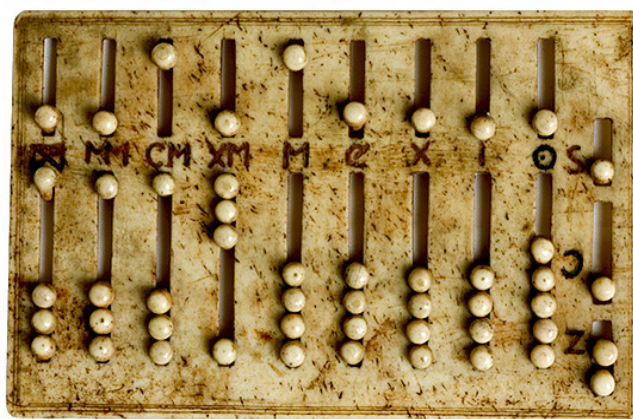


Figura 8: Representação de um ábaco romano

Fonte: <https://romapravoce.com/numeros-romanos/>

O Ábaco chinês é um poderoso instrumento de cálculo constituído, em geral, de um quadro retangular de madeira, formado por uma quantidade definida de hastes nas quais se encontram bolas móveis que podem ser aproximadas de uma vareta horizontal, que divide o quadro em duas partes. Números decimais também eram representados nessa ferramenta de cálculo. Ifrah salienta:

Em geral, os usuários do contador chinês não começam pelas duas primeiras hastes (da direita para a esquerda), reservando-as para as frações decimais de primeira e segunda ordem, isto é, para os décimos e centésimos da unidade. Neste caso, a terceira haste é destinada às unidades simples, a seguinte, às dezenas, a quinta, às centenas, e assim por diante. (Ifrah, 1989, p.126)

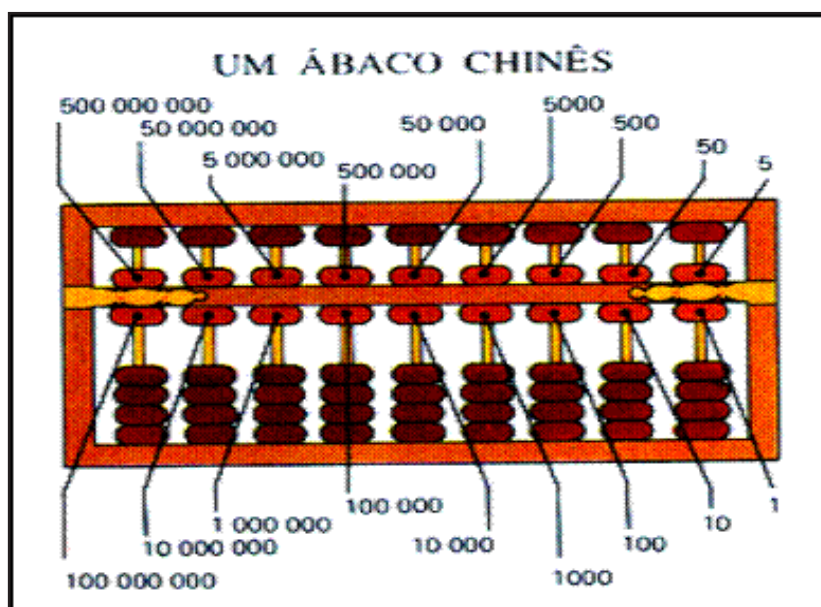


Figura 9. Ábaco chinês

Fonte: <https://www.10emmatematica.com.br/o-abaco/>

Dessa forma, para representar o número 26,57 é necessário elevar inicialmente duas bolas inferiores da haste dos centésimos e abaixar uma bola superior dessa mesma haste. Em seguida, abaixa-se uma bola superior da haste dos décimos. Depois, na haste das uni-

dades, ergue-se apenas uma bola inferior e abaixa-se também uma bola superior. Por fim, na haste das dezenas, erguem-se duas bolas inferiores.

4. SISTEMA DE NUMERAÇÃO E A INVENÇÃO DOS ALGARISMOS

Alguns povos sentiram necessidade de criar seus próprios sistemas de numeração. Os babilônios, os gregos, os romanos, os maias, os chineses e os hindus desenvolveram importantes sistemas numéricos, no intuito de conseguir aperfeiçoar a arte da contagem. Esses sistemas facilitaram a manipulação de várias operações envolvendo os números e os obstáculos que surgiram com operações de números muito extensos. A iniciativa de representação de símbolos gráficos foi uma maneira conceitual de demonstrar os números, isto é, atribuir símbolos para representar objetos ou ideias, estabelecendo relações entre eles e operação com eles num nível conceitual (Wilder, 1968, p.4).

Os números passaram a ser dispostos em grupos, adotando-se um número b como base. Eles foram distribuídos de maneira regular e hierarquizada, fundamentados em suas respectivas bases. Em termos não muito formais, mas suficientemente descritivos, diremos que “base” é o número de unidades que se convencionou tomar para com elas construir uma unidade maior, de ordem imediatamente superior, num processo que, em princípio, se pode repetir até ao infinito (Nogueira, 2001, p.39).

Um passo importante foi a utilização do princípio de posição, onde o valor de um determinado algarismo depende exclusivamente da posição que o mesmo ocupa na representação, ou seja, notação numérica. Segundo Ifrah (1997, p. 684), para a notação numérica perfeita e eficaz é preciso possuir o zero, e também adaptar-se à prática posicional das operações escritas e aos símbolos significativos distintos. Isso deve-se ao fato de que na ausência do princípio posicional, cada número era designado pela soma dos algarismos que formavam esse número, independentemente da ordem que os mesmos ocupavam na representação. Espaços deixados entre dois algarismos não tinham nenhuma interferência numérica no princípio aditivo.

Observa-se que o sistema de numeração mesopotâmico tem muita semelhança com o sistema egípcio (principalmente os 9 primeiros algarismos). Fundamentado na base 60, seus símbolos eram gravados em forma de cunhas em pedaços de argila. Também conhecido como sistema de numeração babilônico, o sistema de numeração mesopotâmico usava apenas 2 símbolos: um pequeno “prego” vertical, que representava a unidade; e uma “viga”, para representar a dezena.

Os babilônios utilizavam como símbolos apenas um “prego” vertical que representava a unidade e uma “viga” associada às dez unidades, tornando seu sistema numérico muito repetitivo. As ferramentas de escrita, no entanto, trouxeram limitações drásticas em relação à variedade de novas marcas, impossibilitando assim o surgimento de novos símbolos. “Os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois signos tantas vezes quantas fosse necessário” (Ifrah, 1989, p.237). Esse princípio também persistia no interior de cada ordem de unidades. A partir do 60, no entanto, o princípio se tornava multiplicativo já que a base adotada era a sexagesimal. A partir daí, a representação de um número se tornaria mais simplificada, pois o sistema, sendo posicional, exigiria uma quantidade menor de símbolos para representá-lo e abreviaram de uma forma expressiva a escrita dos seus números.



1	𐎶	11	𐎶𐎵	21	𐎶𐎵𐎶	31	𐎶𐎵𐎶𐎵	41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶	51	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵
2	𐎶𐎶	12	𐎶𐎵𐎶𐎶	22	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	32	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	42	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	52	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
3	𐎶𐎶𐎶	13	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	23	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	33	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	43	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	53	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
4	𐎶𐎶𐎶𐎶	14	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	24	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	34	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	44	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	54	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	15	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	25	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	35	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	45	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	55	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	16	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	26	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	36	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	46	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	56	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	17	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	27	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	37	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	47	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	57	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	18	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	28	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	38	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	48	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	58	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	19	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	29	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	39	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	49	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	59	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
10	𐎵	20	𐎵𐎵	30	𐎵𐎵𐎵	40	𐎵𐎵𐎵𐎵	50	𐎵𐎵𐎵𐎵𐎵		

Figura 10: Sistema de numeração Mesopotâmico de Base 60

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm>

Apesar de toda a facilidade de utilização do sistema sexagesimal, o sistema babilônico não estava isento de imprecisões e dificuldades. Uma dessas dificuldades encontrava-se na ausência do zero. No início, os babilônios não dispunham de um símbolo para representar a ausência de um número em uma determinada posição, o que muitas das vezes gerava registros ambíguos. De acordo com Estrada (2000b, p.71) “[...] não tinham nenhum símbolo para o zero; para obviar essa dificuldade, eles deixavam algumas vezes um espaço em branco quando não havia unidades de certa ordem, mas nunca esse espaço em branco aparecia no fim da representação de números.” O sistema de numeração posicional ressentiu-se, até depois do ano 300 a.C., da falta de um símbolo para o zero que pudesse representar as potências ausentes de 60, originando deste modo alguns mal entendidos na expressão de um dado número.

Para tentar superar essa dificuldade, os babilônios deixaram por vezes um espaço vazio para indicar dessa forma a potência de sessenta que faltava (o que ainda gerava polêmica visto que era difícil representar números que tinham ausências consecutivas de potências de base 60). Essa dificuldade foi contornada quando se introduziu um novo símbolo, constituído de dois “pregos” inclinados ou duas “vigas” inclinadas. No entanto, esse símbolo só era usado para indicar, dentro de um número, a ausência de uma potência 60, e não quando ela ocorria no final da sequência. Esse símbolo, portanto, era apenas um zero parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potências ausentes da base, tanto no meio como no final das sequências de símbolos numéricos.

O cravo duplo oblíquo dos sábios mesopotâmicos foi sem dúvida compreendido no sentido do vazio (ou melhor, “do lugar vazio que marca a ausência das unidades de uma certa ordem”), mas não do número zero (isto é, “quantidade nula”). Vazio e nada já eram concebidos, mas ainda não eram considerados sinônimos (Ifrah, 1989, p.243).

Muitas civilizações antigas aprenderam a pensar os números associados a uma aplicação prática. No entanto, foram os gregos que primeiros a usar uma abordagem dissociada do concreto. Para os pitagóricos a Matemática lida com abstrações, onde a noção de número tem papel fundamental e que tudo pode ser expresso recorrendo-se aos números naturais e às suas propriedades. Segundo Struik (1997, p. 78), os pitagóricos estudaram geometria, aritmética, astronomia e música (...) Os números, isto é, os inteiros, chamados arithmoi, eram divididos em classes: ímpares e pares, primos e compostos, perfeitos, amigos, triangulares, quadrados, pentagonais etc.

A civilização grega não adotou um sistema numérico posicional. No decorrer de sua história, eles recorriam a dois sistemas de numeração, ambos decimais: o ático (em que os números eram arranjados por ordem e agrupados) e o jônico (que se apresentava na forma de sistema alfabético).

A numeração ática usava 6 símbolos. O número 1 era representado por um traço vertical. Percebe-se que a ordem dos termos é irrelevante para o cálculo do número apresentado, pois o valor depende unicamente dos próprios símbolos e não depende da posição que estes ocupam na sequência. Dessa forma, basta somar os valores que cada um deles simboliza para se obter o número em questão. Contudo, a convenção adotada foi ordenar os símbolos por ordem decrescente do seu valor da esquerda para a direita, o que parece lógico, pois corresponde à forma de escrita grega.

I	II	III	IIII	Γ
1	2	3	4	5
ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
6	7	8	9	10
ΔΓ	ΔΔ	⊠	Η	⊠Γ
15	20	50	100	500
×	⊠	Μ	⊠Γ	
1.000	5.000	10.000	50.000	

Figura 11: Sistema de numeração Ático

Fonte: https://eldeber.com.bo/bbc/que-numeros-usaban-los-antiguos-griegos-cuando-hacian-sus-asombrosos-descubrimientos_215204

Assim como os sistemas de numeração antecessores, o sistema ático também enfrentou alguns problemas no momento de representar certos números. Por ser um sistema aditivo, seriam necessários vários símbolos para exibir determinadas quantidades como, por exemplo, o número 9999, que precisaria de impressionantes 36 símbolos. Para contornar essa dificuldade, eles introduziram novos símbolos para 5, 50 e 500, o que possibilitou uma redução considerável na quantidade de símbolos utilizados numa representação.

Já o sistema jônico passou a ser utilizado aproximadamente no ano de 200 a. C., apesar do sistema ático perdurar por mais um século em Atenas. Esse sistema aditivo e decimal empregava vinte e sete símbolos e quatro letras do alfabeto grego, além de mais três do alfabeto fenício (diganima para 6, koppa para 90 e sampi para 900).

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	π	ρ	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
ϱ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω		
100	200	300	400	500	600	700	800		

Figura 12: Sistema de numeração Jônico

Fonte: <https://escolares.net/br/matematica/sistemas-de-numeracao/>

Assim como no sistema de numeração mesopotâmico, o sistema ático e o jônico não apresentavam o zero. De acordo com Cousquer (1994, p.42) os gregos ignoravam as frações por considerarem impossível a divisão da unidade, sendo assim consideravam apenas os números inteiros como os únicos existentes.

O sistema de numeração egípcio era decimal, existindo símbolos hieroglíficos para os números 1, 10, 100, 1.000, 10.000 e 1.000.000. Ele era organizado como um sistema de agrupamento simples em que um valor b era escolhido como base e logo depois escolhiam-se símbolos para 1, b , b^2 , b^3 , b^4 , etc. Cada símbolo podia ser repetido até nove vezes, exprimindo adição.

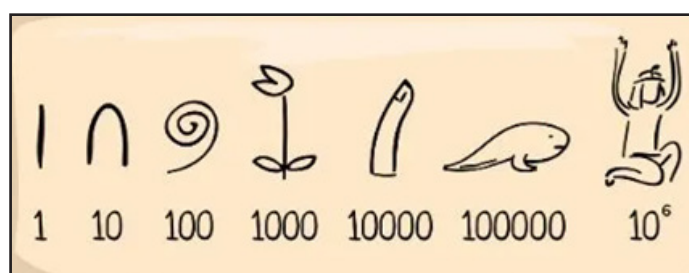


Figura 13: Sistema de numeração Egípcio

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm>

Pelo fato de não ser posicional, mas sim aditivo, o sistema hieroglífico apresentou as mesmas dificuldades do sistema ático na Grécia: determinadas quantidades, para serem representadas, necessitavam de um número elevado de símbolos. Para diminuir o excesso de símbolos, os egípcios recorreram à sobreposição de sinais, passando a exprimir um princípio multiplicativo.

O sistema de numeração romano baseava-se no princípio aditivo e no princípio subtrativo, além de conter agrupamento simples, em que os símbolos gráficos de numeração pareciam ter sido extraídos de letras do alfabeto latino. O princípio subtrativo consistia no fato de que, um símbolo de uma unidade menor colocado antes do símbolo de uma unidade maior significava a diferença entre as duas unidades. Segundo Eves, “no uso do princípio subtrativo deve-se levar em conta, porém, a seguinte regra: o I só pode preceder o V ou X, o X só pode preceder o L ou o C e o C só pode preceder o D ou o M” (Eves, 2004, p.33).

1 — I	11 — XI	30 — XXX
2 — II	12 — XII	40 — XL
3 — III	13 — XIII	50 — L
4 — IV	14 — XIV	60 — LX
5 — V	15 — XV	70 — LXX
6 — VI	16 — XVI	80 — LXXX
7 — VII	17 — XVII	90 — XC
8 — VIII	18 — XVIII	100 — C
9 — IX	19 — XIX	500 — D
10 — X	20 — XX	1000 — M

Figura 14. Sistema de numeração Romano

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numaracao-romano.htm>

Segundo Cousquer (1994, p.46), o sistema de numeração hindu data de aproximadamente do século XV a.C encontrados em hinos litúrgicos, e no norte da Índia, por volta do séc. V surgiu o sistema de numeração posicional decimal que utilizamos atualmente. Nesse período, matemáticos hindus brilhantes desenvolveram importantes trabalhos nos campos da Álgebra e Aritmética. Ao longo da sua história, diversos foram os métodos aos quais os hindus recorreram para escrever números. No entanto, destacamos duas formas de escrita que se destacaram: o Kharosthi e o Brahmi.

A escrita Kharosthi era registrada com símbolos específicos da direita para a esquerda, originados do alfabeto sírio-aramaico, e espalhou-se pelo norte da Índia. O sistema Brahmi apresenta símbolos específicos para os múltiplos de 10, porém existem símbolos diferentes para os números um, quatro ... nove, entre outros e as unidades não são construídas por agrupamentos.

—	=	≡	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘
1	2	3	4	5	6	7	8	9
𑀠	𑀡	𑀢	𑀣	𑀤	𑀥	𑀦	𑀧	𑀨
10	20	30	40	50	60	70	80	90
𑀩	𑀪	𑀫	𑀬	𑀭	𑀮	𑀯	𑀰	𑀱
100	200	500	1000	4000	70000			

Figura 15: Sistema de numeração Brahmi (Hindu)

Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Numeracion-brahmi_fig5_335339399

É importante ressaltar que muitas especulações nos mostram que a sequência dos números hindus já era decimal a muito tempo e que existiam palavras para representar não apenas os números de 1 a 9, como também diversas potências de 10 numa época em que não há evidências escritas, de acordo com Van Der Waerden (1976a, p. 35),

Segundo Ifrah (1989, p. 297), os árabes apreciaram as vantagens do sistema hindu e passaram a ser intermediários entre a Índia e o Ocidente. “Os árabes se iniciaram na astronomia, na aritmética e na álgebra dos sábios desta civilização. A partir do final do século VIII, adotaram o conjunto do sistema numérico hindu: números, numeração decimal de

posição, zero e métodos de cálculo”. Apesar dos árabes terem absorvido produtos das culturas grega, babilônica e hindu, eles também trouxeram suas próprias contribuições, ao aliar com admirável sucesso, por exemplo, o caráter rigoroso do pensamento matemático e filosófico grego ao aspecto prático da ciência desenvolvida pelos hindus. Isso possibilitou um enorme progresso na Matemática e Astronomia da época.

Indiano séc. III a.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Indiano séc. IV-VI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Árabe Oriental séc. IX	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Árabe Ocidental séc. XI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Europeu séc. XVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Atual	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Figura 16: Evolução do Sistema de Numeração

Fonte: <https://criandonumeros.blogspot.com/2012/05>

A superioridade da cultura e ciência árabe em relação aos povos ocidentais se tornou tão evidente que, durante várias gerações, os símbolos acima representados ficaram conhecidos, equivocadamente, como “algarismos arábicos”. Devido ao nome do sábio al-Khowarizmi, que contribuiu para a propagação de métodos algébricos e de cálculo para o mundo ocidental, surgiram as palavras algoritmo e algarismo.

O sistema de numeração decimal permite perfeitamente a representação de qualquer número com o auxílio de seus 10 algarismos. Essa facilidade de representação numérica não está relacionada com a natureza de sua base. Outras representações equivalentes poderiam ser obtidas através de sistemas de numeração não decimais. Mas a superioridade de nosso sistema de numeração atual deve-se principalmente à união do princípio de posição e do conceito de zero.

5. CONSIDERAÇÕES

A história da Matemática aliada à análise das propriedades numéricas propicia ao estudante e ao leitor novas formas de percepção dos números. Ela é estruturada em belos conceitos e padrões que são intrínsecos a todos os números, por mais simples ou complexos que possam ser. O conhecimento da origem do nosso sistema decimal, com a evolução histórica que os números sofreram, fornece contribuições riquíssimas para o desenvolvimento e compreensão de novas operações e novos sistemas numéricos. A beleza da Matemática se encontra nas relações mais simples que existem entre os números: desde o conceito de zero e de paridade, passando por sequências e simetrias numéricas.

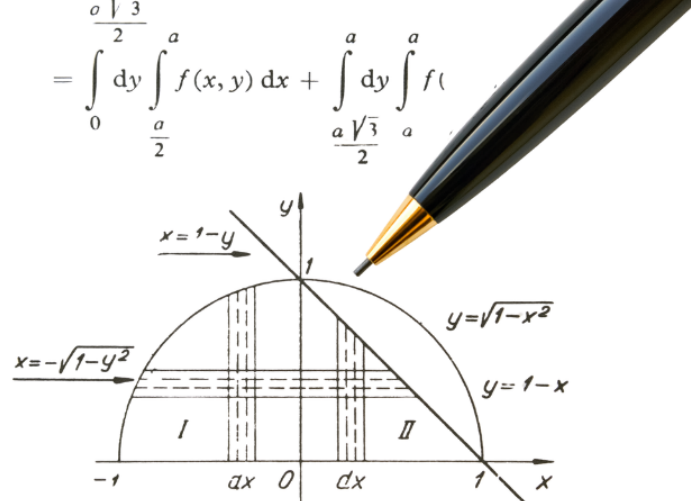
Este trabalho é uma fonte importante de consulta para que todo professor de Matemática consiga empregar o verdadeiro significado dos números, suas características e peculiaridades, a forma como se desenvolveram e suas aplicações, por mínimas que sejam, no intuito de transformar o universo dos números em algo divertido e intrigante, possibi-

litando ao aluno a busca por novas descobertas neste universo que ainda tem muito a se desbravar. Com novas conquistas, tanto alunos como professores poderão desfrutar do significado da frase: Os números são decididamente incríveis.

Referências

- ALMEIDA, Fernando Manuel M. de Brito. **Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Ago. 2007. Disponível em http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_000369009.pdf.
- BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**; volume 2, Brasília, 2006.
- COUSQUER, Eliane (1994). **Histoire du Concept de Nombre**. IREM – Université des Sciences et Technologies de Lille.
- ESTRADA, M. Fernanda. **A Matemática na Mesopotâmia**. In: ESTRADA, M. Fernanda et all. História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta (2000b).
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Higyno H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004. 844p.
- GULLBERG, Jan. **Mathematics, from the Birth of Numbers**. New York: W. W. Norton & Company, 1997.
- GUNDLACH, Bernard H., **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: números e numerais**: Editora atual, 78p. 1ª edição (1992). In: LOVO, Leliane de Fátima; SOUZA, Luana da Silva; BARANECK, Fátima Zampiva. A evolução dos números através das civilizações. Revista Eletrônica FACIMEDIT, v5, n1, jan-ago, 2016. Disponível em <https://www.passeidireto.com/arquivo/38198567/historia-da-matematica/2>
- IFRAH, G. **Os números: A história de uma grande invenção**. São Paulo: Globo, 1989.
- IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.
- STEWART, Ian. **Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro. Editora Rocco, 1996.
- STEWART, Ian. **Mania de matemática: diversão e jogos de lógica matemática**. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2016.
- STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números: A matemática do zero ao infinito**. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2016.
- STRUIK, Dirk J. **Por que estudar a História da Matemática**. In: Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática (Ed), Cadernos do GTHEM – Relevância da História no Ensino da Matemática (pp. 1-14). Lisboa: Associação de Professores de and calculation 3: written numbers. Manchester: the Open University press. 1976a.
- VAN DER WAERDEN, B. L. & Folkerts, Menso. **History of mathematics, counting, numerals Mathematical Concepts: An Elementary Study**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1968.





6

MÉTODO SIMPLEX E SUA APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM UM CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO

*SIMPLEX METHOD AND ITS APPLICATION IN SOLVING
LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS IN A TECHNICAL
ADMINISTRATION COURSE*

Agnaldo dos Santos Pereira¹

Roberto Batista dos Santos²

Sílvia Cleide Piquiá¹

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, São Luís - Maranhão

² Doutor, Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, São Luís - Maranhão

RESUMO

O presente artigo apresenta os resultados da pesquisa sobre o Método Simplex aplicado em um Curso Técnico de Administração devido a importância desse conhecimento para atuação desse profissional. A metodologia que aplicamos foi a de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP). Os aplicativos GeoGebra, OR Simplex e o Solver, uma ferramenta da Planilha do Calc, foram utilizados para agilizar e facilitar nas resoluções dos problemas aplicados. Foram apresentados aos alunos os softwares OR Simplex e o Solver para resolver alguns problemas de uma lista de exercícios. Os alunos tiveram que montar os problemas contextualizados na sua forma padrão do método e verificar se havia uma relação entre os problemas já existentes.

Palavras-chave: Programação Linear, Método Simplex, Metodologias Ativas.

ABSTRACT

This article presents the results of research on the Simplex Method applied in a Technical Administration Course due to the importance of this knowledge for this professional's performance. The methodology we applied was Problem Based Learning (PBL). The applications GeoGebra, OR Simplex and Solver, a Calc Spreadsheet tool, were used to speed up and facilitate the resolution of the applied problems. Students were introduced to OR Simplex and Solver software to solve some problems from a list of exercises. The students had to assemble the contextualized problems in their standard form of the method and check if there was a relationship between the existing problems.

Keywords: Linear Programming, Simplex Method, Active Methodologies.



1. INTRODUÇÃO

A pesquisa retrata a utilização do Método Simplex em uma turma do Curso Técnico de Administração do Ensino Médio IFMA/Campus Avançado Rosário, em que foi pensado para ser contextualizado aos vários conteúdos de matemática que são ensinados durante os três anos letivos.

Os problemas desta pesquisa são questões de Programação Linear (PL) específica para o curso de Administração, voltados à produção em empresas industriais ou fábricas, ou seja, “mix de produção” (problemas que visam lucro máximo ou custo mínimo de produção) que são relevantes para um técnico em administração.

Neste contexto, teve-se a aplicação do Método Simplex para fazer uma conexão entre os conteúdos ensinados no ensino médio e sua importância na resolução de problemas do dia a dia de um técnico em administração. O objetivo geral da pesquisa foi mostrar a contribuição do Método Simplex enquanto metodologia de ensino na resolução de Problemas de Programação Linear (PPL) e a verificação de aprendizagem, tem-se como objetivos específicos resolver equações lineares com várias incógnitas, construção e análise de gráficos lineares, reconhecer os problemas de programação linear, utilizar o OR Simplex e o Solver para resolução de problemas de programação linear.

Assim, acredita-se que apresentando o Método Simplex aos alunos do Curso Técnico de Administração, contribui-se para uma melhor preparação desses alunos para enfrentarem as dificuldades de sua profissão no mercado de trabalho. O ensino aplicado é um dos grandes desafios que as Escolas Públicas enfrentam nos dias atuais, e somente, com o conhecimento contextualizado adquirido durante os estudos é que eles serão capazes de enfrentarem as dificuldades que o mercado de trabalho apresenta no momento de sua atuação.

Apresentou-se as aplicações que foram desenvolvidas em sala de aula com os alunos: a solução computacional utilizando o OR Simplex e o Solver da Planilha Calc, um software livre do LibreOffice para solução de PL.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO

É no Ensino Médio que os alunos têm o primeiro contato com o conceito de funções, matrizes, determinante, matriz inversa, sistemas de equações linear com um número maior de incógnitas e métodos de soluções de sistemas de equações lineares.

Dessa forma, pode-se introduzir o conceito de PL de uma forma mais elementar usando o método gráfico para obter soluções ótimas, assim como, o método analítico e computacional. Este trabalho evidencia uma proposta de programação linear para o ensino médio aplicada numa pesquisa de mestrado, a qual buscou usar problemas do dia a dia dos alunos por meio de sistema de equações lineares. Utilizou o Método Simplex para fazer uma conexão, entre os conteúdos que são ensinados no ensino médio e sua aplicação em problemas práticos do dia a dia, para que os alunos pudessem identificar os conteúdos citados durante os processos de resolução dos problemas apresentados.

Selecionou-se uma turma com 34 alunos do terceiro ano do Curso Técnico em Administração na modalidade integrada do IFMA-Campus Avançado Rosário para aplicar a pesquisa deste trabalho.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia que aplicada foi a de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), ou do inglês Problem Based Learning (PBL). De acordo com (Berbel, 2011) as metodologias ativas têm condições de proporcionar a aprendizagem desejada, utilizando meios diversificados, a exemplo da Tecnologias da Informação e da Comunicação (TDIC).

Sendo assim, os aplicativos que foram utilizados para a solução dos problemas de PL foram ao encontro do pensamento de Berbel. Além disso, Barbosa e Moura (2013, p. 58), de modo mais sucinto e direto, fundamentam a PBL como “o uso contextualizado de um problema para o aprendizado autodirigido”. Portanto, os problemas da lista corroboraram para aprendizagem dos alunos.

Logo, diferentemente dos métodos convencionais cujo objetivo é a transmissão do conhecimento centrado no professor, na PBL o aluno é o centro do processo, deixando de ser um simples receptor da informação para ser também um agente do seu próprio aprendizado (Klein; Ahlert, 2020, p. 4). Além disso, utilizamos também a sala de aula invertida, onde os alunos pesquisaram e assistiram vídeos sobre o assunto em sites indicado pelo professor como www.youtube.com/watch?v=7qOdbo-xPaA e www.youtube.com/watch?v=1Wq8wIzPsog.

A sala de aula invertida é uma modalidade de e-learning na qual o conteúdo e as instruções são estudados on-line antes de o aluno frequentar a sala de aula, que agora passa a ser o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas [...] (Valente, 2014, p. sn).

Neste sentido, foram selecionados dez Problemas de Programação Lineares, sendo que cinco já estavam montados e prontos, isto é, com as equações de restrições e a função objetivo na forma padrão, para aplicação de algum dos métodos de solução, e as outras cinco foram contextualizadas a partir dos problemas montados anteriores. Os problemas são de mix de produção voltados para o Curso de Técnico em Administração.

Para esta pesquisa foram utilizadas 18 horas aulas para apresentação do conteúdo e resolução dos problemas selecionados e, além disso, aplicado um questionário para verificação de aprendizagem.

4. CONCEITOS BÁSICOS

Nas três primeiras horas aulas apresentou-se aos alunos os conceitos e definições para o entendimento do Método Simplex, através de slides, entregou-se as listas contendo dez questões norteadoras para o aprendizado do Método Simplex.

Além disso, falou-se da importância do Método Simplex e como ele pode ser utilizado como instrumento de tomada de decisão. Nessa aula, a turma foi dividida em cinco grupos e instalado os aplicativos (GeoGebra e OR Simplex) nos celulares dos alunos que foram utilizados no processo de resolução de PL. O GeoGebra serviu para a construção das regiões de restrições e OR Simplex para solução dos problemas.



5. UTILIZANDO O OR Simplex PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A resolução dos Gráficos e do Método Simplex foram realizados com os alunos, mas não foram apresentados aqui por serem muito extenso. O professor solicitou aos alunos para abrir o aplicativo do OR Simplex no celular para a resolução de problemas de otimização contextualizados. Esse aplicativo foi utilizado para a verificação do problema resolvido pelo método gráfico e analítico (Método Simplex).

Problema 1: Resolva o seguinte problema de programação linear.

$$\max z = 16x_1 + 13x_2$$

$$s. a. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 > 0 \end{cases}$$

Solução:

A figura 1 representa a abertura do aplicativo o OR Simplex. Após aberto, os alunos selecionaram a opção SIMPLEX.

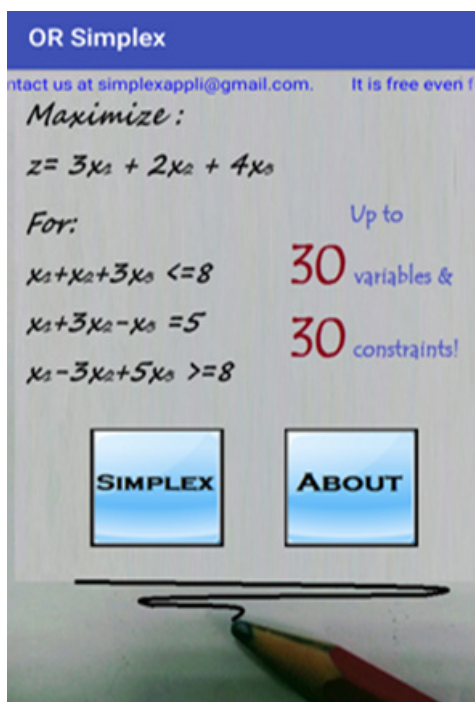


Figura 1. OR Simplex

Fonte: Autor (2021)

A Figura 2 mostra a inclusão do número de variáveis, 2 (dois), o número de equações do problema, 3 (três) e a opção Min ou Max, em que foi marcado Max. Depois clicou-se em CONTINUE.

OR Simplex

Number of variables:
2

Number of constraints:
3

Min or Max:
☐ Min
☒ Max

CONTINUE

Figura 2. Número de variáveis

Fonte: Autor (2021)

Em seguida, digitou-se os valores da equação que seria maximizada e os valores das restrições do problema e clicou-se em CALCULATE, conforme a Figura 3.

12:29 [Icons]

To use fraction (/) : [CLICK HERE](#)

Maximize:
 $z = 16 *x_1 + 13 *x_2$

Subject to:

1	*x ₁ + 1	*x ₂ <=	60
3	*x ₁ + 2	*x ₂ <=	120
0	*x ₁ + 1	*x ₂ <=	40

Note that $x_i \geq 0$ for all i

CALCULATE

Figura 3. Entrada das variáveis

Fonte: Autor (2021)

Na Figura 4, tem-se a tabela inicial e as variáveis de folgas S_1 , S_2 e S_3 .

OR Simplex						
CONTACT US						
Type: Maximization						
Number of variables: 2						
Number of constraints: 3						
Initial values:						
	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	-16	-13	0	0	0	0
S1	1	1	1	0	0	60
S2	3	2	0	1	0	120
S3	0	1	0	0	1	40
The start table:						
	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	-16	-13	0	0	0	0
S1	1	1	1	0	0	60
S2	3	2	0	1	0	120
S3	0	1	0	0	1	40

Figura 4. Valores iniciais

Fonte: Autor (2021)

Na Figura 5, tem-se as interações 1 e 2 com resultado do problema igual ao que foi encontrado na resolução gráfica. Mais uma vez foi solicitado aos alunos para resolver os problemas utilizando o aplicativo e todos os alunos conseguiram resolver todos os problemas.

Iteration: 1						
	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	0	-7/3	0	16/3	0	640
S1	0	1/3	1	-1/3	0	20
X1	1	2/3	0	1/3	0	40
S3	0	1	0	0	1	40
Iteration: 2						
	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	0	0	0	16/37/32	200/3	
S1	0	0	1	-1/3-1/3	20/3	
X1	1	0	0	1/3-2/3	40/3	
X2	0	1	0	0	1	40
The optimal solution is:						
Z = 2200/3 (733,33)						
X1 = 40/3 (13,33)						
X2 = 40						
S1 = 20/3 (6,67)						
S2 = 0						
S3 = 0						

Figura 5. Soluções

Fonte: Autor (2021)

Essa foi a parte que os estudantes mais gostaram, pois o resultado foi exatamente igual ao que fizeram pelo método gráfico e analítico com a facilidade de que não foram feitos muitos esforços para eles determinarem as soluções pedidas.

6. UTILIZANDO O SOLVER PARA RESOLVER PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Na última aula, o professor perguntou para os grupos quais conseguiram montar os problemas contextualizados. E apenas dois grupos conseguiram resolver os problemas, o grupo 2 (dois) e o grupo 5 (cinco), os demais grupos não conseguiram e nem procuraram o professor para tirar dúvida ou pedir orientações para a montagem dos problemas. No entanto, mesmo os grupos que resolveram os problemas não encontraram uma relação entre os problemas já resolvidos e os problemas montados por eles.

Somente, após algumas indagações feitas pelo professor foi que eles conseguiram ver que havia uma relação. Disseram que “eram iguais a um dos problemas já montados da lista”. O professor solicitou para que os outros grupos tentassem ver quais dos problemas que ainda faltavam representava a sua situação-problema.

Depois de alguns minutos e muita discussão entre os grupos foi que eles conseguiram identificar a situação-problema referente às suas questões. Finalmente, utilizaram o Solver, que é uma ferramenta da Planilha Calc para resolver PL. Escolheu-se um dos problemas contextualizado que o grupo 2 (dois) resolveu, com o intuito, de comprovar os resultados obtidos anteriormente.

Para resolução dessa atividade foram levados todos os alunos para o laboratório de informática afim de ensiná-los como utilizar o Solver e construir uma planilha de acordo com o problema a ser resolvido.

Problema 2: (Problema do mix de produção-adaptado.) A Toy S.A. fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e carros. Um soldado é vendido por R\$ 35,00 e usa R\$ 9,00 de matéria-prima. Cada soldado fabricado aumenta os custos diretos de mão-de-obra e custos indiretos em R\$ 10,00. Um carro é vendido por R\$ 40,00 e utiliza R\$ 12,00 de matéria-prima. Cada carro aumenta os custos de mão-de-obra e indiretos em R\$ 15,00. A fabricação requer dois tipos de mão-de-obra: carpinteiro e pintor. A fabricação de um soldado requer 1 hora de um pintor e 3 horas de um carpinteiro. Um carro 1 hora de pintor e 2 horas de carpintaria. Para cada semana a Toy pode conseguir toda a matéria-prima necessária, mas apenas 60 horas de pintura e 120 horas de carpintaria. A demanda para os soldados é ilimitada, mas a de carros é de no máximo de 40 por semana. Quantos carros e soldados a Toy deve produzir para maximizar seus lucros semanal?

$$\max z = 16x_1 + 13x_2$$

$$s. a. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 > 0 \end{cases}$$

Solução:

No laboratório, o professor solicitou que os alunos abrissem o Calc e entrasse com os dados do problema na planilha. Neste momento, descobriram que os alunos tinham pouca ou nenhuma habilidade com o Calc. Então, o professor fez uma breve apresentação das ferramentas principais do menu que iriam utilizar e juntos construíram a tabela. Em



seguida, entraram com os dados do problema na Planilha do Calc de acordo com as orientações a seguir. Na célula D15 incluiu-se a fórmula $= (B6 * B16) + (C6 * C16)$ que determinava o valor da função objetivo do problema. E na célula D9 digitou-se a fórmula $= (B9 * \$B\$15) + (C9 * \$C\$15)$ que representava a restrição de capacidade de pintura. Em seguida copiou-se a fórmula até a célula D11. Veja a Figura 6.

Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1		$=B9*\$B\$15+C9*\$C\15		60
Carpintaria	3	2	0	≤	120
Demanda de carros	0	1	0	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	0	0	R\$ -		

Figura 6. Inserindo fórmulas na planilha

Fonte: Autor (2021)

Após os passos acima, clicou-se em Ferramentas e selecionou-se a opção Solver e apareceu a imagem da janela da Figura 7.

Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1	1	53	≤	60
Carpintaria	3	2	120	≤	120
Demanda de carros	0	1	40	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	13	40	R\$ 733,33		

Solver

Célula objetivo:

Optimizar para: ☒ Máximo ☐ Mínimo ☐ Valor de

Células variáveis:

Conjunto de restrições

Referência de célula	Operador	Valor

Figura 7. Abrindo o Solver no Calc

Fonte: Autor (2021)

Na célula objetivo entramos com a função objetivo que estava na célula D15 também

selecionou-se a opção máximo, pois queriam maximizar os lucros da função objetivo. Na Célula Variáveis clicou-se nas células B15 e C15. Depois adicionou o Conjunto de restrições utilizando a célula de referência D9: D11. Além disso, tiveram que adicionar as restrições de não-negatividade, isto é, B15 e C15 tinha que ser maior ou igual a zero. Em seguida, clicaram em opções e selecionaram o Solver linear do LibreOffice também marcaram as duas últimas caixa e clicaram em Ok, veja Figura 8.

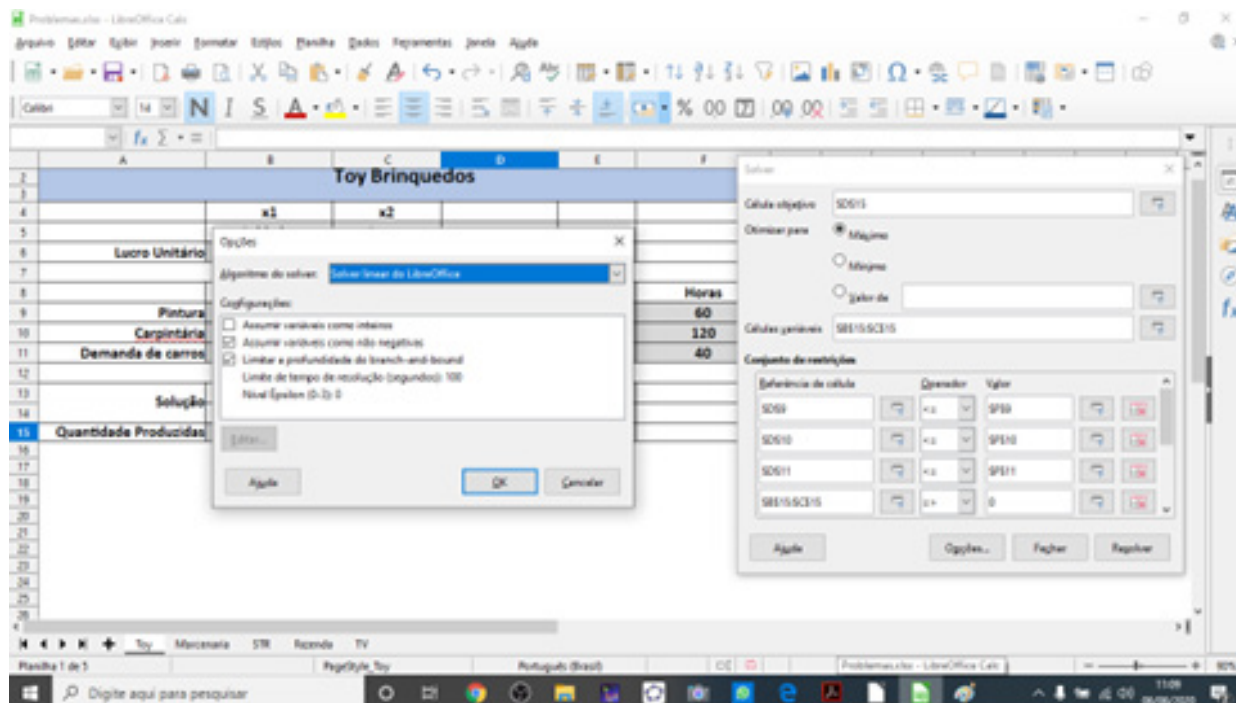


Figura 8. Inserindo os dados nos parâmetros do Solver

Fonte: Autor (2021)

Agora o Solver irá apresentar a solução do problema conforme a Figuras 9.

Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1	1	53	≤	60
Carpintaria	3	2	120	≤	120
Demanda de carros	0	1	40	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	13	40	R\$ 733,33		

Figura 9. Solução final dada pelo Solver

Fonte: Autor (2021)

Sendo o lucro total igual a R\$ 733,33. Então, observava-se que para esse problema o número de soldados produzidos é igual a 13 e o número de carros é igual a 40. Sendo que foram utilizados 53 horas disponível para pintura e as 120 horas de carpintaria e apenas 13 soldados foram produzidos.

7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este trabalho evidencia que o professor desenvolveu um conteúdo que não constava na grade curricular do curso e aplicou uma metodologia diferente da tradicional requerendo do professor um maior preparo profissional.

Inovar representa dedicação extra, tanto do professor quanto dos alunos. Sendo assim, é preciso que os participantes do processo acreditem no potencial pedagógico e deem valor à iniciativa (Barbosa; Moura, 2013).

O trabalho também ressalta todos os gráficos que foram construídos na Planilha do Calc para analisar os dados do questionário aplicado ao término da proposta de aprendizagem do Método Simplex. O gráfico 1 mostra o resultado da pergunta 1: A adoção do Método Simplex contribuiu para o desenvolvimento de sua aprendizagem?

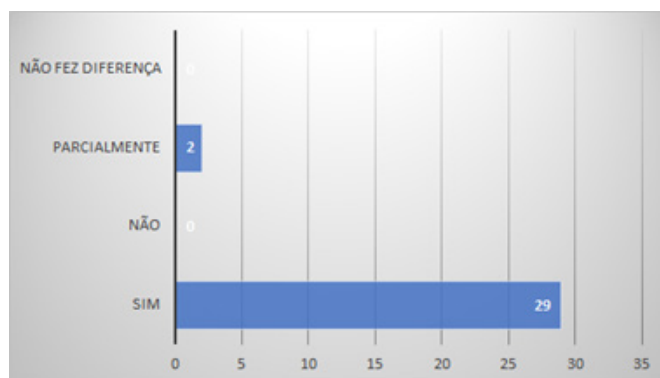


Gráfico 1. Resultado do questionamento 1

Fonte: Autor

O resultado do gráfico 1 mostra que dos 31 alunos que responderam ao questionário, 29 (94%) disseram que o Método Simplex contribuiu para sua aprendizagem e apenas 2 (6%) afirmaram que houve contribuição parcial para a aprendizagem. Uma importante observação é que nenhum dos alunos disseram que o método não contribuiu para a sua aprendizagem.

Estes resultados vão ao encontro ao que Barbosa e Moura (2013, p. 65) falam sobre o processo de aprendizagem dos alunos da Educação Profissional que foram expostos à metodologia PBL. Para eles, as experiências de aprendizagem vivenciadas são “[...] muito positivas e o conhecimento adquirido por essa via é de um valor inquestionável em seu processo formativo”.

O gráfico 2 mostra o resultado do questionamento 2: As atividades e discussões em grupo motivaram seus estudos e contribuíram para um melhor desempenho na resolução de PPL já montados?

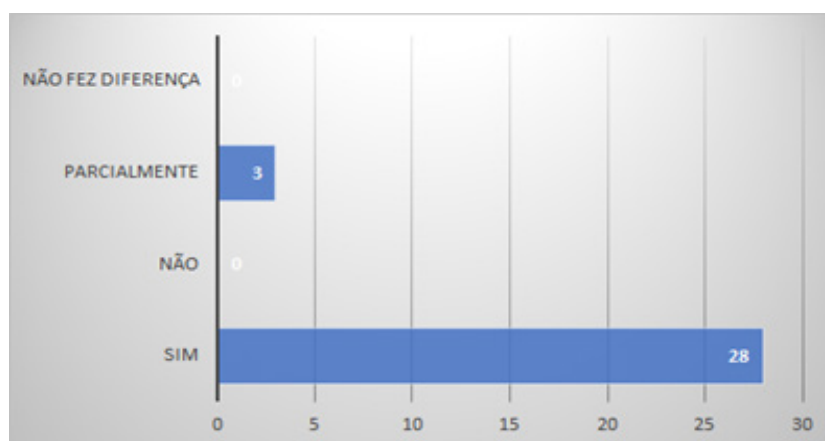


Gráfico 2. Resultado do questionamento 2

Fonte: Autor

No gráfico 2, tivemos 28 alunos, ou seja, (90%) responderam que as atividades em grupo melhoraram o desempenho na resolução de PPL já montados e apenas 3 (10%) disseram que essa contribuição se deu de forma parcial. Novamente nenhum dos alunos disseram que os estudos em grupos não melhoraram o seu desempenho. E de acordo com Lourenço e Palma (2005, p. 157) os trabalhos em grupo, também podem ser compreendidos como:

[...] situações perturbadoras, na medida em que as diferentes soluções encontradas podem se tornar fontes de desequilíbrio cognitivo para os alunos. Enfim, cabe ao docente, oferecer situações perturbadoras aos alunos, as quais tenham a possibilidade de se tornarem conflitos cognitivos e, assim, mobilizar os alunos no sentido de ampliar os seus conhecimentos.

O gráfico 3 apresenta os dados do resultado da pergunta 3: Dos métodos apresentados para resolução de PPL quais foram o que você mais se identificou? Os alunos podiam marcar mais de uma alternativa.

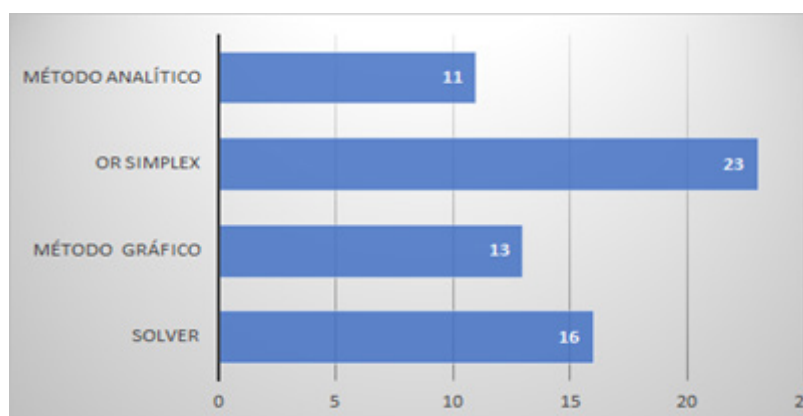


Gráfico 3. Resultado do questionamento 3

Fonte: Autor

O gráfico 3 mostra a relevância da preparação dos alunos para trabalhar em equipes, ou seja, o aprendizado não serviu apenas para as aulas, mas também para a vida profissional. No gráfico 3, a resposta dos alunos varia entre os 3 métodos aplicados: 16 alunos disseram ter se identificado com o Solver, 13 com o método gráfico, 23 com o OR Simplex e 14 com o método analítico (Método Simplex).

O uso de recurso tecnológico em sala de aula tem por finalidade ampliar a visão do aluno sobre determinado conteúdo, visto que, a utilização dessas ferramentas deve atentar para um objetivo pedagógico com planos e metas definidos almejando resultados esperados (BRASIL, 2006).

A pesquisa confirma que o recurso tecnológico usado com objetivos pedagógicos específicos amplia a visão do aluno para os resultados esperados. Os alunos afirmam que gostaram de usar o aplicativo de celular e o método Solver. Um deles diz “sabendo como entrar com os dados do problema o programa faz todos os cálculos sem precisarmos fazer contas. Enquanto, o método analítico é muito trabalhoso, principalmente, quando o processo envolve mais de duas interações.”

O gráfico 4 apresenta o questionamento 4: Você teve dificuldades para interpretar os PPL apresentados?

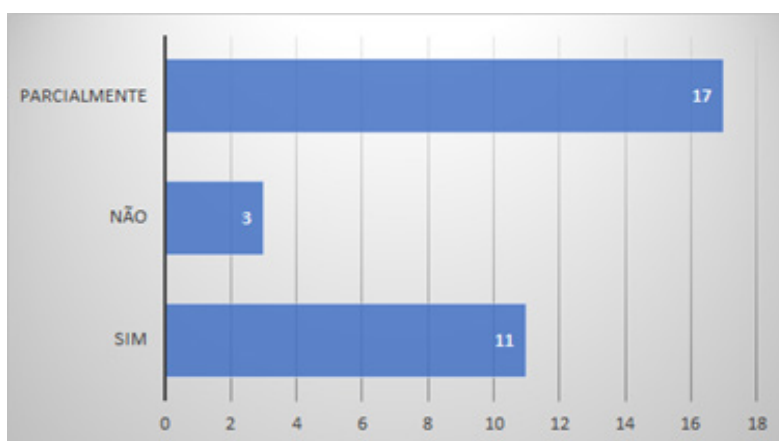


Gráfico 4. Resultado do questionamento 4

Fonte: Autor (2021)

No gráfico 4, temos que 17 (55%) dos alunos afirmaram que tiveram dificuldades parcial para interpretar os PPL, 3 (10%) falaram que não tiveram dificuldades, enquanto 11 (35%) encontraram muitas dificuldades na interpretação dos PPL. De acordo com Freitas (2016), o ensino por meio de problemas tem sido caracterizado, no Brasil, como proposta inovadora, geralmente aparecendo em duas abordagens: aprendizagem baseada em problemas e metodologia da problematização. Tais abordagens apresentam-se como metodologias que superam o ensino tradicional, com a clara intenção de propiciar a aprendizagem ativa do aluno. Ambas contribuem, de fato, para tornar o aluno mais ativo na aprendizagem, mas também apresentam algumas insuficiências.

Essas insuficiências de que fala Freitas (2016) se devem a falta de leitura que os alunos têm ao longo dos seus estudos e a pouca ou nenhuma forma de se trabalhar a matemática de maneira contextualizada tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Os resultados desta pesquisa mostram que de fato, os alunos têm muitas dificuldades em resolverem problemas contextualizados. Pois, eles não conseguem interpretar os problemas de forma correta e tirar os dados para sua solução. Portanto, é importante que os professores utilizem as metodologias ativas no ensino básico com mais frequência para que os alunos tenham uma aprendizagem significativa e ativa.

O gráfico 5 apresenta os dados da pergunta 5: O conhecimento do Método Simplex pode contribuir de alguma forma para sua profissão?

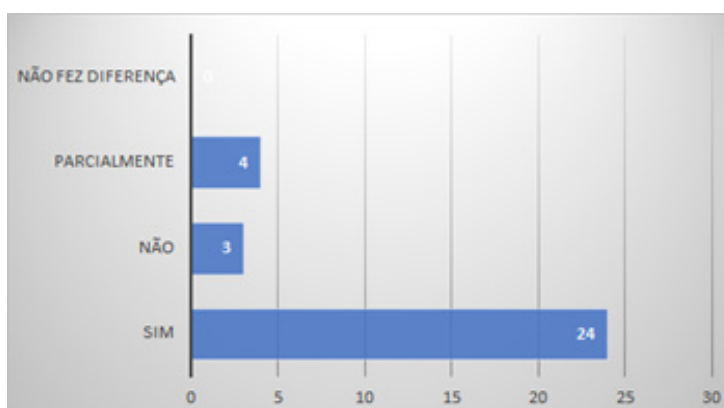


Gráfico 5. Resultado do questionamento 5

Fonte: Autor (2021)

No gráfico 5, temos que 4 (13%) dos alunos responderam que o conhecimento sobre o Método Simplex contribuirá parcialmente para sua profissão, 3 (10%) afirmaram que não vai contribuir enquanto 24 (77%) afirmam que irá contribuir. Sabe-se que as empresas estão sempre buscando novas maneiras de aumentar seus lucros ou diminuir os seus custos, pensando no ensino da matemática aplicada, apresentou-se o Método Simplex. O Método Simplex é uma ferramenta matemática que pode ser utilizada em várias áreas profissionais. Sendo assim, um profissional técnico em administração que possui esse conhecimento terá um diferencial em relação a outros que não conhecem nenhuma técnica de resolução de problemas de otimização.

O gráfico 6 evidencia os resultados dos dados da pergunta 6: O tempo foi suficiente para resolver os problemas apresentados?

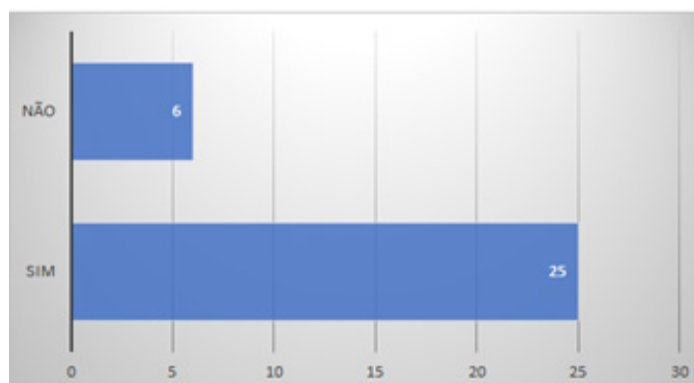


Gráfico 6. Resultado do questionamento 6

Fonte: Autor (2021)

No gráfico 6, temos que 6 (19%) dos alunos afirmam que o tempo não foi suficiente para a resolução dos problemas e 25 (81%) afirmam que o tempo foi suficiente. As atividades tiveram duração de algumas semanas com exposição de conceitos, definições e resoluções de exercícios sobre o conteúdo desta pesquisa.

Expor um assunto que não consta na grade curricular do ensino médio não é fácil, e por esse motivo, o professor enfrentou algumas dificuldades. No entanto, no decorrer do tempo os alunos foram percebendo que alguns assuntos envolvidos no Método Simplex já eram de seus conhecimentos o que facilitou a compreensão do conteúdo no tempo.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

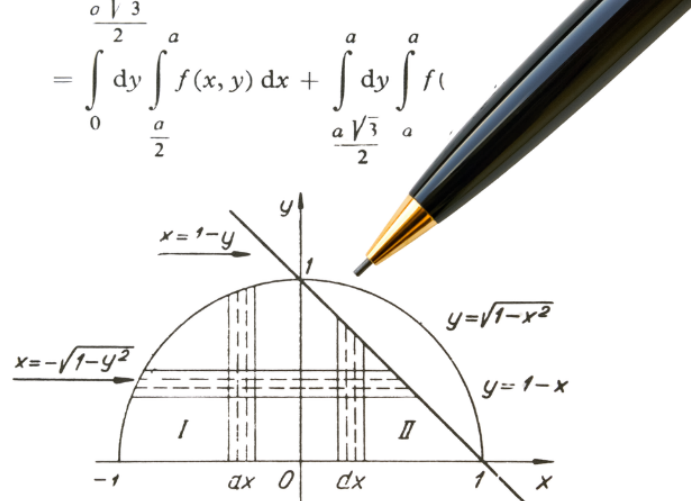
Neste trabalho, utilizou-se o Método Simplex, para verificar a aprendizagem dos alunos do curso técnico em administração através de problemas específicos voltados para o curso. Notou-se que o uso das tecnologias ajudou e muito os alunos a se interessar pelos conteúdos, sejam eles de matemática ou não. Além disso, o uso da sala de aula invertida proporcionou a busca de conhecimento ativo dos alunos, pois eles pesquisavam e estudavam os conteúdos antes, e levavam para a sala de aula suas dúvidas e respostas para as perguntas feitas pelo professor.

E a partir das análises do questionário aplicado conclui-se que ao utilizar o Método Simplex, os alunos conseguiram utilizar os conhecimentos que eles tinham de assuntos como construção e interpretação de gráficos, resolução de sistemas de equações lineares. Aprenderam também como utilizar ferramentas matemáticas como OR Simplex e o Solve para resolver PPL. Além disso, o trabalho em equipe também ajudou a desenvolver o conhecimento crítico promovendo discussões sobre o assunto. Isto é primordial em futuros técnicos em administração que adentrarão no mercado de trabalho.

Constatou-se também que eles tiveram muitas dificuldades em montar os problemas contextualizados e fazerem a relação com os problemas já montados na forma padrão. No entanto, com a orientação do professor foram buscando formas ativas de entender o problema e resolvê-lo isto mostrou o quão é importante a participação do professor orientador no processo de ensino.

Referências

- BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. de. **Metodologia ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica**. [S.l.]: Boletim Técnico do Senac, 2013
- BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciência Sociais e Humanas**, v. 32, n. 1, p. 25 – 40, 2011.
- BRASIL.MEC. **PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, 2006.
- FREITAS, R. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n. 2, p. 403–418, 2016. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=29823285009>.
- FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. **Pesquisa operacional Para Cursos De Administração**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- KLEIN, N. A.; AHLERT, E. M. Aprendizagem baseada em problemas como metodologia ativa na educação profissional. **Revista Destaque Acadêmico**, Univates.br, p. 4, 2020.
- LOURENÇO, R. de S.; PALMA Ângela P. T. V. O conflito cognitivo como princípio pedagógico no processo ensino-aprendizagem nas aulas de educação física. **Revista de Educação do Cogeime**, ano 14, n. 27, p. 157, 2005.
- LYRA, M. S. de. **Uma proposta do ensino de programação linear no ensino médio**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2014.



7

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁREA NO ENSINO BÁSICO, COM VÍDEO PARA DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

CONTRIBUTIONS TO AREA TEACHING IN BASIC EDUCATION, WITH VIDEO FOR DEDUCTIONS AND DEMONSTRATIONS

Natanael Carvalho Sousa¹

João Coelho Silva Filho²

Celina Amélia da Silva³

¹ Mestre, Secretaria de Educação do Maranhão, SEDUC-MA, Brejo - MA

² Doutor, Departamento de Matemática e Informática, UEMA, São Luís - MA

³ Doutora, Departamento de Matemática e Física, CESC-UEMA, São Luís - MA

RESUMO

O presente trabalho consiste na aplicação de uma sequência didática que aborda área dos principais polígonos. É apresentada uma abordagem alternativa que integra cotidiano e a temática criando uma sequência didática que envolve os alunos na produção de vídeos em situações do cotidiano, em deduções e demonstrações de proposições que modelam situações e resolvem problemas de geometria aplicada. O trabalho foi realizado em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual no município de Brejo, Maranhão, destacando o interesse dos alunos e assimilação dos conteúdos.

Palavras-chave: Área de Polígonos; Vídeos Didáticos; Deduções; Demonstrações.

ABSTRACT

The present work consists in the application of a didactic sequence that addresses the area of the main polygons. It is an alternative approach is presented that integrates the daily life and the thematic, creating a didactic sequence that involves students in the production of videos in everyday situations, in deductions and in demonstrations of propositions that model situations and solve applied geometry problems. The work was carried out in a second year class of the high school, in Brejo county, Maranhão, highlighting the students' interest in the assimilation off contents.

Keywords: Area; Videos; Deductions; Demonstrations.

1. INTRODUÇÃO

O Boletim de Desempenho e Metas da Secretaria de Estado da Educação do Maranhão de 2018, que traz resultados referentes ao IDEB de 2017 e resultados dos Simulados Mais IDEB 2018,

mostra que resolver problemas envolvendo área de figuras planas e resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera) estão entre aqueles que os alunos apresentaram menores rendimentos (Maranhão, 2019), o que demanda ações de intervenção didática por parte do professor para o enfrentamento e melhoramento desta situação.

É comum que os alunos aprendam a usar as fórmulas mecanicamente e resolvam muitos exercícios para fixação, mas não conseguem relacionar o conteúdo estudado a situações da sua realidade, neste contexto, veem a matemática como algo distante e alheio à sua vida prática. Por outro lado, também é comum que as fórmulas sejam dadas prontas e o único trabalho dos alunos é aplicá-las na resolução dos problemas e exercícios sugeridos, assim a matemática parece ser mais uma receita pronta do que ciência bem definida e fundamentada.

Nesse contexto, para o educando alcançar sua proficiência na Matemática, é preciso que ele aprenda, de fato, o processo do desenvolvimento do conhecimento, porque ele é válido e onde está sua aplicação no cotidiano. Assim sendo, é importante que as fórmulas matemáticas aplicadas, em especial na Geometria, sejam devidamente demonstradas ou deduzidas durante o processo de ensino. E igualmente importante é a sua contextualização.

Este trabalho propõe uma alternativa inovadora de estudo de área para alunos da segunda série do Ensino Médio visando superar os desafios da contextualização e se propõe a modelar as situações por meio de proposições devidamente deduzidas e/ou demonstradas ao longo da sequência e envolver os alunos em cinco atividades, fazendo vídeos de coisas do cotidiano e problemas reais, e a partir desses vídeos, construir o conhecimento matemático capaz de resolver tais problemas.

2. CONSTRUÇÃO E DEDUÇÃO DAS PROPOSIÇÕES GEOMÉTRICAS DE ÁREA

Nesta seção os alunos irão deduzir as principais proposições Geométricas de área a partir de uma atividade de campo utilizando fotografias e vídeos para elaboração de problemas da realidade local e construção da modelagem Matemática do problema selecionado no material colhido na atividade formulada pelo professor supervisor da turma. Concluindo com a dedução das proposições e aplicação na definição de áreas.

A Sequência Didática foi aplicada em uma sala de segunda série (Série X) de uma Escola Estadual localizada no Distrito Palestina do Município de Brejo, Estado do Maranhão, e os resultados foram comparados aos de outra sala de segunda série (Série Y), da mesma escola.

Para efeito de comparação e análise de resultados, fez-se um questionário diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos. Nele verificou-se, nas duas turmas, a capacidade dos alunos para identificar os principais polígonos e calcular a sua área, além de verificar se são capazes de relacionar coisas do cotidiano a esses polígonos. Os resultados estão ex-



postos no Quadro 1.

Quadro 1. Diagnóstico do Conhecimento dos Alunos sobre Polígonos

Análise preliminar do conhecimento dos alunos sobre os principais polígonos						
	Turma X	Turma Y	Totais	Percentuais	Percentuais Turma X	Percentuais Turma Y
Quant. Alunos	30	35	65	100%	100%	100%
Quadrado	12	20	32	49%	40%	57%
Retângulo	8	17	25	38%	27%	49%
Paralelogramo	5	11	16	25%	17%	31%
Triângulo	25	35	60	92%	83%	100%
Trapézio	0	2	2	3%	0%	6%
Losango	0	1	1	2%	0%	3%
Polígono Regular	0	2	2	3%	0%	6%
Círculo	30	35	65	100%	100%	100%

Fonte: Próprio autor

Excetuando o triângulo e o círculo, é observado que menos de 50% dos alunos mostram conhecimento mínimo das figuras, o que são percentuais baixíssimos. Na Quadro 2 destaca-se a capacidade dos alunos de relacionar coisas do cotidiano a figuras geométricas.

Quadro 2. Alunos que Relacionaram Pelo Menos uma Coisa a um Polígono

Quantidade de Alunos que relacionaram pelo menos uma coisa a um polígono						
	Turma X	Turma Y	Totais	Percentuais	Percentuais Turma X	Percentuais Turma Y
Quant. Alunos	30	35	65	100%	100%	100%
Quadrado	5	10	15	23%	17%	29%
Retângulo	8	12	20	31%	27%	34%
Paralelogramo	0	0	0	0%	0%	0%
Triângulo	0	2	2	3%	0%	6%
Trapézio	0	0	0	0%	0%	0%
Losango	0	0	0	0%	0%	0%
Polígono Regular	0	0	0	0%	0%	0%
Círculo	21	32	53	82%	70%	91%

Fonte: Próprio autor

O diagnóstico das turmas X e Y dão início à intervenção didática na sala X com a Metodologia de Modelagem Matemática, que Segundo Sadovsky (2010) “um processo de modelagem implica, em primeiro lugar, recortar determinada problemática em uma realidade em geral complexa”, e segundo Flores (2008) “a modelagem é um apelo à realidade”.

A modelagem incorpora tudo que envolve o objeto de estudo, não excluindo qualquer procedimento ou meios pelos quais o sujeito tome posse do saber matemático. Pois, a matemática não funciona separando problemas, técnicas, representações e demonstrações, pois essas zonas convergem.

A análise dos resultados utiliza a metodologia de Abordagem Qualitativa, que de acordo com Fontenelle (2017), o critério para a identificação dos resultados não é numérico, é valorativo. A utilização de números é aplicada a populações pequenas e isso é uma análise estatística pontual.

O método que nos fornece a dinâmica da problemática a ser discutida e por meio da qual se fará toda a modelagem, foi objeto de pesquisa dos alunos que consiste na ativida-

de descrita sequencialmente.

A atividade I, exploratória, é uma pesquisa fotográfica dentro das comunidades, principalmente nos ambientes de convivência dos alunos, baseada em uma lista de figuras entregue pelo professor aos grupos de alunos. A atividade é selecionar os objetos ou locais e fotografar, para produzir os vídeos com as problemáticas para cada figura da sequência.

Para cada objeto ou local é elaborado uma situação problema retratado nos vídeos produzidos e repassados em sala, para, a partir desta etapa, serem realizadas as próximas atividades: modelagem e resolução dos problemas.

A seleção das imagens, gravação e produção do vídeo foram executadas na sala de aula e elaboradas listas para pesquisa fotográfica, além da seleção e identificação das imagens a serem exploradas na produção dos vídeos, criação de roteiro de filmagens, entrega de vídeos para a edição e apresentação da versão final do vídeo com toda a problemática a ser modelada durante as próximas atividades.

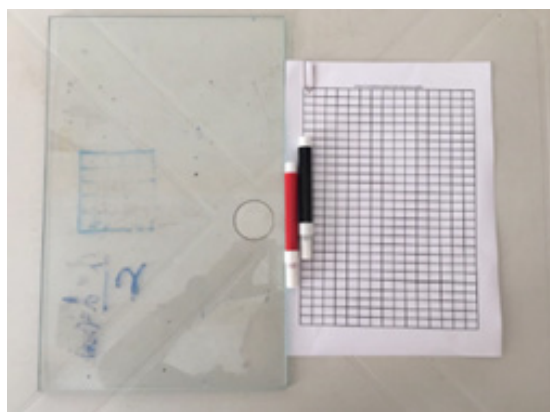
A atividade II trata de Unidade de Área, Área de Quadrados e Área de Retângulos, onde são exibidos os vídeos que apresentam uma problemática construída pelos alunos na supervisão do professor, envolvendo quadrados e retângulos. Na etapa seguinte o professor apresenta os postulados de área, e são identificadas as proposições:

Proposição 1 - *Um quadrado de lado l tem área $A_q = l \times l = l^2$.*

Proposição 2 - *Um retângulo de lados a , b tem área $A_r = a \times b$.*

A partir da modelagem e da problemática são construídas as bases para as deduções com materiais manipulativos, mostrado na Figura 1.

Figura 1. Vidro, Pinceis e Folha Quadriculada



Fonte: Próprio autor

A análise das fotografias motivou a seleção e escolha de material para problematização. A fotografia de um quadro é ilustrada na Figura 2 e a fotografia de uma piscina é ilustrada na Figura 3 são resultados desta seleção.

Figura 2. Quadro Quadrado de 1m de lado



Fonte: Próprio autor

Para cada figura foram executados vídeos com a problemática repassada pelo professor, descrevendo as tarefas solicitadas pelo professor supervisor para composição dos vídeos.

Figura 3. Piscina de 1,65m por 3,00m



Fonte: Próprio autor

Para o quadro, foi criada a seguinte situação:

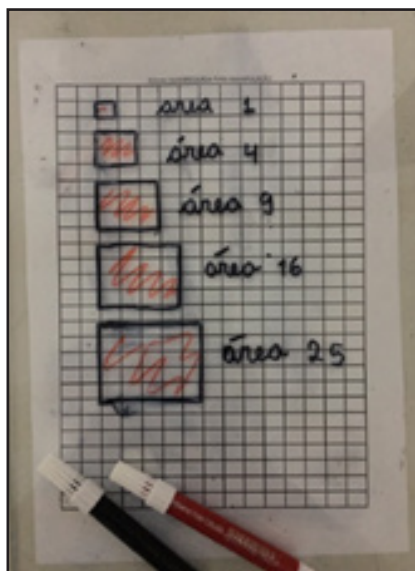
Supondo que esse quadro quadrado de 1m de lado tenha sido comprado por R\$ 80,00, e que o preço de um quadro semelhante a esse dependa apenas da área ocupada pela parte onde se escreve. Quanto custaria um quadro com 10cm de lado?

Para a piscina a problemática a seguinte:

O Sr. Pedro, dono desta piscina, se incomoda com a quantidade de folhas que caem dentro dela, o que faz ser praticamente impossível mantê-la limpa, por isso resolveu comprar uma lona para cobri-la. Se o m^2 da lona custa R\$ 25,00, quanto o Sr. Pedro deve gastar para cobrir toda piscina?

Os grupos de alunos utilizam o material para manipulação ilustrada na Figura 1, e uma lista com atividades de dedução por recorrência da Proposição 1, começando pela área do quadrado de lado 1, depois de lado 2, e assim sucessivamente, até que o aluno consiga deduzir o cálculo da área de um quadrado com medida de lado qualquer, conforme ilustrado na Figura 4.

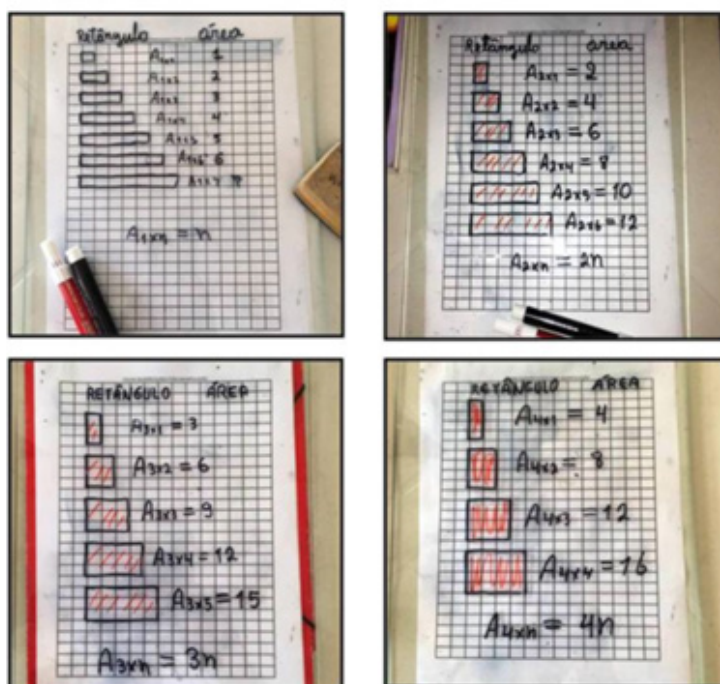
Figura 4. Deduzindo Área do Quadrado



Fonte: Próprio autor

Na atividade seguinte os alunos constroem retângulos usando o material de manipulação para deduzir que a área do retângulo é dada conforme a Proposição 2 e ilustrado na Figura 5.

Figura 5. Deduzindo Área de Retângulo



Fonte: Próprio autor

Na Atividade III foram selecionados a área do paralelogramo e a área do triângulo, seguindo a mesma dinâmica: seleção das imagens, produção de vídeos e deduções em sala de aula. E os vídeos produzidos foram: Um terreno com formato de um paralelogramo, conforme a Figura 6, e um terreno com formato triangular, conforme a Figura 7.

Situação problema envolvendo o terreno:

O mercado imobiliário vem se desenvolvendo na região e, por isso, os terrenos inflacionam. Em 2002 esse terreno foi comprado por R\$ 280,00, agora, em 2018, foi vendido

por R\$ 25.000,00. Qual a diferença entre o preço do m^2 em 2002 e 2018?

Figura 6. Terreno em Formato de Paralelogramo



Fonte: Próprio autor

Situação problema envolvendo a área do triângulo:

Este espaço é usado por duas pessoas para venda de alimentos. Pela manhã um senhor vende café e a noite uma senhora vende vários tipos de comidas. Os dois irão colocar o piso. Sabendo que o m^2 do piso custa R\$ 28,00, e que a mão de obra sai por R\$ 25,00 o m^2 . Quanto cada um pagará, se a despesa for dividida igualmente?

Figura 7. Terreno em Formato de Triângulo



Fonte: Próprio autor

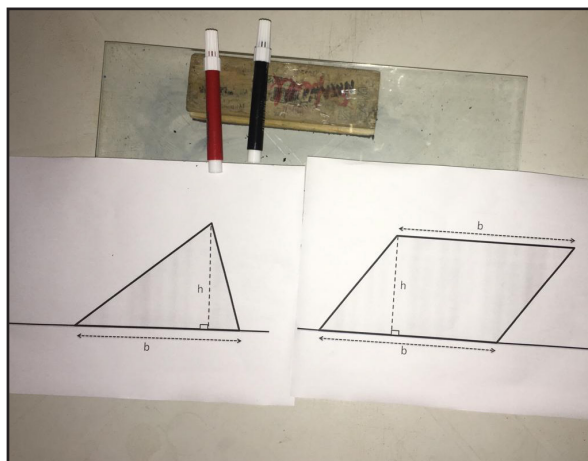
A partir do vídeo que apresenta a problemática, são realizadas a modelagem do problema para em seguida executar as deduções e demonstrações das proposições:

Proposição 3 - A área A_p de um paralelogramo de base b e altura h é $A_p = b \times h$.

Proposição 4 - A área A_t de um triângulo de base b e altura h é $A_t = \frac{b \times h}{2}$.

Utilizando o material concreto ilustrado na Figura 8, a turma trabalha com material escolar: lápis para quadro branco, quadro de vidro, chapa de vidro, apagador e papel A4, sobre as figuras que são utilizadas para aplicar a deduções da área.

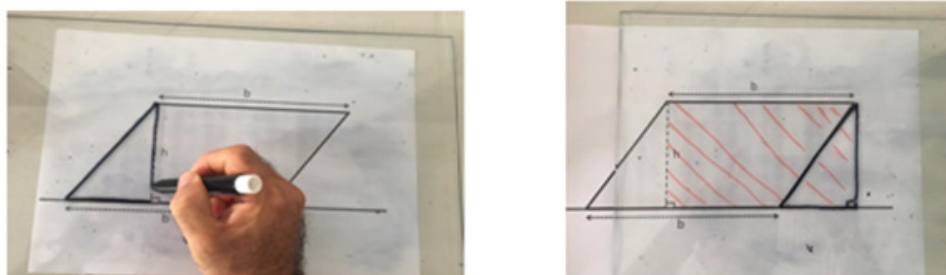
Figura 8. Vidro, Folha A4 com as figuras e Pincel de Quadro Branco



Fonte: Próprio autor

Com uma folha vidro sobre uma folha de papel são traçados paralelogramos, conforme ilustrada na Figura 8, os alunos traçam a construção do triângulo congruente ao triângulo delimitado pela altura do paralelogramo, na etapa seguinte o triângulo sobre a folha de vidro forma um paralelogramo retângulo, deduzindo que a área do paralelogramo é a mesma do retângulo que tem mesma base e mesma altura, que é exatamente a proposição 3.

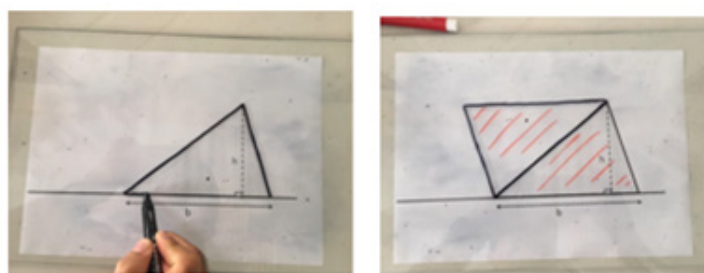
Figura 9. Deduzindo Área do Paralelogramo I



Fonte: Próprio autor

Similarmente, é traçado o triângulo congruente ao triângulo do papel, em seguida a folha de vidro é movimentada de maneira que o triângulo no vidro com o do papel forme um paralelogramo, conforme ilustrado na Figura 10. Como os triângulos são congruentes, deduz-se que a área do triângulo original é igual à metade da área desse paralelogramo, que é a proposição 4.

Figura 10. Deduzindo a Área de um Triângulo de Base b e Altura h I



Fonte: Próprio autor

A Atividade IV, seguindo o mesmo roteiro das atividades anteriores, primeiro se fez a exibição do vídeo com a problemática a ser modelada conforme as imagens da Figura 11.

Figura 11. Banheiros da Escola e Bandeira do Brasil



Fonte: Próprio autor

Situação envolvendo os banheiros:

O diretor da Escola pretende pintar as paredes da lateral direita e da frente dos banheiros femininos. Segundo o pintor, um galão de tinta à base d'água de 3,6l é suficiente para pintar 10m^2 de área. Quantos galões o diretor deve comprar?

Situação envolvendo a Bandeira do Brasil:

A bandeira brasileira tem três formas geométricas, o Retângulo, Losango e o Círculo. Considerando que o retângulo mede $0,95\text{m}$ por $0,72\text{m}$ e o losango têm diagonais medindo $0,80\text{m}$ e $0,55\text{m}$. Calcule a área verde da bandeira.

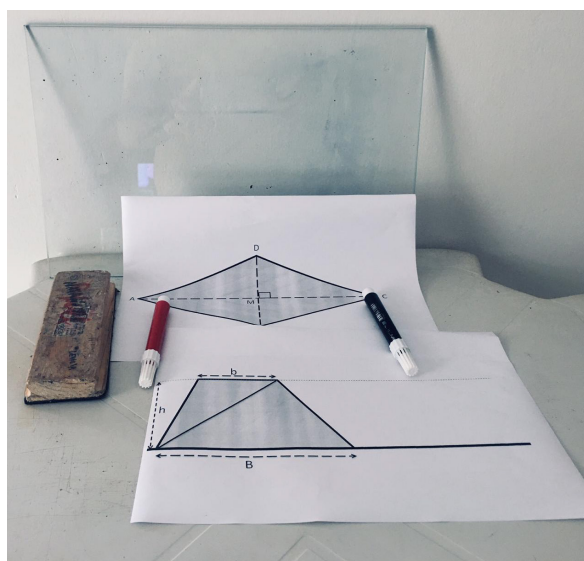
Para solucionar o problema proposto são aplicadas as proposições que em seguida serão deduzidas e demonstradas.

Proposição 5 - Se $ABCD$ é um trapézio de bases, $\overline{AB} = b$; $\overline{CD} = B$ e altura h , então a área é $A_T = \frac{(b+B)h}{2}$.

Proposição 6 - Se $ABCD$ é um losango de diagonais, $\overline{AC} = a$; $\overline{BD} = b$, então a área é $A_l = \frac{a \times b}{2}$.

Para construir as deduções das proposições 5 e 6, é realizada a análise dos problemas com os materiais ilustrados na Figura 12.

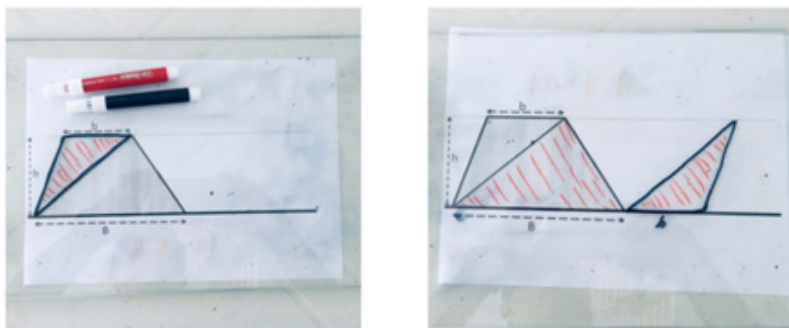
Figura 12. Folha A4 com losango e trapézio, pincéis e vidro.



Fonte: Próprio autor

Os alunos traçam sobre a folha de vidro construindo um triângulo congruente ao triângulo que tem base b e um lado sendo a diagonal. O movimento de rotação na folha de vidro, colocando a base b do triângulo construído na mesma reta que contém a base B , conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13. Deduzindo a Fórmula de Área do Trapézio



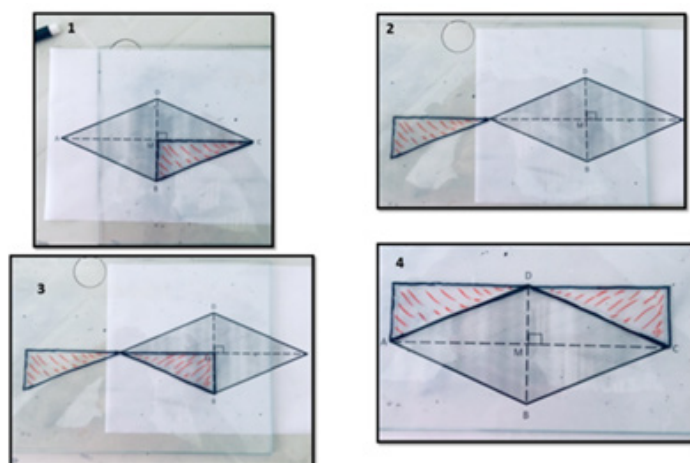
Fonte: Próprio autor

A estratégia é construir e mostrar aos alunos que a área do trapézio é igual à soma das áreas dos dois triângulos que têm a mesma altura h , bases B, b e com algumas manipulações algébricas para chegar na fórmula para cálculo de área do trapézio, conforme a Proposição 5.

Para deduzir a Proposição 6, usando o pincel preto, constrói-se sobre o vidro um triângulo congruente ao triângulo BMC e destaque a sua área na cor vermelha (1). Deslocando o vidro para a esquerda até que o vértice C do triângulo coincida como vértice A (2). Constrói-se um triângulo congruente ao triângulo ABM e destaca-se sua área também na cor vermelha (3). Fazendo um movimento com o vidro colocam-se os triângulos construídos sobre o losango, formando um retângulo (4), conforme ilustrado na Figura 14.

Destacando também a outra parte do retângulo e identificando os vértices E e F . Deslocando o vidro para cima, destaca-se o retângulo $ACEF$, conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14. Sequência de Dedução da Área do Losango I

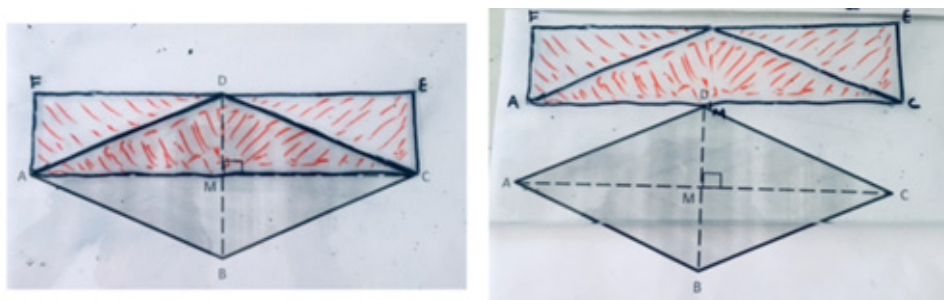


Fonte: Próprio autor

Como a área do retângulo é conhecida e mostrou-se que a área do losango é igual à do retângulo $ACEF$, pode-se afirmar que a área do losango é dada pela metade do produto das suas diagonais, como enunciado na Proposição 6. Assim, os alunos resolveram as

questões propostas nos vídeos.

Figura 15. Sequência de Dedução da Área do Losango II



Fonte: Próprio autor

A Atividade V consiste em conhecer e explorar o cálculo de área de polígonos regulares e do círculo. A partir dos vídeos com a problemática os alunos trabalharam o material recolhido para as deduções das proposições.

Problemática envolvendo o Guarda-sol:

O Sr. Paulo da chácara Monte do Camelo construiu uma grande área de laser, que compõem as sete áreas de piscinas naturais. Em cada área foram colocados vinte e dois guarda-sóis em formato hexagonal. Segundo Sr. Paulo, o pano que cobre o guarda-sol deve ser trocado a cada dois anos por desgastes naturais, ligados à exposição ao Sol e Chuvas. Explique com suas palavras os procedimentos para fazer o cálculo da quantidade de tecido em cada guarda-sol. Observou-se que as arestas do guarda-sol medem $1,06m$ e o apótema mede $0,94m$. Quantos m^2 de tecido ele deve comprar no período de 10 anos para manutenção dos guarda-sóis?

Figura 16. Guarda-sol e Forno de Farinha



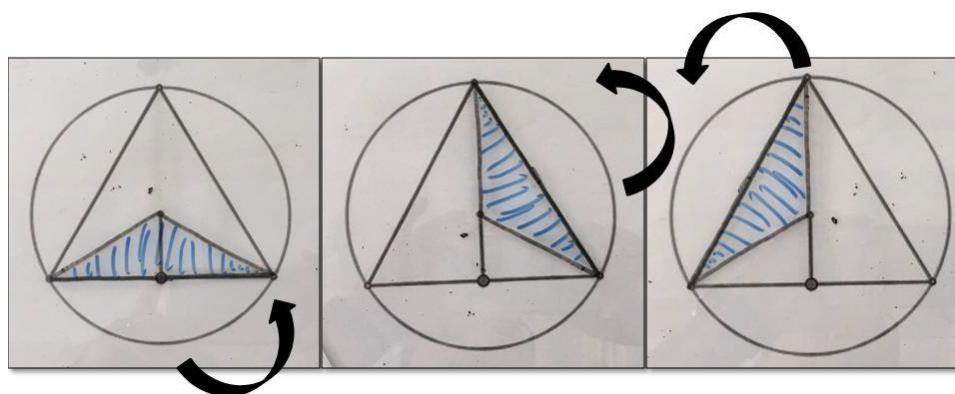
Fonte: Próprio autor

Problemática envolvendo o Forno de Farinha:

Esse forno de farinha foi comprado pelo Sr. Manoel em 1999, segundo ele a parte de metal, onde se torra a massa de fazer farinha, veio dentro de uma caixa de papelão quadrada. Considerando que essa parte metálica tem $4,5316m^2$ de área e que $\pi = 3,14$, é correto afirmar que a caixa tinha as arestas que compõem a parte quadrada medindo menos que $1,2m$?

De posse do material os alunos constroem sobre a folha de vidro o triângulo que tem base um lado do triângulo equilátero e altura o apótema. Realizando uma rotação no vidro é confirmado que o triângulo maior cabe exatamente três desse triângulo, portanto a área do triângulo equilátero é três vezes a área do triângulo cuja base é um lado do triângulo equilátero e a altura é o apótema, conforme ilustrado na Figura 17. O processo também é repetido com o quadrado, o pentágono e o hexágono, conforme ilustrado na Figura 18.

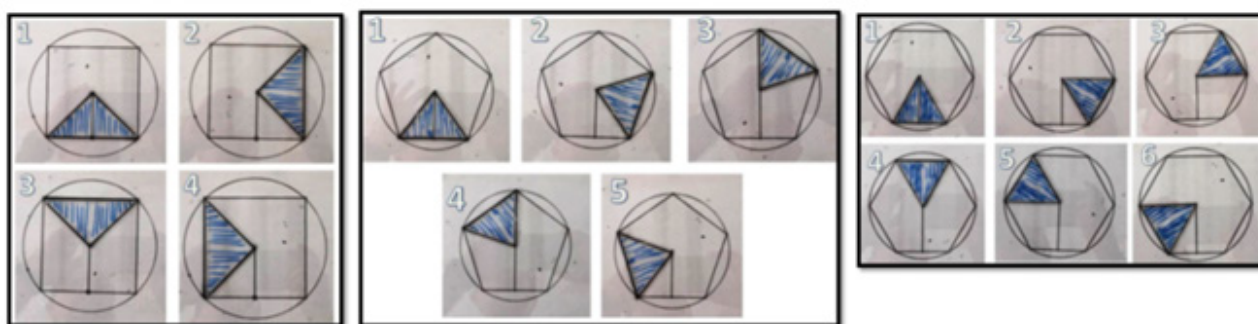
Figura 17. Deduzindo a Área do Triângulo Equilátero



Fonte: Próprio autor

Nesse processo foi entendimento e deduzido que um polígono regular de 4, 5, 6 ou n lados têm área, $A = p \times a$, onde p é o semiperímetro e a é o apótema.

Figura 18. Deduzindo Área de Polígonos Regulares

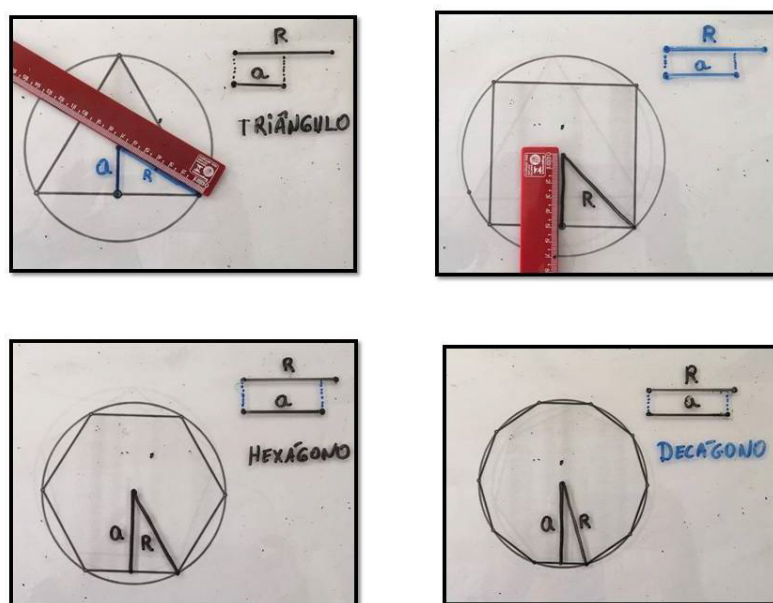


Fonte 2: Próprio autor

Os alunos chegaram ao resultado que, Se P é um polígono Regular com n lados, então sua área A_p é igual à metade do produto entre seu apótema a e seu perímetro p , onde l é o tamanho do lado e $nl = p$, onde p é o perímetro do polígono, que é a nossa Proposição 7.

Para deduzir a proposição 8 os alunos fizeram uma atividade, que consiste em mostrar que aumentando o número de lados de um polígono regular, a medida de seu apótema a se aproxima da medida do raio R e o perímetro p se aproxima cada vez mais do perímetro do círculo, ou seja, $nl = c = 2\pi R$, conforme ilustrado na Figura 19.

Figura 19. Deduzindo Área de Círculos



Fonte 3: Próprio autor

Assim, deduz-se que a área do círculo é dada pela área de um polígono regular de infinitos lados, ou seja, $A = \frac{pa}{2}$, onde $p = 2\pi R$ e o $a = R$, portanto, $A = \frac{2\pi R R}{2}$ ou $A = \pi R^2$, que é a Proposição 8.

Proposição 7 - A área do Polígono Regular é definida por $A_p = \frac{p \times a}{2}$.

Proposição 8 - A área do círculo é definida por $A_c = \pi R^2$.

As atividades realizadas com os alunos mostraram uma produção de conhecimento nas avaliações. A turma transformou a problemática em modelagem matemática, executou as deduções, demonstrações e resolução dos problemas. Esta metodologia apresentou bons resultados para as turmas afetadas com as atividades.

3. JUSTIFICATIVA DOS VÍDEOS COMO RECURSOS DIDÁTICOS

O ensino de Matemática é um desafio para os professores, por vários fatores, falta de motivação dos alunos, pouco recurso, infraestrutura da escola, ambiente violento, dentre outros. É importante que o professor encontre soluções criativas e que possam motivar os alunos e fazê-los agentes de sua própria aprendizagem, pois,

Um dos motivos do fracasso do ensino de Matemática está tradicionalmente pautado em manipulações mecânicas de técnicas operatórias, resolução de exercícios, que são rapidamente esquecidos, assim como a memorização de fórmulas, tabuada, regras e propriedades (Frinhani, 2013, p. 44).

Assim, quando o aluno é colocado diante de um problema do seu cotidiano e quando o objeto matemático está presente em sua realidade, o aprendizado se torna significativo, pois,

[...], como disciplina escolar, acreditamos em uma matemática que se aproxima da realidade do aluno, para que através da aprendizagem significativa a torne mais humanizadora e menos abstrata possível. Isso não quer dizer que o caráter abstrato da Matemática deva ser desconsiderado no processo de ensino. Mas, é necessário ressaltar que esse caráter abstrato deve ser o fim e não o início do processo, ou seja, a prática da Matemática deve partir da concretude para a abstração dos conteúdos escolares (Maranhão, 2017, p. 14).

Isso leva a crer que quanto mais próximo da realidade é o conteúdo abordado mais chance o aluno tem de assimilar.

Um desafio para o professor é, de que forma fazer, de maneira satisfatória, o elo entre o cotidiano dos alunos e os temas abordados em sala.

Visando melhorar a transposição didática, uma importante e eficiente ferramenta utilizada para ajudar o professor na contextualização dos conteúdos em especial o conteúdo de geometria, é a produção de vídeo. Este recurso auxilia o professor a relacionar o conteúdo a situações reais da vida dos alunos, inclusive, é disso que, Silva (2011, p. 34), em sua Dissertação de Mestrado trata quando diz que “ao fazer uso do vídeo na sala de aula, o professor tem várias possibilidades para explorar o conteúdo” e Rocato (2009, p. 8) afirma que “o vídeo didático pode mostrar-se uma útil ferramenta para o enfrentamento desses desafios pedagógicos”.

A produção de vídeos não é defendida como único recurso didático, não se trata de produzir videoaula, mas de ter os vídeos como ferramenta para evidenciar no cotidiano as variadas situações em que a Matemática se faz necessária, ou seja, o vídeo é um recurso que, se aplicado como material pedagógico, de forma bem planejada, contribui significativamente na produção de uma ferramenta didática para proporcionar fixação dos conteúdos curriculares de maneira adequada, produzindo resultados qualitativos e quantitativos.

Defende-se fazer uma boa contextualização envolvendo os alunos numa dinâmica do seu cotidiano, modelagem e demonstrações, que segundo Lalange (1999, p. 239) é “provar a verdade de sua conclusão apoiando-se sobre premissas conhecidas e admitidas como verdades”.

Novamente fica evidente a necessidade de o aluno entender a Matemática, desde cedo, como uma ciência, que é estruturada em fundamentos, proposições e teoremas, para os quais há sempre razões que devem ser esclarecidas, é o que diz Fossa, “Conhecer, então, é saber o porquê dos acontecimentos. E o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração” (Fossa, 2009, p. 46).

Ficam claras as vantagens em fazer um ensino de Matemática que inclua as demonstrações e/ou deduções. No tocante ao nosso trabalho, que se propôs aplicar uma sequência didática para o ensino de Área.

4. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

No final dessa atividade os alunos, que antes não conheciam os polígonos, sanaram essa dificuldade, e mostraram motivação na sala para realização das próximas atividades. O gráfico na Figura 20 mostra que 87% dos alunos afirmam que a produção de vídeo ajudou na compreensão dos conteúdos de Geometria e cálculo de área das figuras Geométricas.

Figura 20. Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Produção de Vídeo

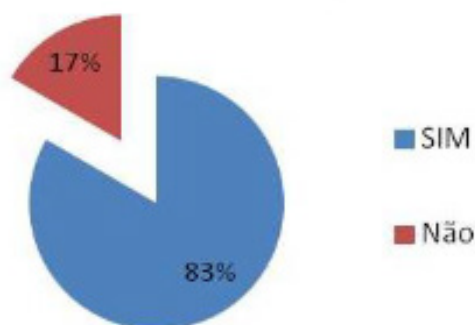


Fonte 4: Dados da pesquisa

O uso do material concreto desta atividade de campo contribuiu significativamente nas deduções e demonstrações das proposições, isso motivou a turma. Inicialmente, ocorreram as intervenções do professor supervisor, mas com o trabalho de vídeos os alunos desenvolveram suas atividades sem necessitar dessa orientação.

Neste trabalho, como mostra o gráfico da Figura 21, 83% dos alunos entenderam o processo de demonstração ou dedução, o que é considerado um resultado satisfatório no ensino aprendizagem.

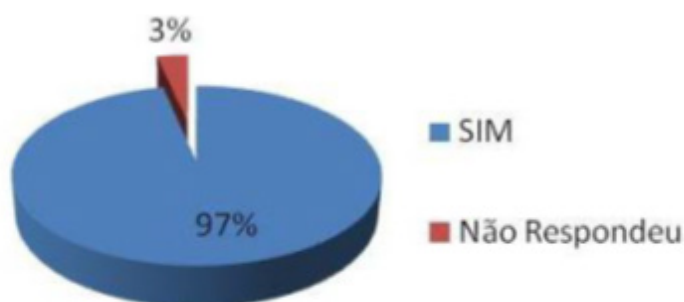
Figura 20. Gráfico com a opinião dos alunos sobre a Demonstrações ou Deduções



Fonte: Dados da pesquisa

O engajamento à metodologia aplicada e os materiais utilizado no trabalho mostram que a atividade motivou o resultado obtido. Os alunos responderam positivamente sobre gostar da metodologia aplicada, apresentando um índice de 97% de satisfação com a atividade e o aproveitamento, como mostrado no gráfico da Figura 22.

Figura 22. Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Metodologia de Ensino



Fonte: Dados da pesquisa

O resultado da avaliação final da turma X apresentou melhor rendimento que a turma Y, quando analisada a quantidade de alunos que obtiveram a nota máxima e também a quantidade com nota inferior a 6, como mostra a Quadro 3.

Quadro 3. Número de Alunos com Nota Máxima ou Nota Inferior a 6 por Turma

Tabela de Notas		
Item	Quant. de Alunos da Turma X	Quant. de Alunos da Turma Y
Nota Máxima	5	0
Nota inferior a 6	0	9

Fonte: Dados da pesquisa

As médias das turmas ficaram próximas, 7,5 para a Turma X e 7,0 para a Turma Y. A intervenção foi aplicada na turma X por motivação da turma apresentar menor rendimento, portanto, pode-se afirmar que a aplicação da sequência didática gerou resultado satisfatório, pois elevou a turma X a um patamar bem próximo do desejado e acima do rendimento da turma Y.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostrou que o papel do aluno no processo de ensino-aprendizagem

está muito além de mero expectador, ele é, na verdade, o protagonista deste processo em que a escola tem êxito na tarefa de transmitir o conhecimento. Quanto maior participação do aluno maior será o seu rendimento.

Sobre o papel do professor, este trabalho provocou uma mudança de postura e gerou uma certeza de que “O professor mediador pode ser mais importante para o aluno que o professor transmissor”. Essa relação biunívoca, na qual o aluno apresenta suas dificuldades e o professor reage com atividades que, se aluno as fizer, serão sanadas; o aluno apresenta resultados e o professor reage com atividades que o levará a buscar novos conhecimentos, que diz respeito à prática docente, é uma relação de cumplicidade que só tem um resultado possível, o melhor aprendizado.

Portanto, uma metodologia de ensino e produção de conhecimento pautado em técnicas próxima da realidade do aluno, partindo de atividades concretas, motiva e apresenta resultados qualitativos e quantitativos satisfatórios.

REFERÊNCIAS

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. **Metodologia do Ensino de Matemática**. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2008.

FONTENELLE, A. **Metodologia científica**: Como definir os tipos de pesquisa no seu TCC? Disponível em: https://andrefontenelle.com.br/tipos-depesquisa/#Elementosessenciais_Quanto_a_nalidade.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRINHANI, P. E. Avaliação Matemática Escolar em larga escala: Reflexos na rede municipal de Freire - ES. **Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

LALANGE, A. **Vocabulário Técnico e Crítico de Filosofia**. Trad. por Fátima Sá Carneiro, Maria E. de Aguiar, José E. Torres e Maria G. de Sousa: Martins Fontes, 1999.

MARANHÃO. **Boletim de Desempenho e metas**. SEDUC-MA, 2019.

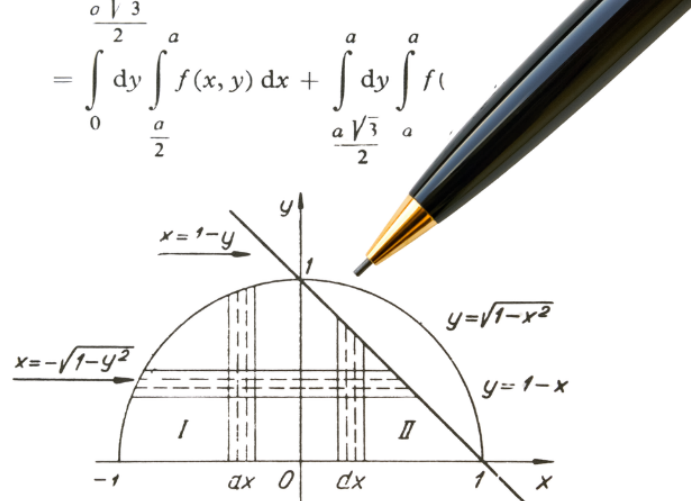
MARANHÃO. Plano Mais Ideb - Programa de fortalecimento do ENSINO MÉDIO - Orientações curriculares para o ensino médio - MATEMÁTICA. SEDUC-MA, 2017.

ROCATO, Paulo Sergio. The conceptions of the professor on the use of vídeo as potencializadores of the process education and learning. 2009. 172 f. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. 2009.

SADOVSKY, P. **O Ensino da Matemática hoje**, Enfoques, sentidos e desafios. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

SILVA, A. M. O Vídeo como Recurso Didático no Ensino de Matemática. **Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás, Goiânia Goiás, 2011.





8

EQUACÕES DIOFANTINAS E CONGRUÊNCIAS LINEARES: UMA APLICAÇÃO DE SOLUÇÃO SIMPLIFICADA

*DIOPHANTINE EQUATIONS AND LINEAR CONGRUENCES:
AN APPLICATION OF SIMPLIFIED SOLUTION*

João Coelho Filho¹

Marcus Vinicius Viegas Rodrigues²

Celina Amélia da Silva³

¹ Doutor, Departamento de Matemática e Informática – DEMATI-UEMA, São Luís-MA

² Mestre, Secretaria de Educação, Pedro do Rosário-MA

³ Doutora, Departamento de Matemática e Física, CESC-UEMA, São Luís - MA

RESUMO

A Aritmética Modular é uma ferramenta especial na Teoria dos Números, em particular a Aritmética Modular apresenta as Congruências e as Classes Residuais para uma elegante resolução das Equações Diofantinas, que é a principal contribuição deste trabalho. As contribuições impactam os discentes e docentes de Matemática com aplicações das Classes Residuais como ferramenta teórica para simplificar e agilizar a resolução dos problemas, auxiliando os alunos da Educação Básica e os alunos de graduação. O processo consiste em utilizar as classes residuais módulo p , p primo, em exemplos práticos e em seguida na resolução de problemas do cotidiano utilizando as propriedades de repetições das Congruências para resolver problemas de duas variáveis com soluções inteiras, que são as Equações Diofantinas transformadas em uma Congruência Linear. Em aplicações de Congruências Lineares e das Classes Residuais são resolvidos problemas clássicos propostos para utilização do Teorema Chinês do Restos, neste contexto resolvidos por Congruências Lineares.

Palavras-chave: Aritmética Modular; Equações Diofantinas, Resolução das Equações Diofantinas.

ABSTRACT

M odular Arithmetic is a special tool in Number Theory, in particular Modular Arithmetic presents Congruences and Residual Classes for an elegant resolution of Diophantine Equations, which is the main contribution of this work. The contributions impact Mathematics students and teachers with applications of Residual Classes as a theoretical tool to simplify and speed up problem solving, helping Basic Education students and undergraduate students. The process consists of using the residual classes module p , p prime, in practical examples and then in solving everyday problems using the properties of repetitions of Congruences to solve problems with two variables with integer solutions, which are the Diophantine Equations transformed into a Linear Congruence. In applications of Linear Congruences and Residual Classes, classical problems proposed for the use of the Chinese Remainder Theorem are solved, in this context solved by Linear Congruences.

Keywords: Modular Arithmetic; Diophantine Equations, Resolution of Diophantine Equations.



1. INTRODUÇÃO

O trabalho aborda uma aplicação de Congruência Linear que é um dos ramos da Aritmética Modular. A Congruência Linear tem aplicações no ensino, nos Critérios de Divisibilidade, nos dígitos verificadores de CPF, ISBN, cartões de crédito, códigos corretores de erros e outros. As Congruências Lineares são uma particularidade dos problemas do cotidiano solúveis pela Teoria das Congruências. Em especial é trabalhado uma aplicação das Congruências à resolução das Equações Diofantinas através das Congruências Lineares e da Teoria das Classes Residuais, trabalhadas em obras de professores e egressos do Mestrado Profissional em Rede Nacional da Instituição associada UEMA, em especial as obras Almeida (2019), Coelho e Almeida (2021) e Coelho e Rodrigues (2024), produções resultados de dissertação, seminários e congressos.

Aplicando com maestria, a dissertação que fundamenta este trabalho, é apresentada uma contribuição a aplicação das Classes Residuais como processo simplificativo para discentes e docentes de Matemática na solução de Equações Diofantinas através da resolução de problemas do cotidiano, que é um conteúdo bem definido e determinado por autores de clássicos da Teoria dos Números e da Aritmética, tais como Hefez (2016), Martinet *et al.* (2012) e Rodrigues (2024), que são obras clássica da Teoria dos Números e da Aritmética.

Ainda fundamentado em Rodrigues (2024), são utilizados exemplos práticos e resolução de problemas do cotidiano aplicando as propriedades de repetições das Congruências a partir dos últimos anos do ensino fundamental, tais como, problemas de relógios, calendários e de divisibilidades em resolução de problemas de duas variáveis com soluções inteiras.

Na seção que discorre das aplicações das Congruências Lineares e das Classes Residuais na resolução de problemas na esfera das Equações Diofantinas e Classes Residuais são realizadas aplicações mostrando a agilidade do método proposto na literatura preliminar e neste trabalho. Ainda nesta seção são resolvidos problemas clássicos do Teorema Chinês dos Restos, resolvidos por Congruências Lineares e Classes Residuais.

2. ALGORITMO DA DIVISÃO E MÁXIMO DIVISOR COMUM

O algoritmo da divisão de Euclides é um resultado importante da Teoria dos Números e também no fundamento das Congruências, das Classes Residuais e Congruências Lineares. É mostrado uma tradicional propriedade para números Naturais $\mathbb{N}$ e neste caso para um inteiro $\mathbb{Z}$, sendo o dividendo a , um inteiro, e o divisor b , um inteiro diferente de zero, para a obtenção do quociente q e do resto r que é um inteiro maior que zero e menor que o divisor em módulo. E formalmente, descreve-se por:

Teorema 1 [Algoritmo da Divisão de Euclides] Considere dois inteiros a e b , com $b \neq 0$, então existem únicos inteiros q e r tais que

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Os inteiros q e r , únicos, são denominados, respectivamente, de quociente e resto, e $r = 0$ se, e somente se, b é divisor de a ou b divide a , em símbolo: $b \mid a$. Além disso, quando, b divide a , existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$.

Em particular, determinando $a = -75$ e $b = 8$, obtém-se que $q = -10$ e $r = 5$, pois

$$-75 = 8 \cdot (-10) + 5.$$

Uma definição importante e utilizada a mais de dois milênios é a definição de Máximo Divisor Comum (mdc), citada nos Elementos de Euclides, a obra mantém um impacto significativo no desenvolvimento da ciência moderna e da atualidade, apresentando uma abordagem axiomática com provas rigorosas, aprimoradas com poucas variações nestes quase dois milênios e meio.

Definição 1 Considerando a e b dois inteiros não nulos. O máximo divisor comum de a e b é o inteiro positivo d que satisfaz às seguintes condições:

1. d divide a e d divide b ;
2. Se c divide a e se c divide b , então $c \leq d$.

O máximo divisor comum de a e b é indicado por: $d = \text{mdc}(a, b)$ e é imediato que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$. Além disso, pelo Algoritmo da Divisão,

$$a = qb + r \Rightarrow a - bq = r; 0 \leq r < b.$$

Como $\text{mdc}(a, b)$ divide a e divide b , tem-se que $\text{mdc}(a, b)$ divide r . Assim, $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Para determinar o máximo divisor comum entre dois inteiros a e b é utilizado o Algoritmo de Euclides. Neste caso:

Supondo que $a \geq b > 0$, pois

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(|a|, |b|).$$

Então existem $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = q_1 b + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Se $r_1 = 0$ então b divide a e $\text{mdc}(a, b) = b$. Se $r_1 \neq 0$, então existem $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b = q_2 r_1 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$ então r_1 divide b e $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1)$. Se $r_2 \neq 0$, então existem $q_3, r_3 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Seguindo o processo até encontrar $r_{n+1} = 0$. Assim,

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \dots = \text{mdc}(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Deste processo, obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b. \\ b &= q_2 r_1 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1. \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2. \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \text{ com } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + r_{n+1}, \text{ pois } r_{n+1} = 0. \end{aligned}$$



Tabela 1: Algoritmo de Euclides

	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	$\dots$	r_n	0	

Estas relações são representadas pela Tabela 1 denominada de Algoritmo de Euclides.

O Algoritmo de Euclides é utilizado para calcular $\text{mdc}(a,b)$ e para representar o $\text{mdc}(a,b)$ na forma $ax+by$. Note que da penúltima equação tem-se que:

$$r_n = r_{n-1}(-q_n) + r_{n-2}.$$

Substituindo o resto r_{n-1} da equação anterior, obtém-se

$$r_n = r_{n-3}(-q_n) + (q_n q_{n-1})r_{n-2}.$$

Com esse procedimento são eliminados sucessivamente os restos

$$r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_2, r_1$$

e r_n é determinado em termos de a e b , isto é, encontra-se $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\text{mdc}(a,b) = ax + by,$$

isto é, $\text{mdc}(a,b)$ é uma combinação de x e y .

Portanto, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 2 Sejam $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Então $\text{mdc}(a,b)$ existe. Além disso, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = \text{mdc}(a,b).$$

O exemplo seguinte mostra como determinar o $\text{mdc}(a,b)$ e escrever o $\text{mdc}(a,b)$ como combinação linear.

Exemplo 1 Determinar o máximo divisor comum entre 21 e 35 e em seguida escrever $\text{mdc}(35,21)$ como combinação de 21 e 35.

Solução: Pelo Algoritmo de Euclides tem-se a Tabela:

Tabela 2: $\text{mdc}(35,21)$.

	1	1	2
35	21	14	7
14	7	0	

Pela Tabela 2 o $\text{mdc}(35,14) = 7$ e $7 = 1 \cdot 21 - 14 \Rightarrow 7 = (1 \cdot 35 - 14) - 14 \Rightarrow 7 = 1 \cdot 35 - 2 \cdot 14$

Logo,

$$7 = 35(1) + 21(-2),$$

isto é,

$$35x + 21y = 7$$

com $x = 1$ e $y = -2$.

3. MÁXIMO DIVISOR COMUM E EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Diofanto viveu no século III em Alexandria, sob o domínio de Roma. Foi o único matemático de destaque na Grécia antiga que se dedicou à Teoria dos Números. Diofanto tratou algebricamente a Teoria dos Números, enquanto os predecessores utilizaram métodos algébricos para deduzir suas afirmações.

As equações Diofantinas das quais trata este trabalho são da forma

$$ax + by = c, (1)$$

com a, b coeficientes inteiros, além do termo independente c também inteiro. Os problemas consistem em determinar soluções x e y inteiras.

Considerando x_0, y_0 uma solução da equação (1). Então

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Como $\text{mdc}(a, b)$ divide a e b , tem-se que

$$\text{mdc}(a, b) \text{ divide } ax_0 + by_0 = c.$$

Reciprocamente, se $\text{mdc}(a, b)$ divide c . Então existe um inteiro k tal que $c = k \cdot \text{mdc}(a, b)$. Como existem inteiros m_0 e n_0 tais que

$$am_0 + bn_0 = \text{mdc}(a, b),$$

tem-se que

$$c = k \cdot \text{mdc}(a, b) = a(k \cdot m_0) + b(k \cdot n_0).$$

Assim, os inteiros $x_0 = k \cdot m_0$ e $y_0 = k \cdot n_0$ são uma solução da Equação (1).

Portanto, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 3 A equação $ax + by = c$ admite solução se, e somente se, $\text{mdc}(a, b)$ divide c .

Além disso,

$$x_0 + \frac{b}{\text{mdc}(a, b)}t \text{ e } y_0 - \frac{a}{\text{mdc}(a, b)}t$$

é uma solução denominada de solução geral da Equação (1). Pois,

$$a\left(x_0 + \frac{b}{\text{mdc}(a, b)}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{\text{mdc}(a, b)}t\right) = ax_0 + \frac{ab}{\text{mdc}(a, b)}t + by_0 - \frac{ab}{\text{mdc}(a, b)}t = ax_0 + by_0.$$

Portanto, obtém-se o resultado:

Teorema 4 Considerando x_0, y_0 uma solução particular da equação $ax + by = c$. Então, x, y é solução da equação se, e somente se,

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mdc}(a, b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mdc}(a, b)}t, \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{Z}.$$

A resolução das Equações Diofantinas é um problema clássico de aplicação do mdc e do Algoritmo de Euclides. Em particular, neste trabalho o problema (1) é resolvido aplicando mdc e na seção (7) é resolvido de forma rápida e ágil utilizando Congruências Lineares e Clases Residuais.

Problema 1 Em uma loja dois produtos custam R\$ 71,00 e R\$ 83,00, respectivamente. Qual quantidade inteira de ambos podem ser compradas com R\$ 1670,00?

Solução: Resolver o problema é encontrar solução positiva para Equação Diofantina:

$$71x + 83y = 1670.$$



Pelo Algoritmo de Euclides, Tabela 1, o $\text{mdc}(83, 71) = 1$ e pelo Teorema 3 a equação tem solução. Pela Tabela 1 obtém-se que: $71(-7) + 83 \cdot 6 = 1$.

Tabela 3: $\text{mdc}(83, 71)$.

	1	5	1	
83	71	12	11	1
12	11	1	0	

$$1 = 1 \cdot 12 - 11 = 1 \cdot 12 - (71 - 5 \cdot 12) \Rightarrow 1 = 6 \cdot 12 - 71 = 6(83 - 71) - 71$$

$$1 = 6 \cdot 83 - 7 \cdot 71.$$

Multiplicando a expressão por 1670, tem-se que $71(-11690) + 83(10020) = 1670$.

Uma solução particular é $x_0 = -11.690$ e $y_0 = 10.020$.

Como as soluções procuradas são inteiras, basta considerar a solução geral

$$\begin{cases} x = -11690 + 83t > 0 \\ y = 10020 - 71t > 0, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 140,84 \\ t < 141,13. \end{cases}$$

Assim, $t = 141$ e $x = 13$ e $y = 9$. Portanto, pode-se comprar 13 e 9 unidades de cada produto, respectivamente.

4. ARITMÉTICA MODULAR E PROPRIEDADES

A Aritmética Modular é uma ferramenta poderosa e versátil com muitas aplicações práticas. Utilizada para proteger informações, no caso para criptografia, utilizada para construção de algoritmos e estruturas de dados, neste caso na computação, utilizada para detectar erros em códigos, utilizada para estudar as propriedades da teoria dos números inteiros e outras utilidades. Em específico neste trabalho é utilizada para solucionar problemas na resolução das Equações Diofantinas.

A definição fundamental e inicial da Aritmética Modular é a definição de Congruência.

Definição 2 (Congruência) Dois inteiros a e b são congruentes módulo n , com n um número natural maior que 1, se os restos da divisão de a e de b por n são iguais. Em símbolo,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Considerando a congruente a b módulo n , isto é, $a \equiv b \pmod{n}$. Então existem, quocientes q_1 e q_2 e um resto r , tal que

$$a = n \cdot q_1 + r \text{ e } b = n \cdot q_2 + r.$$

Assim, $(a - b) = n(q_1 - q_2)$. Logo, n divide $a - b$.

Reciprocamente, se n divide $a - b$ e pelo Algoritmo da Divisão

$$a = n \cdot q_1 + r_1 \text{ e } b = n \cdot q_2 + r_2; 0 \leq r_1 < n \text{ e } 0 \leq r_2 < n.$$

Logo, $(a - b) = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$.

Note que n divide $(q_1 - q_2)$. Além disso, $0 \leq r_1 - r_2 < n$. Como n divide $(r_1 - r_2)$, tem-se que $r_1 - r_2 = 0$, isto é, $r_1 = r_2$.

Logo, $a \equiv b \pmod{n}$. Portanto, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 5 Considere a e b inteiros, $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, n divide $(a - b)$, isto é, $(a - b) = nk$ para $k \in \mathbb{Z}$.

As principais propriedades das Congruências são:

- (1) $a \equiv amodn$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$; pois, n divide $0 = a - a$;
- (2) Se $a \equiv b \pmod{n}$ implica que $b \equiv amodn$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$; pois, n divide $(a - b) = -(b - a)$;
- (3) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ implica que $a \equiv c \pmod{n}$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$; pois, n divide $(a - b)$ e n divide $(b - c)$ o que implica que n divide $(a - b) + (b - c) = (a - c)$;
- (4) $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$ para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; pois, n divide $(a - b)$ e n divide $(c - d)$ o que implica que n divide $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$;
- (5) $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \pmod{n}$ para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;
- (6) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{n}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ $k \in \mathbb{N}$.

A Congruência e suas propriedades são de grande utilidade na resolução de problemas e são a ferramenta para justificar os critérios de divisibilidade mnemônicos. Além disso, as congruências são o fundamento teórico das classes residuais.

Exemplo 2 (PROFMAT 2º ENQ 2015) Calcule o resto da divisão de 28^{237} por 13 utilizando as propriedades de congruências.

Solução: Note que $28 = 2 \cdot 13 + 2$, o que implica que $28 \equiv 2 \pmod{13}$.

Elevando ao quadrado, tem-se que

$$28^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{13}.$$

Elevando ao quadrado mais uma vez, tem-se que

$$28^4 \equiv 4^2 \equiv 3 \pmod{13}.$$

Multiplicando as duas últimas congruências, obtém-se que

$$28^6 \equiv 2^6 \equiv (-1) \pmod{13}.$$

Fazendo $237 = 6 \cdot 39 + 3$, tem-se que

$$28^{237} \equiv 28^{6 \cdot 39 + 3} \equiv (28^6)^{39} \cdot 28^3 \equiv (-1)^{39} \cdot 28^3 \equiv (-1)^3 \cdot 28^3 \equiv -28^3 \pmod{13}$$

Portanto, o resto da divisão de 28^{237} por 13 é 5.

5. CLASSES RESIDUAIS

Um inteiro n maior que 1 determina uma Classe Residual módulo n do elemento a inteiro é a classe denotada por $\bar{a}$ é o conjunto

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv amodn\}.$$

As Classes Residuais são conjuntos de números inteiros que possui o mesmo resto quando dividido pelo módulo n . Além disso $\bar{a} = \bar{b}$ se, e somente se, $a \equiv b \pmod{n}$.

Para cada a inteiro maior que 1, existe um único inteiro r , $0 \leq r < n$, tal que

$$a = n \cdot q + r.$$

Assim, também existe um e somente um $r \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv r \pmod{n}$, isto é, $\bar{a} = \bar{r}$.

No caso particular de $n = 4$, obtém-se que



$$\begin{cases} \bar{0} = 4\alpha, \alpha \in \mathbb{Z} \\ \bar{1} = 4\alpha + 1, \alpha \in \mathbb{Z} \\ \bar{2} = 4\alpha + 2, \alpha \in \mathbb{Z} \\ \bar{3} = 4\alpha + 3, \alpha \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{0} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ \bar{1} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ \bar{2} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ \bar{3} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \bar{0} \text{ se } a \text{ é múltiplo de } 4 \\ \bar{1} \text{ se } a \text{ tem resto } 1 \text{ quando dividido por } 4 \\ \bar{2} \text{ se } a \text{ tem resto } 2 \text{ quando dividido por } 4 \\ \bar{3} \text{ se } a \text{ tem resto } 3 \text{ quando dividido por } 4 \end{cases}$$

O conjunto de todas as classes residuais módulo 4 distintas são $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ e $\bar{3}$ e é representada por $\mathbb{Z}_4$, com

$$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

e o conjunto de todas as classes residuais módulo n distintas são $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ e é representada por $\mathbb{Z}_n$, com

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

e a congruência $a \equiv b \pmod{n}$ é constituída por $\bar{a} = \bar{b}$. E o conjunto $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ é denominado de sistema completo de resíduo módulo n se $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ são as n classes residuais módulo n .

Em $\mathbb{Z}_4$ as operações de soma e multiplicação são determinadas por:

$$\begin{array}{c|cccc} + & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}$$

As operações em $\mathbb{Z}_n$ são bem definidas e $\mathbb{Z}_n$ satisfaz as propriedades operatórias de adição e multiplicação de modo que $\bar{0}$ é o elemento neutro da adição e $\bar{1}$ é o elemento identidade da multiplicação.

Um elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ em $\mathbb{Z}_n$ é inversível, se existe um elemento $\bar{b} \neq \bar{0}$ também em $\mathbb{Z}_n$ tal que

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{1},$$

isto é, $ab \equiv 1 \pmod{n}$.

Considere um elemento $\bar{a}$ em $\mathbb{Z}_n$ inversível. Então existe um elemento $\bar{b}$ em $\mathbb{Z}_n$, tal que

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1},$$

isto é, $\bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{1} = nk, k \in \mathbb{Z}_n$.

Logo, $\bar{a} \cdot \bar{b} + n(-k) = 1$ e consequentemente $\text{mdc}(a, n) = 1$.

Reciprocamente, se $\text{mdc}(a, n) = 1$, então existe $\bar{x}$ e $\bar{y}$ tal que $\bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{n} \cdot \bar{y} = \bar{1}$,

Logo, $\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{1}$, isto é, $\bar{a}$ é inversível em $\mathbb{Z}_n$.

Portanto, obtém-se as seguintes propriedades:

Propriedade 1 Um elemento $\bar{a} \in Z_n$ é inversível se, e somente se, $\text{mdc}(a, n) = 1$.

Além disso, para p primo, o $\text{mdc}(a, p) = 1$, implicando em uma segunda propriedade:

Propriedade 2 Todo $\bar{a} \in Z_n - \{\bar{0}\}$, p primo, é inversível.

No caso particular de Z_7 , tem-se as seguintes operações de soma e multiplicação em $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$		·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	e	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$		$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$		$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$		$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Além disso, com 7 é primo, tem-se que todos elementos de $Z_7 - \{\bar{0}\} = Z_7$ tem inverso de cada $\bar{a} \in Z_7 - \{\bar{0}\}$ é:

$\bar{a} \in Z_7$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{a}^{-1} \in Z_7$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$

6. CONGRUÊNCIAS LINEARES

Considere os inteiros a e b e n um inteiro maior que 1, uma Congruência Linear é definida pelas equações da forma

$$ax \equiv b \pmod{n}, (2)$$

ou seja,

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{b}, a, b, x \in Z_n. (3)$$

Os inteiros x_0 que satisfazem a Equação (2), isto é, os inteiros x_0 , tal que

$$ax_0 \equiv b \pmod{n}$$

é solução da Congruência Linear. Além disso, os x_1 tais que

$$x_1 \equiv x_0 \pmod{n}$$

também são solução da Equação (2).

Pelo Teorema (5), n divide $ax_0 - b$ e existe um inteiro y_0 tal que

$$ax_0 - b = ny_0 \Rightarrow ax_0 - ny_0 = b.$$

Logo, o problema está simplificado a encontrar as soluções inteiras de uma Equação Diofantina Linear.

Se $\text{mdc}(a, n) = 1$, então $\bar{a}$ é inversível em Z_n . Logo, Equação (3) tem uma única solução

$$\bar{x} = \bar{a}^{-1}\bar{b},$$

isto é, $x \equiv a^{-1}b \pmod{n}$.



As soluções da Equação Diofantina $ax + by = c$ são da forma

$$x = x_0 + \frac{n}{d}t; t \in \mathbb{Z}, d = \text{mdc}(a, n)$$

e descritas por:

$$x_0, x_0 + \frac{n}{d}, x_0 + 2\frac{n}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{n}{d} \quad (4)$$

todas as d soluções congruentes entre si.

Aplicando o Algoritmo da Divisão Euclidiana em $t = dq + r$ com $0 \leq r < d$, tem-se que

$$x \equiv x_0 + \frac{n}{d}t \equiv x_0 + \frac{n}{d}r \pmod{n}.$$

Logo, x é congruente a uma das soluções da Equação (4).

7. EQUAÇÕES DIOFANTINAS E CONGRUÊNCIAS LINEARES

Para solucionar uma Equação Diofantina

$$ax + by = c,$$

é utilizado Congruência para transformar a Equação Diofantina em uma Congruência Linear,

$$ax \equiv c \pmod{n},$$

pela escolha adequada de um número p primo divisor de b .

Do mesmo modo, pode-se escolher adequadamente um p primo divisor de a e

$$by \equiv c \pmod{n}.$$

Pelo Teorema (3) a Equação Diofantina $ax + by = c$ admite solução se, e somente se, o $\text{mdc}(a, b)$ divide c . Além disso, os inteiros x_0, y_0 e uma solução particular da Equação Diofantina se, e somente se

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

e a solução x, y é a solução geral.

Considerando ainda a equação

$$ax + by = c,$$

e escolhendo adequadamente um p primo e divisor de b , tem-se que

$$ax \equiv c \pmod{p}.$$

Como $\bar{a}$ é inversível em $\mathbb{Z}_n$, existe um x_0 inteiro, tal que

$$x_0 \equiv a^{-1}c \pmod{p}.$$

Equivalentemente,

$$\bar{a}x = \bar{c}.$$

Portanto, $x_0 \equiv a^{-1}c$ é uma solução particular da Equação Diofantina. Substituindo x_0 em $ax + by = c$, encontra-se y_0 . E a Equação Diofantina $ax + by = c$ tem como solução parti-

cular x_0 e y_0 .

Inicialmente, são considerados exemplos simples de aplicação das Congruências Lineares e Classes Residuais com exemplos utilizando coeficientes que são números primos e consequentemente o máximo divisor comum é 1, possibilitando uma procura rápida por uma solução particular x_0 e y_0 em $\mathbb{Z}_p$. Posteriormente, exemplos distintos e problemas clássicos de aplicação das Equações Diofantinas.

Exemplo 3 Resolver a Equação Diofantina,

$$8x + 13y = 135 \quad (5)$$

e determinar todas as soluções.

Solução: A Equação Diofantina do Exemplo (3) tem solução, pois o $\text{mdc}(8,13)$ divide 135. Escolhendo $p = 13$, tem-se em $\mathbb{Z}_{13}$ que:

$$(8x + 13y) \equiv 135 \pmod{13},$$

isto é,

$$8x \equiv 5 \pmod{13}. \quad (6)$$

Para resolver a Congruência Linear é necessário determinar o inverso de 8 em $\mathbb{Z}_{13}$. O inverso de $\bar{8}$ em $\mathbb{Z}_{13}$ é 5, pois $8 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{13}$.

Multiplicando a Expressão (6) por 5, que é o inverso de 8 em $\mathbb{Z}_{13}$, obtém-se que

$$5 \cdot 8x \equiv 5 \cdot 5 \pmod{13} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{13}.$$

Logo, $x_0 = 12$. Substituindo $x_0 = 12$ na Equação (5), encontra-se $y_0 = 3$.

Assim, a solução particular é $x_0 = 12$ e $y_0 = 3$ e a solução geral é

$$\begin{cases} x = 12 + 13t \\ y = 3 - 8t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4 Resolver a Equação Diofantina,

$$17x - 28y = 37. \quad (7)$$

e determinar todas as soluções.

Solução: A Equação Diofantina do Exemplo (4) tem solução, pois o $\text{mdc}(17,28)$ divide 37. Escolhendo $p = 17$, tem-se em $\mathbb{Z}_{17}$ que:

$$(17x - 28y) \equiv 37 \pmod{17},$$

isto é,

$$-11y \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow 6y \equiv 3 \pmod{17}. \quad (8)$$

Multiplicando a Expressão (8) por 3, que é o inverso de $\bar{6}$ em $\mathbb{Z}_{17}$, obtém-se que

$$3 \cdot 6y \equiv 3 \cdot 3 \pmod{17} \Rightarrow y \equiv 9 \pmod{17}.$$

Logo, $y_0 = 9$. Substituindo $y_0 = 9$ na Equação (8), encontra-se $x = 17$.

Assim, a solução particular é $x_0 = 17$ e $y_0 = 9$ e a solução geral é

$$\begin{cases} x = 17 - 28t \\ y = 9 - 17t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$$

No exemplo seguinte é utilizado a aplicação das Congruências Lineares e Classes Residuais em coeficientes que são números compostos e consequentemente o máximo divisor comum é diferente de 1. A proposta é construir uma procura rápida por uma solução

particular x_0, y_0 em $\mathbb{Z}_p$ em todas as situações dos coeficientes das Equações Diofantinas.

Exemplo 5 Resolver a equação Diofantina

$$90x + 28y = 22. \quad (9)$$

determinando todas as soluções.

Solução: A Equação Diofantina do Exemplo (5), $90x + 28y = 22$ é equivalente a Equação Diofantina

$$45x + 14y = 11. \quad (10)$$

Portanto, as soluções da equação (9) são as mesmas da equação (10), pois está última é obtida da anterior multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Resolvendo a equação (10): a equação tem solução, pois o $\text{mdc}(45, 14)$ divide 11. Escolhendo $p = 7$, tem-se em $\mathbb{Z}_7$ que:

$$(45x + 14y) \equiv 11 \pmod{7},$$

isto é,

$$3x \equiv 4 \pmod{7}. \quad (11)$$

Multiplicando a equação (11) por 5, que é o inverso de 3 em $\mathbb{Z}_7$, tem-se que

$$5 \cdot 3x \equiv 5 \cdot 4 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}.$$

Logo, $x_0 = 6$. Substituindo $x_0 = 6$ na Equação (7), encontra-se que $y_0 \notin \mathbb{Z}$. No entanto, $x_0 = 6 + 7k, k \in \mathbb{Z}$, isto é, $x_0 = \dots -1, 6, 13 \dots$. Agora, substituindo $x_0 = -1$, obtém-se que $y_0 = 4$. Assim, a solução particular é $x_0 = -1, y_0 = 4$ e a solução geral

$$\begin{cases} x = -1 + 14t \\ y = 4 - 45t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$$

Na Equação (10), se utilizar $x_0 = 6$, obtém-se que $y_0 = -41$.

Problema 2 (PROFMAT 1º ENQ 2025) João irá gastar totalmente R\$ 47,00 na compra de pacotes de doces e serpentinas. Cada pacote de doce custa R\$ 1,50 e cada pacote de serpentina custa R\$ 2,50. Encontre todas as formas que ele pode efetuar essa compra.

Solução: A equação que modela o problema é

$$1,50x + 2,50y = 47, \quad (12)$$

com x a quantidade de doces e y a quantidade de serpentinas.

A Equação (12) não possui coeficientes inteiros. Multiplicando a equação (12) por 2, tem-se que

$$3x + 5y = 94. \quad (13)$$

As soluções da Equação (12) são as mesmas soluções da Equação (13) que é uma Equação Diofantina. Assim, deve-se resolver a Equação (13). Resolvendo a Equação Diofantina

$$3x + 5y = 94.$$

Selecionando $p = 5$, tem-se que

$$3x + 5y = 94. (3x + 5y) \equiv 94 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Multiplicando por $\bar{2}$, que é o inverso de $\bar{3}$ em $\mathbb{Z}_5$, tem-se

$$2 \cdot 3x \equiv 2 \cdot 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5}.$$

Logo $x_0 = 3$ é uma solução e substituindo $x_0 = 3$ na equação (13), tem-se que $y_0 = 17$. E uma solução particular é $x_0 = 3$ confetes e $y_0 = 17$ serpentinas, isto é

$$S = \{(x_0, y_0)\} = \{(3, 17)\}.$$

A solução geral é $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 17 - 3t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Como } \begin{cases} 3 + 5t \geq 0 \\ 17 - 3t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > \frac{-3}{5} = -0,6 \\ t < \frac{17}{3} = 5,66 \dots \end{cases}.$$

tem-se que $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ é compatível com a solicitação do problema.

Logo, as formas que João pode efetuar a compra são seis, a saber:

$$S = \{(x, y)\} = \{(3, 17); (8, 14); (13, 11); (18, 8); (23, 5); (28, 2)\}.$$

Problema 3 (OBMEP) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R\$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

Solução: A equação que modela o problema é

$$4x + 7y = 299, (14)$$

com x a quantidade de botões e y a quantidade de laços. Além disso, R\$ 2,99 são equivalentes a 299 centavos e assim o termo independente é uma quantidade inteira e compatível com os coeficientes das variáveis.

Selecionando $p = 7$, tem-se que

$$(4x + 7y) \equiv 299 \pmod{7} \Rightarrow 4x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Multiplicando por $\bar{2}$, que é o inverso de $\bar{4}$ em $\mathbb{Z}_7$, tem-se que

$$2 \cdot 4x \equiv 2 \cdot 5 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{7}.$$

Logo $x_0 = 3$ é uma solução e substituindo $x_0 = 3$ na Equação (14), tem-se que $y_0 = 41$. E uma solução particular é $x_0 = 3$ botões e $y_0 = 41$ laços, isto é, $S = \{(x_0, y_0)\} = \{(3, 41)\}.$

A solução geral é $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = 41 - 4t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$

Como

$$\begin{cases} 3 + 7t \geq 0 \\ 41 - 4t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > \frac{-3}{7} = -0,42 \dots \\ t < \frac{41}{4} = 10,25, \end{cases}$$

tem-se que $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ é compatível com a solicitação do problema. Logo, as formas que a costureira fez as blusas foram onze, a saber:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y)\} \\ &= \{(3, 41); (10, 37); (17, 33); (24, 29); (31, 25); (38, 21); (45, 17); (52, 13); (59, 9); (66, 5); (73, 1)\}. \end{aligned}$$



Problema 4 Em uma loja dois produtos custam R\$ 71,00 e R\$ 83,00, respectivamente. Qual quantidade inteira de ambos podem ser compradas com R\$ 1670,00?

Solução: A equação que modela o problema 4 é

$$71x + 83y = 1670, (15)$$

e esta equação tem solução, pois, $\text{mdc}(71,83) = 1$ que divide 1670.

Além disso, este Problema está resolvido na Seção (3) Problema (1) utilizando a ferramenta clássica: Máximo Divisor Comum. Nesta seção é utilizado a proposta de aplicar as Congruências Lineares.

Escolhendo $p = 71$, tem-se que

$$(71x + 83y) \equiv 1670 \text{ mod } 71 \Rightarrow 12y \equiv 37 \text{ mod } 71. (16)$$

Multiplicando por $\bar{6}$ que é o inverso de $\bar{12}$ em Z_{71} , tem-se que

$$72y \equiv 222 \text{ mod } 71 \Rightarrow y \equiv 9 \text{ mod } 71.$$

Logo, $y_0 = 9$ e substituindo na Equação (15), encontra-se $x_0 = 13$. Assim, a solução é:

$$x_0 = 13e y_0 = 9.$$

Portanto, a quantidade comprada são 13 unidades do primeiro produto e 9 do segundo.

Problema 5 Dispondo de R\$ 110,00 quais as quantias que se podem gastar comprando selos que custam R\$ 7, 00 e R\$ 9,00?

Solução: A equação que modela o problema 5 é

$$7x + 9y = 110, (17)$$

que possui solução inteira.

Assim, escolhendo $p = 7$, tem-se que

$$(7x + 9y) \equiv 110 \text{ mod } 7 \Rightarrow 2y \equiv 5 \text{ mod } 7.$$

Multiplicando por $\bar{4}$ que é o inverso de $\bar{2}$ em Z_7 , tem-se que

$$4 \cdot 2y \equiv 4 \cdot 5 \text{ mod } 7 \Rightarrow y \equiv 6 \text{ mod } 7.$$

Logo, $y_0 = 6$ e substituindo na Equação (17), encontra-se $x_0 = 8$. Assim, a solução inteira positiva é única: $x_0 = 8e y_0 = 6$.

Portanto, são comprados 8 selos que custam 7 reais e 6 selos de 9 reais.

O segundo Exame Nacional de Qualificação-EQN do PROFMAT do ano de 2020, aplicou o problema.

Problema 6 (ROFMAT 2º ENQ 2020) Determine um número inteiro entre 1200 e 1400 que deixa restos 2 e 6 quando dividido, respectivamente, por 11 e 13.

O problema deixa uma sugestão velada da resolução pelo Teorema Chinês do Resto que é um conteúdo introdutório de Teoria dos Números, no entanto, é resolvido por Congruência Linear, podendo ser aplicado também no Ensino Básico.

Solução: O problema é modelado pelo sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \text{ mod } 11 \\ x \equiv 6 \text{ mod } 13 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 13 e a segunda por 11, tem-se

$$\begin{cases} 13x \equiv 26 \text{ mod } 143 \\ 11x \equiv 66 \text{ mod } 143 \end{cases}$$

Somando as congruências, tem-se que

$$24x \equiv 92 \pmod{143}.$$

Multiplicando por $\overline{6}$, que é o inverso de $\overline{24}$ em Z_{143} , tem-se que

$$6 \cdot 24x \equiv 6 \cdot 92 \pmod{143} \Rightarrow x \equiv 123 \pmod{143}.$$

Logo, $x = 123 + 143t, t \in \mathbb{Z}$ e para $t = 8$, tem-se o número inteiro solicitado: $x = 1.267$, pois $1.200 < 1.267 < 1.400$.

Teorema Chinês dos Restos: Sejam $n_1, n_2, \dots, n_r$ inteiros positivos dois a dois primos entre si, isto é, tais que $\text{mdc}(n_i, n_j) = 1$ para $i \neq j$. Nestas condições, o sistema de congruência

$$\text{lineares: } \begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_r \pmod{n_r}; \end{cases}$$

tem uma única solução

$$x = M_1 c_1 y_1 + M_2 c_2 y_2 + \dots + M_r c_r y_r \pmod{M},$$

com $M = n_1 n_2 \dots n_r$, $M_i = \frac{M}{n_i}$ e y_i é o inverso multiplicativo de M_i módulo n_i , calculado por

$$M_i y_i \equiv 1 \pmod{n_i}$$

Para resolver o problema (6) pelo Teorema Chinês do Resto, escreve-se o sistema de congruência:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 6 \pmod{13} \end{cases}; \text{ para } 1200 < x < 1400.$$

Como o $\text{mdc}(11, 13) = 1$, o sistema é resolvido aplicando o Teorema Chinês dos Restos. Em seguida é considerado

$$M = 11 \cdot 13 = 143, M_1 = \frac{143}{11} = 13 \text{ e } M_2 = \frac{143}{13} = 11.$$

A solução geral é dada por

$$x = M_1 c_1 y_1 + M_2 c_2 y_2 + 143t; t \in \mathbb{Z},$$

Além disso, $c_1 = 2, c_2 = 6$ e y_1, y_2 são as soluções das congruências

$$M_1 y_1 \equiv 1 \pmod{11} \text{ e } M_2 y_2 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Isto é,

$$\begin{cases} 13y_1 \equiv 1 \pmod{11} \\ 11y_2 \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 \equiv 1 \pmod{11} \\ 11y_2 \equiv 1 \pmod{13} \end{cases}$$

Assim, $y_1 = 6$ e $y_2 = 6$. Logo,

$$x = 13 \cdot 6 \cdot 2 + 11 \cdot 6 \cdot 6 + 143t = 552 + 143t.$$

Fazendo $t = 5$, tem-se $x = 1267$.

O Teorema Chinês do Resto foi utilizado para resolver o problema de determinar o número de soldados quando se conhecia os restos da divisão desse número por diferentes divisores. Por exemplo, se os soldados eram postos em linhas de três soldados, sobriam dois soldados, se postos em linhas de cinco, restavam 3 soldados, e quando postos em



linhas de sete, restavam 1 soldado, sabendo que os soldados são mais de uma centena e menos de duas centenas. O Teorema Chinês do Resto permite determinar o número total de soldados.

O problema para determinar o número de soldados é modelado pelo seguinte sistema de Congruências Lineares:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

Como o $\text{mdc}(3,5,7) = 1$, o sistema é resolvido aplicando o Teorema Chinês dos Restos. Em seguida é calculado

$$M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15.$$

A solução geral é dada por

$$x = M_1 c_1 y_1 + M_2 c_2 y_2 + M_3 c_3 y_3 + 105t; t \in \mathbb{Z},$$

Além disso, $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 1$ e y_1, y_2, y_3 são as soluções das congruências

$$35y_1 \equiv 1 \pmod{3}, 21y_2 \equiv 1 \pmod{5}, 15y_3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Isto é, $\begin{cases} 35y_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ 21y_2 \equiv 1 \pmod{5} \\ 15y_3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ y_2 \equiv 1 \pmod{5} \\ y_3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$

Assim, $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 1$. Logo,

$$x = 35 \cdot 2 \cdot 2 + 21 \cdot 3 \cdot 1 + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 105t = 218 + 105t.$$

Fazendo $t = -1$, tem-se $x = 113$.

Portanto, a tropa tem 113 soldados.

O problema resolvido pelo Teorema Chinês do Resto, é também resolvido por Congruência Linear. O problema é modelado pelo sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $M_1 = 35$, a segunda por $M_2 = 21$ e a última por $M_3 = 15$, tem-se

$$\begin{cases} 35x \equiv 70 \pmod{105} \\ 21x \equiv 63 \pmod{105} \\ 15x \equiv 15 \pmod{105} \end{cases}$$

Somando as equações de congruências, tem-se que

$$71x \equiv 148 \pmod{105} \Rightarrow 71x \equiv 43 \pmod{105}.$$

Multiplicando $\overline{71}$ que é inverso de $\overline{71}$ em $\mathbb{Z}_{105}$, tem-se que

$$71 \cdot 71x \equiv 71 \cdot 43 \pmod{105} \Rightarrow x \equiv 8 \pmod{105}.$$

Logo, $x = 8 + 105t, t \in \mathbb{Z}$ e para $t = 1$, tem-se o número inteiro solicitado: $x = 113$.

Nesta última aplicação é realizada a resolução de um problema clássico pelo Teorema Chinês dos Restos e em seguida pela aplicação da proposta deste trabalho como uma solução alternativa.

A história chinesa descreve que os generais chineses logo depois de uma batalha, sempre contavam suas tropas para saber a quantidade de homens mortos no combate. A contagem era realizada da seguinte forma: ordenava em colunas comum certo padrão de tamanho, e repetia esse processo repetidas vezes com variados tamanhos, depois, contavam as tropas que restavam, assim o problema resultava no total de perdas.

Supondo que o general chinês comandasse 1.800 soldados para uma determinada batalha. Ao fim do confronto, o general mandou que os soldados se pusessem em linha para fazer a contabilidade dos soldados após a batalha, dessa forma ordenou que os soldados se alinhassem de 5 em 5 soldados, e sobrou 1 soldado. Quando alinhou de 6 em 6 verificou que sobraram 3. Quando alinhou de 7 em 7 e sobraram 2 soldados. Depois um alinhamento de 13 em 13, não sobraram nenhum soldado. Quantos soldados o general tinha?

Solução: O sistema de equações que determina a solução é:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$$

Como 5, 6, 7 e 13 são primos entre si, o sistema é solúvel pelo Teorema Chinês dos Restos. Além disso:

a) $M = 2.730, M_1 = 546, M_2 = 455, M_3 = 390 \text{ e } M_4 = 210;$

b) $c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 2 \text{ e } c_4 = 0;$

c) $\begin{cases} 546y_1 \equiv 1 \pmod{5} \\ 455y_2 \equiv 1 \pmod{6} \\ 390y_3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \equiv 1 \pmod{5} \\ 5y_2 \equiv 1 \pmod{6} \\ 5y_3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$

e assim $y_1 = 1, y_2 = 5 \text{ e } y_3 = 3$. Logo,

$$x = 1 \cdot 546 \cdot 1 + 3 \cdot 455 \cdot 5 + 2 \cdot 390 \cdot 3 + 2.730t = 9.711 + 2.730t; t \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo, $t = 3$, tem-se $x = 1.521$. Logo, restaram 1.521 soldados na tropa do general após a batalha.

O problema solucionado pelo Teorema Chinês dos Restos é resolvido por Congruência Linear de maneira similar ao utilizado no Problema (6).

Solução alternativa: O problema de um sistema de Equações lineares é reduzido a uma única Equação Linear:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$$

As equações são multiplicadas por $M_1 = 546, M_2 = 455, M_3 = 390 \text{ e } M_4 = 210$ respectivamente, obtendo

$$\begin{cases} 546x \equiv 546 \pmod{2730} \\ 455x \equiv 1365 \pmod{2730} \\ 390x \equiv 780 \pmod{2730} \\ 210x \equiv 0 \pmod{2730} \end{cases}$$

Somando as congruências, tem-se que

$$1.601x \equiv 2.691 \pmod{2.730}.$$



Multiplicando por $\overline{1151}$, que é o inverso de $\overline{1601}$ em Z_{2130} , tem-se que

$$1151 \cdot 1.601x \equiv 1.151 \cdot 2.691 \pmod{2.730} \Rightarrow x \equiv 1521 \pmod{2.730}.$$

Logo, $x = 1521 + 2.730t, t \in Z$ e para $t=0$, tem-se o número inteiro solicitado: $x = 1.521$.

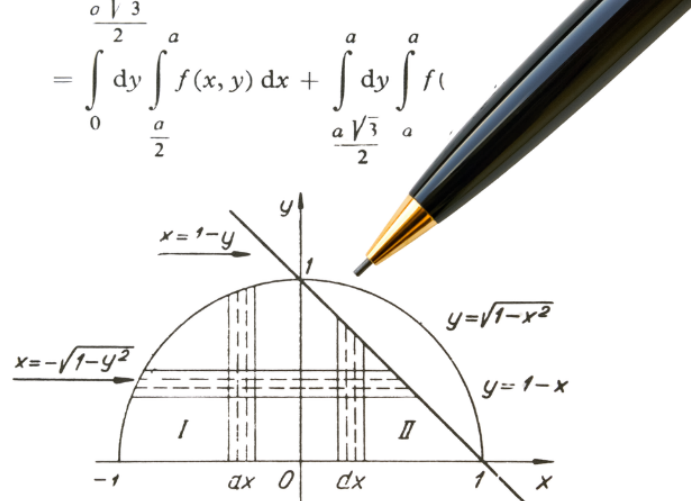
Esta solução é uma alternativa, no entanto, não é menos trabalhosa, como acontece na utilização das Congruência Lineares para solucionar as Equações Diofantinas.

7. RESULTADOS

A importância da Aritmética Modular no ensino é extraordinária e totalmente relevante, em especial as Congruências. Os docentes de matemática podem inserir o estudo das Equações Diofantinas junto a resolução dos sistemas lineares a duas variáveis. Esse objeto de conhecimento de aulas atrelados aos conteúdos de Teoria dos Números existentes nas matrizes curriculares, traz um rol de aplicações de fácil compreensão pelos alunos da educação básica, tais como à divisibilidade, uso do calendário, uso do relógio, aos dígitos verificadores do CPF, dos cartões de crédito, número de ISBN, entre outros. E neste trabalho é mostrada a simplicidade e a agilidade na resolução das equações de Diofanto de Alexandria. A simplicidade e rapidez da proposta é mostrada nas aplicações comparativas do Máximo Divisor Comum e das Congruências Lineares e Classes Residuais. A proposta para resolução das Equações Diofantinas é fortemente recomendável, facilita e agiliza a procura por solução. No entanto, o processo não é recomendável sempre para resolução dos sistemas de Congruências Lineares. A aplicação de resultado é a solução das Equações Diofantinas numa aplicação simplificada das Congruências Lineares.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Fillippe de. **Aritmética Modular e Suas Aplicações: uma experiência de atuação no Ensino Básico**. Dissertação PROFMAT- UEMA, São Luís, MA, 2019.
- COELHO, J. e ALMEIDA, F. **Aritmética Modular Aplicada aos Critérios de Divisibilidade Mnemônicos e Não Mnemônicos**. Ebook Formando Docentes Construindo Saberes PROFMAT-UEMA, UEMA, São Luís - MA. 2021.
- COELHO, J. e RODRIGUES, M. V. V. **Congruências Aplicada à Resolução das Equações Diofantinas**. II Workshop Nacional Online do PROFMAT, SBM, 2024.
- HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Segunda edição, Rio de Janeiro, SBM, 2016.
- MARTINEZ, F. E. B., MOREIRA, C. G. T., SALDANHA, N. C. **Tópicos de Teoria dos Números**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- RODRIGUES, M. V. V. **Aritmética Modular Aplicada**. Dissertação, PROFMAT- UEMA, São Luís - MA. 2024



9

GAMIFICAÇÃO NO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM: ESTRATÉGIAS LÚDICAS PARA POTENCIALIZAR A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

GAMIFICATION IN TEACHING THE LINEAR FUNCTION: PLAYFUL STRATEGIES TO ENHANCE MATHEMATICAL LEARNING

Raimundo Cazuya da Silva Neto¹
Waléria de Jesus Barbosa Soares²

João Aranha Barros¹

Francisco das Chagas Soares¹

Giuliano Eduardo Batista Cutrim¹

Jadiel Carlos Asevedo Silva¹

Harryson Guilherme Moraes Andrade³

Valterlli Costa Rocha⁴

¹ Doutorando em Ensino, UEMA, São Luís - MA

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UEMA, São Luís - MA

³ Mestre em Ensino de Física, UFMA, São Luís - MA

⁴ Mestre em Matemática, UEMA, Urbano Santos- MA

RESUMO

A gamificação tem ganhado espaço no campo educacional como uma estratégia inovadora capaz de transformar o ensino em uma experiência mais dinâmica e envolvente. No contexto da Matemática, em especial no estudo da função afim, essa metodologia surge como alternativa promissora para superar as dificuldades enfrentadas pelos alunos e estimular a participação ativa em sala de aula. Este estudo apresenta e analisa a aplicação de três propostas gamificadas: o jogo dos pares, o Qual é a função afim? e o Bingo da função afim. Cada uma dessas atividades foi planejada para aproximar os conceitos matemáticos do cotidiano, favorecendo a aprendizagem significativa. Os resultados evidenciam que a gamificação contribui não apenas para o desenvolvimento de competências cognitivas, como raciocínio lógico, memória e resolução de problemas, mas também para o fortalecimento de habilidades socioemocionais, como cooperação, comunicação e engajamento coletivo. Observou-se ainda que os jogos aplicados despertaram curiosidade, reduziram a resistência inicial dos estudantes e ampliaram a compreensão sobre representações algébricas e gráficas da função afim. Além de tornar o ensino mais atrativo, a gamificação possibilita ao professor diversificar suas metodologias, integrando atividades lúdicas com recursos digitais, como o software GeoGebra, e estabelecendo conexões interdisciplinares com áreas como Física e Criptografia. Contudo, sua implementação exige planejamento detalhado, formação docente e adequação das atividades aos objetivos de aprendizagem. Conclui-se que a gamificação, quando bem aplicada, representa um recurso didático valioso para o ensino da função afim, promovendo maior motivação, participação efetiva e compreensão sólida dos conteúdos.

Palavras-chave: Gamificação, Ensino de Matemática, Função Afim, Metodologias Ativas, Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

Gamification has gained ground in the educational field as an innovative strategy capable of transforming teaching into a more dynamic and engaging experience. In the context of Mathematics, particularly in the study of the linear function, this methodology emerges as a promising alternative to overcome students' difficulties and to stimulate active participation in the classroom. This study presents and analyzes the application of three gamified proposals: the Matching Pairs Game, what is the Linear Function? and the Linear Function Bingo. Each of these activities was designed to bring mathematical concepts closer to everyday life, thus fostering meaningful learning. The results show that gamification contributes not only to the development of cognitive skills, such as logical reasoning, memory, and problem solving, but also to the strengthening of socio-emotional skills, such as cooperation, communication, and group engagement. It was also observed that the applied games aroused curiosity, reduced students' initial resistance, and broadened their understanding of algebraic and graphical representations of linear functions. In addition to making teaching more attractive, gamification allows teachers to diversify their methodologies by integrating playful activities with digital resources, such as GeoGebra software, and by establishing interdisciplinary connections with areas such as Physics and Cryptography. However, its implementation requires careful planning, teacher training, and alignment of activities with the intended learning objectives. It is concluded that gamification, when properly applied, represents a valuable didactic resource for teaching the linear function, promoting greater motivation, active participation, and a solid understanding of the content.

Keywords: Gamification, Mathematics Teaching, Linear Function, Active Methodologies, Meaningful Learning.

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área central na formação escolar, presente em diversas disciplinas e situações do cotidiano. Seu ensino no ensino básico contribui para desenvolver raciocínio lógico, capacidade de resolver problemas, criatividade e pensamento crítico. Também favorece a organização, a comunicação e a tomada de decisões, já que está presente em atividades como compras, culinária, leitura de mapas e gestão do tempo.

Apesar de sua relevância, ensinar Matemática ainda representa desafios. É necessário adotar estratégias que despertem interesse e proporcionem aprendizado significativo. Entre elas, destacam-se jogos, desafios e situações próximas da realidade dos alunos, que tornam o estudo mais prazeroso e marcante.

A gamificação tem se mostrado eficaz nesse processo, especialmente no estudo de funções afins. Ao incorporar elementos típicos dos jogos, favorece o engajamento, estimula a autonomia, melhora a memória e incentiva a participação ativa dos estudantes. Além de tornar as aulas mais atraentes, possibilita a contextualização dos conteúdos, mostrando sua aplicação prática.

Essa abordagem também promove o desenvolvimento de habilidades como análise, interpretação e cooperação, além de estimular uma postura mais crítica e reflexiva. O professor atua como mediador, enquanto os alunos assumem papel de protagonistas, o que contribui para ampliar o interesse e o desempenho em Matemática.

Ensinar Matemática exige metodologias que despertem interesse e tornem o aprendizado mais duradouro. Nesse sentido, a gamificação tem se mostrado eficaz, especialmente no estudo de funções afins. Ao incorporar elementos de jogos, estimula a participação, a autonomia e a contextualização de conceitos, tornando as aulas mais atrativas e aplicáveis (Santiago; Sousa; Alves, 2022).

Assim, a pesquisa busca analisar como a gamificação pode favorecer a motivação, o engajamento e a compreensão dos estudantes, além de propor práticas que tornem o ensino mais dinâmico e próximo da realidade dos alunos.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os caminhos metodológicos deste estudo configuram o processo adotado para atingir os objetivos propostos. De acordo com Lakatos e Marconi (2003), a investigação científica constitui-se em um procedimento formal e sistemático, baseado em reflexão crítica e sustentado por métodos rigorosos que permitem compreender ou revelar aspectos da realidade.

Quanto à finalidade, a pesquisa pode ser de natureza básica ou aplicada. Este trabalho contempla ambas: a básica, voltada para a ampliação do conhecimento sem preocupação imediata com a utilização prática, e a aplicada, orientada à resolução de problemas concretos, buscando respostas de curto e médio prazo. Stokes (2005) ressalta que essas modalidades não são excludentes, mas podem se complementar. Nesse contexto, a pesquisa aplicada aqui se justifica pela necessidade de propor alternativas pedagógicas, como a gamificação, para enfrentar desafios de aprendizagem.

A pesquisa básica, conforme Bush (1945), objetiva gerar saberes que sustentam o progresso científico e tecnológico, independentemente de aplicação imediata. Já a aplicada

dialoga diretamente com demandas sociais e educacionais, aproximando teoria e prática.

Quanto à abordagem, este trabalho é qualitativo, pois não se fundamenta em dados numéricos, mas na interpretação de significados, percepções e experiências. Essa perspectiva permite captar dimensões explícitas e implícitas, traduzindo-as em análise crítica e consistente (Chizzotti, 2003).

Por fim, a investigação caracteriza-se como bibliográfica, uma vez que utiliza produções já publicadas como fonte de análise, possibilitando organizar, discutir e interpretar informações relevantes sobre o tema.

3. O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM

A função afim descreve a relação linear entre duas variáveis, sendo um dos primeiros conteúdos de funções no currículo escolar. De acordo com a BNCC, sua abordagem ocorre no 9º ano, servindo de base para conceitos matemáticos mais complexos (Júnior; Farias, 2018). O ensino pode adotar diferentes recursos, como atividades convencionais, modelagem matemática, uso de Libras ou softwares educacionais, possibilitando maior diversidade de representações (Silva; Pereira, 2023).

Entre os obstáculos enfrentados, destacam-se a dificuldade em compreender o conceito, traçar gráficos, identificar domínio, interpretar funções constantes e converter representações algébricas em gráficas. Tais barreiras reforçam a necessidade de estratégias que articulem teoria e prática, aproximando o conteúdo do cotidiano do estudante.

Duval (2011) evidencia que o problema central não reside nos conceitos matemáticos em si, mas na ausência de domínio das regras de correspondência entre registros, especialmente na passagem do gráfico para a equação. Sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica mostra que a interpretação global das propriedades figurais é decisiva para estabelecer conexões entre dados visuais e expressões algébricas.

Nesse sentido, o ensino deve contemplar múltiplas formas de representação, linguagem natural, escrita simbólica, tabelas, diagramas e gráficos favorecendo processos de conversão e maior compreensão. A pesquisa qualitativa, ao captar percepções e interpretar práticas pedagógicas, contribui para analisar como essas estratégias podem ser aplicadas no ensino da função afim (Chizzotti, 2003).

Em síntese, a diversificação metodológica e o uso de abordagens teóricas, como a TRRS, possibilitam superar dificuldades recorrentes e promover uma aprendizagem mais significativa.

3.1 Gamificação No Ensino-Aprendizagem da Matemática

A gamificação surge como uma proposta ativa no ensino de Matemática, com o objetivo de ampliar a participação dos alunos e tornar o processo de aprendizagem mais envolvente. Ao incorporar características próprias dos jogos, cria-se um ambiente que estimula estratégias de superação de desafios, enquanto os conceitos matemáticos são assimilados de maneira mais prática.

Estudos recentes destacam que a gamificação atua como recurso eficaz para diversificar metodologias, reduzindo a dependência de práticas tradicionais e aumentando o interesse dos estudantes em sala de aula (Alves *et al.*, 2022). Nesse mesmo horizonte, Esquivel (2017) aponta que sua função essencial é unir o caráter motivacional dos jogos aos

conteúdos curriculares, favorecendo maior engajamento.

Prazeres (2019) complementa que a aplicação de dinâmicas lúdicas em contextos educacionais busca promover envolvimento emocional e motivação intrínseca, elementos fundamentais para atingir metas de aprendizagem. Para isso, é necessário estabelecer objetivos claros, definir recompensas e estruturar as etapas de forma planejada.

Assim, a gamificação se configura como um recurso que, quando bem direcionado, pode fortalecer o protagonismo discente e transformar a sala de aula em um espaço interativo e motivador, alinhado às demandas contemporâneas da educação (Chizzotti, 2003).

No contexto escolar, a gamificação pode oferecer contribuições significativas, adicionando valor ao processo de ensino, conforme ilustrado no Tabela 1.

Tabela 1. Áreas e vantagens da gamificação no ambiente escolar

Áreas	Vantagens
1. Aprendizagem	O professor ao adotar um ambiente gamificado pode oferecer aos alunos um ambiente de hipermídia, disponibilizando diversos conteúdos e formas variadas de aquisição de conteúdos escolares, deixando de ser exclusivo ao professor e o mais importante, a própria ferramenta traz consigo um feedback sobre o desempenho dos estudantes e em quais temas o professor precisa intervir.
2. Engajamento	A cada novo aprendizado, o aluno é estimulado a passar de nível e aumentar sua pontuação. E percebe o seu progresso frente à sala de aula, se motiva ao ver assumindo um papel de protagonista, evitando assim a evasão e reprovação por dificuldades de aprendizagem.
3. Sentimento de conquista	Os alunos despertam um sentimento de conquista, por meio de uma competição saudável. Desenvolvem um sentimento de pertencimento ao grupo, se sentem ativos no processo escolar e veem possibilidades a partir do conhecimento.
4. Dados relevantes sobre o grupo	É preciso que o professor, seja aplicando a gamificação presencial ou através de uma plataforma on-line, tenha acesso ao desempenho dos seus alunos de forma detalhada, bem como se a aplicação da gamificação está trazendo os resultados esperados.

Fonte: Adaptado do blog LudosPro (2019).

A gamificação tem se destacado no ensino de Matemática pelo uso da competição e de recompensas, recursos que despertam atenção e ampliam a motivação. Ao ser inserida em sala de aula, mostra-se capaz de estimular participação, cooperação e confiança dos estudantes, reduzindo a insegurança diante dos erros (Tolomei, 2017).

Para estruturar atividades gamificadas, não é necessário adotar todos os elementos típicos de jogos, mas quatro componentes são essenciais: definição de objetivos, regras claras, feedback contínuo e participação voluntária. Esses aspectos, quando bem articulados, garantem relevância e coerência às práticas aplicadas (Silva; Sales; Castro, 2019).

Além disso, a introdução de pontuações, rankings e desafios desperta nos alunos senso de conquista e engajamento, ao mesmo tempo em que estimula raciocínio lógico e criatividade. Nesse sentido, a gamificação pode atuar como ferramenta auxiliar no ensino

da Matemática, tornando o ambiente mais produtivo e atrativo (Barbosa; Pontes; Castro, 2020).

Entretanto, pesquisas revelam entraves para sua efetiva adoção: falta de preparo docente, carência de materiais específicos e necessidade de formação continuada. A análise de experiências em programas de capacitação mostrou que compreender as percepções dos professores é decisivo para consolidar essa metodologia no espaço escolar (Brito, 2021).

Assim, a gamificação se apresenta como estratégia promissora, mas requer planejamento detalhado e formação adequada para que realmente favoreça a aprendizagem e contribua para um ensino de Matemática mais dinâmico.

3.2 Jogos Aplicados à Gamificação da Função Afim

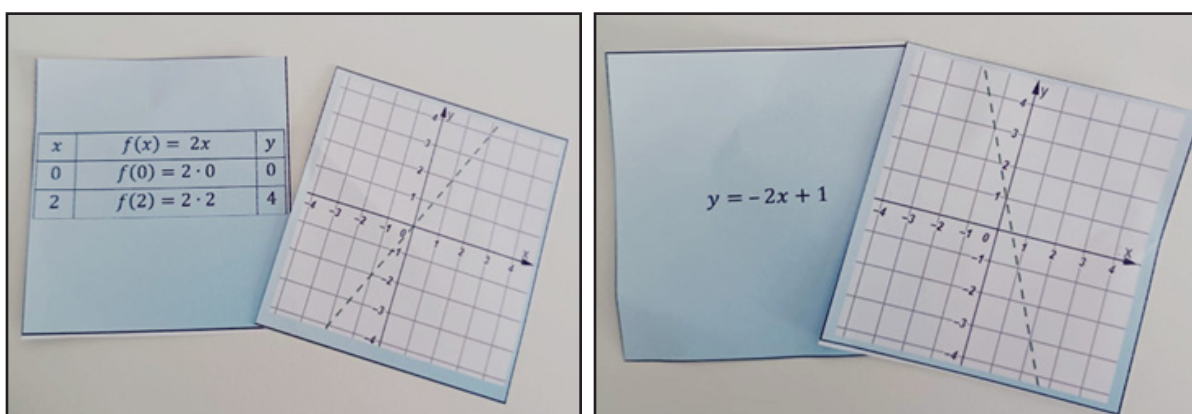
3.2.1 Jogos dos pares

A utilização de jogos dos pares para a aprendizagem da função afim no Ensino Fundamental pode ser uma forma divertida e eficaz de envolver os alunos e facilitar o aprendizado dessa concepção matemática.

A função afim é um conceito matemático importante que relaciona duas variáveis de forma linear. O uso de jogos dos pares pode ser uma forma divertida e eficaz de ensinar função afim, tornando o processo de aprendizagem mais interessante e desafiador (Santiago; Sousa; Alves, 2022). Segundo esses autores, o jogo dos pares pode ser adaptado para ensinar função afim, utilizando pares de valores que satisfaçam a mesma função afim. Por exemplo, se a função afim é $y = 2x + 3$, os pares podem ser (1, 5) e (2, 7).

O jogo dos pares (Figura 1) pode ser implementado em sala de aula, utilizando cartões com valores aleatórios. A utilização de jogos dos pares pode ser uma forma de motivar os alunos a explorarem diferentes funções e a identificar as características dessas funções. Além disso, os jogos dos pares podem ser utilizados para ensinar a representação gráfica e algébrica da função afim.

Figura 1. Jogo dos pares aplicado com estratégia lúdica para o ensino de função afim



Fonte: autores (2024)

O jogo dos pares é composto por 24 cartas que formam 12 combinações corretas. A dinâmica pode ser individual ou em grupo, sendo vencedor quem conseguir organizar todos os pares após o embaralhamento das cartas.

Uma experiência realizada com estudantes do 1º ano do Ensino Médio revelou que a aplicação desse recurso, associada a situações do cotidiano, despertou maior interesse e

modificou o comportamento dos participantes em relação ao aprendizado (Brizola, 2020). Além disso, a atividade favorece o desenvolvimento de memória, raciocínio e fluência verbal, aspectos fundamentais para compreender a função afim (Alves, 2022).

A inserção do jogo dos pares no contexto da gamificação estimula cooperação, resolução de problemas e engajamento, configurando-se como uma estratégia capaz de tornar as aulas de Matemática mais interativas e significativas (Carneiro, 2022).

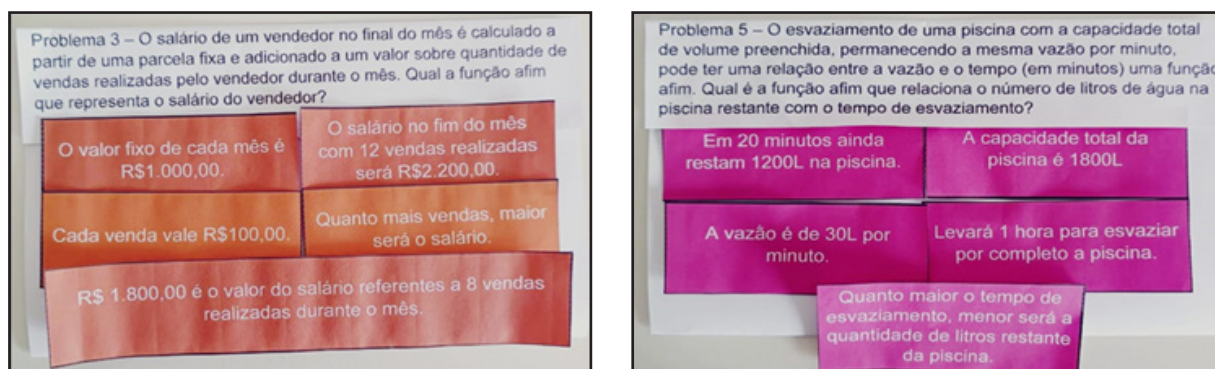
3.2.2 Bingo Matemático: Encontrando a Lei da Função

O estudo da função afim é muito importante para a aprendizagem de Matemática, porque ajuda os alunos a resolver situações do dia a dia e ainda tem utilidade em áreas variadas, como a segurança digital (criptografia) e a agricultura sustentável (agroecologia). Mesmo assim, muitos estudantes sentem dificuldade em entender esse conteúdo, o que levou professores e pesquisadores a pensar em novas formas de ensinar, tornando-o mais fácil e interessante.

Entre essas estratégias estão atividades organizadas em diferentes níveis de dificuldade, que despertam a curiosidade, estimulam a participação da turma e ajudam a transformar informações de tabelas em gráficos (Silva, 2017). Outra proposta é usar a criptografia como ferramenta didática, permitindo que os alunos pratiquem a função afim e sua inversa em situações reais, o que deixa a aprendizagem mais prática e significativa (Abreu *et al.*, 2017).

Também se destaca o método de resolução de problemas. Pesquisas em turmas do 1º ano do Ensino Médio mostram que essa forma de ensino aumenta o interesse dos alunos e muda sua postura em sala, tornando-os mais engajados (Silva; Pereira, 2023). A partir dessas ideias, foi criado o jogo “Qual é a função afim?”, que pode ser jogado individualmente ou em grupos, com o professor atuando como orientador da atividade.

Figura 2. Jogo das pistas - “Qual é a função afim?”.



Fonte: Criado pelo autor (2024)

O jogo consiste em cada grupo ou cada pessoa recebendo pistas em relação à função afim, não qual o professor relata um problema ou uma situação problemática onde essa função está descrita. O objetivo é descobrir por meio das pistas qual é a função que descreve o problema anunciado pelo professor. Essa atividade pode ser uma das diversas propostas metodológicas inovadoras que têm sido exploradas para tornar o ensino da função afim mais significativo e eficaz, como o uso da modelagem matemática, da criptografia e do software GeoGebra, por exemplo.

O jogo do Bingo com função afim (Figura 3) é uma atividade que pode ser desenvolvi-

da tanto individualmente quanto em grupo, e tem como objetivo auxiliar os participantes a praticar e aprofundar seu conhecimento sobre a função afim, uma importante ferramenta matemática. No jogo, cada participante ou grupo recebe uma cartela de Bingo na qual são representados pares ordenados (x, y) que envolvem pontos pertencentes a uma função afim. O professor, participante como mediador, anunciará os pares ordenados, e os participantes deverão marcar os pontos correspondentes em suas cartelas. O vencedor será aquele que marcar todos os pontos da função afim anunciada. Essa atividade lúdica e interativa proporciona uma maneira dinâmica de internalizar os conceitos da função afim, tornando o aprendizado mais significativo e eficaz (Oliveira; Takamine, 2019).

Figura 3. Jogo do bingo de função afim

$f(x) = -x + 2$				
B	I	N	G	O
-1	4	9	14	21
3	8	AFIM	18	23
0	5	11	17	20

Fonte: Criado pelo autor (2024)

O Bingo com função afim é uma proposta diferente e divertida para ensinar esse conteúdo, tornando as aulas mais envolventes. O uso de jogos na sala de aula já mostrou ser uma boa estratégia para aumentar a participação dos alunos e ajudar na compreensão dos conceitos matemáticos (Oliveira; Melo, 2023).

Essa atividade pode ser ainda mais interessante quando associada a recursos tecnológicos, como o software GeoGebra, que permite criar cenários animados e facilitar a visualização do comportamento das funções (Oliveira; Takamine, 2019).

O jogo também abre espaço para relacionar a Matemática com outras áreas, como Física e Criptografia, mostrando aos estudantes que a função afim não é apenas um conteúdo escolar, mas um conceito aplicável em diferentes contextos do dia a dia (Carneiro et al., 2023).

Na prática, o Bingo funciona da seguinte forma: cada aluno ou grupo recebe uma cartela com oito espaços. Primeiro escolhe-se uma função afim e oito números para preencher a cartela. A cada sorteio feito pelo professor, o número retirado é usado como valor de x ; o estudante calcula o $f(x)$ e marca o resultado caso ele esteja presente na cartela. Vence quem completar todos os espaços primeiro.

Assim, além de reforçar o aprendizado, o jogo estimula a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a interação entre os alunos, tornando o ensino mais dinâmico e contextualizado.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A gamificação aplicada ao ensino de Matemática, em especial no estudo da função afim, apresenta-se como uma alternativa inovadora e eficiente para envolver os estudan-

tes, tornando as aulas mais dinâmicas, participativas e atrativas. Ao incorporar recursos característicos dos jogos, o professor desperta a curiosidade, estimula a motivação e cria experiências de aprendizagem mais envolventes.

A partir da análise de referenciais teóricos e de exemplos já aplicados em sala, percebe-se que a gamificação disponibiliza múltiplas estratégias que podem ser ajustadas às metas de cada turma. Desde atividades simples, como o jogo dos pares para introduzir os conceitos, até propostas mais complexas, como o Bingo da função afim para consolidar e praticar conteúdos, as possibilidades são diversas e oferecem caminhos eficazes para a construção do conhecimento.

Outro ponto relevante é que essa prática vai além do aprendizado matemático: ela também desenvolve competências socioemocionais, como cooperação, comunicação e resolução de problemas. Ao participar de atividades lúdicas e colaborativas, os alunos se preparam não apenas para melhores resultados acadêmicos, mas também para desafios em outras dimensões da vida.

Porém, é necessário reconhecer que a implementação da gamificação traz exigências, como a formação adequada de professores, a criação de materiais específicos e o alinhamento das atividades com os objetivos pedagógicos. Vencer essas barreiras requer investimento constante em inovação, planejamento e trabalho conjunto entre docentes, pesquisadores e demais agentes da educação.

Assim, a gamificação se consolida como uma estratégia promissora para o ensino da Matemática e, em especial, da função afim. Ao unir conceitos matemáticos a elementos de jogos, cria-se um ambiente de aprendizagem mais motivador, que desperta o interesse dos estudantes e os prepara, com mais confiança, para enfrentar os desafios do século XXI.

Referências

- ABREU, L. A.; SANTOS, R. C.; SILVA, S. C.; BRAGANÇA, K. F. **Criptografia**: evolução histórica e aplicação na função afim e sua inversa. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal Fluminense, 2017.
- ALVES, D. M.; CARNEIRO, R. S.; CARNEIRO, R. S. Gamificação no ensino de matemática: uma proposta para o uso de jogos digitais nas aulas como motivadores da aprendizagem. **Revista Docência e Ciberultura**, v. 6, n. 3, p. 146-164, 2022. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/re-doc/article/view/67549>. Acesso em: 31 ago. 2025.
- BARBOSA, F. E.; PONTES, M. M.; CASTRO, J. B. A utilização da gamificação aliada às tecnologias digitais no ensino da matemática: um panorama de pesquisas brasileiras. **Revista Prática Docente**, v. 5, n. 3, p. 1593-1611, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/rpd/article/view/10605>. Acesso em: 31 ago. 2025.
- BRIZOLA, A. **Gamificação**: uma proposta de aplicação da plataforma Classcraft nas aulas de matemática do ensino médio. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, 2020.
- CARNEIRO, G. N. F.; COSTA, J. F. S.; MOURA, M. C. S.; et al. Study of the affine function and applications in the areas of mathematics and physics with an emphasis on contextualized teaching. **International Seven Journal of Multidisciplinary**, v. 2, n. 4, p. 661-684, 2023.
- CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 16, n. 2, p. 221-236, 2003. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/rpe/article/view/12460>. Acesso em: 31 ago. 2025.
- DA SILVA NETO, Raimundo Cazuza. O Uso Da Gamificação Como Recurso Didático No Ensino E Aprendizagem Da Função Afim No Ensino Fundamental. **IOSR Journal Of Humanities And Social Science (IOSR-JHSS)** Volume 29, Issue 2, Series 9. Disponível em: <https://www.iosrjournals.org/iosr-jhss/papers/Vol.29-Is->



sue2/Ser-9/H2902093748.pdf Acesso em 31 de Agosto de 2025.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 31 ago. 2025.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 31 ago. 2025.

ESQUIVEL, H. **Gamificação no ensino de matemática: uma experiência no ensino fundamental**. 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2017.

FUNEZ, E. **Proposta de uma metodologia de ensino sobre aplicações da função afim a partir de situações problemas relacionados à agroecologia**. 2017. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2017.

JÚNIOR, D.; FARIAS, J. A. A introdução da definição de Função Afim no 9º ano do Ensino Fundamental. **Semanticscholar**, 2018. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-introdu%C3%A7%C3%A3o-da-defini%C3%A7%C3%A3o-de-Fun%C3%A7%C3%A3o-Afim-no-9%C2%BA-J%C3%BAnior-Farias/203553023>. Acesso em: 31 ago. 2025.

JUSTULIN, A. M.; PEREIRA, F. F.; FERREIRA, A. S. Representação gráfica de funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do Ensino Médio. **REnCiMa**, v. 10, n. 6, p. 301-318, 2019. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2480>. Acesso em: 31 ago. 2025.

KRUG, C. B. S.; NOGUEIRA, C. M. I. Ideias base de função e função afim: analisando o livro didático do Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 13, n. 1, p. 1-18, 2022. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/3559>. Acesso em: 31 ago. 2025.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LAGO, W. J. S. **As contribuições dos Registros de Representação Semiótica no processo de ensino e aprendizagem da função afim**. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2018.

LEITE, L. R. Considerações sobre o processo ensino-aprendizagem de funções. **Semanticscholar**, 2016. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/Considera%C3%A7%C3%B5es-sobre-o-processo-ensino-aprendizagem-Leite/171870403>. Acesso em: 31 ago. 2025.

MALAGUETA, A. S.; NAZÁRIO, F. F.; CAVALCANTE, J. A. A influência da gamificação no ensino da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 9, n. 9, p. 263-279, 2023. Disponível em: <https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/11397>. Acesso em: 31 ago. 2025.

MENDES, I. **Jogos matemáticos no processo de ensino-aprendizagem**. Belém: UEPA, 2008.

OLIVEIRA, F. L. M.; MELO, A. R. P. Jogo de bingo no ensino de função afim: uma proposta para o 1º ano do Ensino Médio. **Anais IX CONEDU**. Campina Grande: Realize Editora, 2023. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/99967>. Acesso em: 31 ago. 2025.

OLIVEIRA, L. E.; TAKAMINE, V. R. A aplicabilidade do jogo no estudo da função afim. **Semanticscholar**, 2019. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-aplicabilidade-do-jogo-no-estudo-da-fun%C3%A7%C3%A3o-Afim-Oliveira-Takamine/213215856>. Acesso em: 31 ago. 2025.

PRAZERES, I. M. S. **Gamificação do ensino de matemática: aprendizagem do campo multiplicativo**. 2019. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

ROSA, A. C. M.; ROSA, A. M.; SANTOS, R. O. B.; MANTOVANI, K. C. C. Ensino e educação: uso da gamificação na matemática. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, ano 6, ed. 05, v. 8, p. 40-68, 2021. Disponível em: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/gamificacao-na-matematica>. Acesso em: 31 ago. 2025.

SANTANA, C. V.; CAZORLA, I. M.; UTSUMI, M. C. Contribuições das variáveis estatísticas na contextualização da função afim. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 6, n. 1, p. 124-146, 2021. Disponível em: <https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/15604>. Acesso em: 31 ago. 2025.

SANTIAGO, P. V. S.; SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V. O ensino de funções do 1º grau por meio da gamificação com o Escape Factory. **Educitec**, v. 8, e178822, 2022. Disponível em: <https://periodicos.ifam.edu.br/index.php/edu>

citec/article/view/178822. Acesso em: 31 ago. 2025.

SILVA, F. S.; PITANGA, J. Sequência de ensino: uma proposta de resolução de problemas na integração do software GeoGebra no estudo da função afim no 9º ano. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 1-16, 2018. Disponível em: <https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/8135>. Acesso em: 31 ago. 2025.

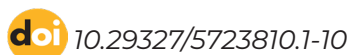
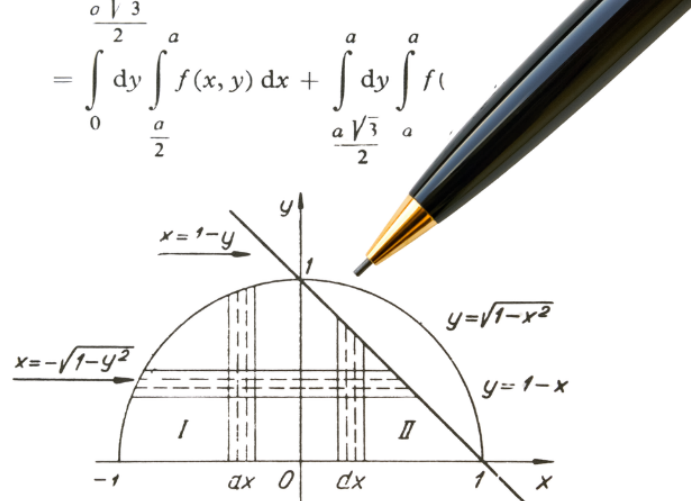
SILVA, K. S.; PEREIRA, L. B. D. O ensino de função afim por meio da resolução de problemas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 27, p. 228-250, 2023. Disponível em: <https://revistas.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7134>. Acesso em: 31 ago. 2025.

SILVA, R. A. Folhas de atividades para o ensino de função afim e quadrática: conceito e aplicações. **VI SEMA-TED – Semana da Matemática e Educação: Tendências em Educação Matemática**, Araraquara, 2017.

SILVA, S. D.; NOGUEIRA, C. M. I. Dissertações brasileiras relacionadas ao ensino de função afim sob a perspectiva das teorias da Didática da Matemática. **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 23, n. 1, p. 448-472, 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50844>. Acesso em: 31 ago. 2025.

TOLOMEI, B. V. A gamificação como estratégia de engajamento e motivação na educação. **EAD em Foco**, v. 7, n. 2, 2017. Disponível em: <https://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/view/472>. Acesso em: 31 ago. 2025.





10

A EDUCAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A GERAÇÃO Z: PROPOSTAS DE ENSINO DA GEOMETRIA ATRAVÉS DO AUTOCAD E 3DS MAX

GEOMETRIC EDUCATION FOR GENERATION Z: TEACHING PROPOSALS FOR GEOMETRY THROUGH AUTOCAD AND 3DS MAX

Francinaldo Richele Souza¹

Marlon Cesar Santos Oliveira²

Geilson Mendes dos Reis¹

¹ Mestre, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís-MA

² Doutor, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís-MA

RESUMO

Esse trabalho iniciou-se com uma pesquisa sobre as características da “geração Z” e sua forma de aprendizagem, destacando que essa geração utiliza o método de tentativa e erro, o que torna crucial a integração de tecnologias no ensino para promover uma aprendizagem mais eficaz. Notou-se que a Geometria, especialmente com o auxílio de recursos tecnológicos, proporciona um ambiente propício para atividades exploratórias e investigativas. Ao utilizar softwares no ensino da Geometria, os alunos têm a oportunidade de desenvolver habilidades de visualização, uma vez que são fornecidos materiais didáticos baseados em elementos concretos representativos dos objetos geométricos estudados. Essa abordagem visa estabelecer uma conexão mais significativa entre os conceitos abstratos e a realidade dos educandos, promovendo assim uma aprendizagem mais efetiva e engajada.

Palavras-chave: Educação, Geração Z, Geometria, Tecnologia, Softwares.

ABSTRACT

This work began with a research on the characteristics of “Generation Z” and their learning style, highlighting that this generation utilizes the trial-and-error method, making the integration of technologies in education crucial to promote more effective learning. It was noticed that Geometry, especially with the assistance of technological resources, provides a conducive environment for exploratory and investigative activities. By using software in Geometry teaching, students have the opportunity to develop visualization skills, as educational materials are provided based on concrete elements representing the studied geometric objects. This approach aims to establish a more meaningful connection between abstract concepts and the reality of students, thus promoting a more effective and engaged learning.

Keywords: Education, Generation Z, Geometry, Technology, Software.



1. INTRODUÇÃO

A integração entre Educação e tecnologia é uma realidade nos dias atuais, porém, unir esses dois elementos é uma tarefa que requer preparo do professor, tanto dentro quanto, fora do ambiente escolar. Embora o ambiente digital ofereça desafios e oportunidades, pode também se tornar um obstáculo para o aprendizado, fazendo-se necessário que o educador estabeleça conexões significativas entre os objetos de conhecimento e a realidade dos alunos.

Com alunos cada vez mais conectados, é crucial que os professores repensem suas metodologias para manter a atenção dos estudantes e promover a aprendizagem. Nesse sentido, é responsabilidade do educador planejar e desenvolver maneiras de integrar a tecnologia aos métodos de ensino, conforme destacado por Moran (2009).

As tecnologias desempenham um papel fundamental na sociedade contemporânea, sendo indispensáveis para diversas atividades, inclusive o ensino e a aprendizagem. O uso de tecnologias em sala de aula pode melhorar o processo educacional e preparar os alunos para viverem em uma sociedade em constante transformação.

Partindo desse pressuposto, observa-se que as tecnologias podem auxiliar especialmente no ensino de disciplinas consideradas complicadas, como a Matemática e sua vertente, a Geometria. O estudo da Geometria é essencial para que os alunos desenvolvam habilidades de observação, investigação e compreensão das características geométricas dos objetos.

Para alcançar os resultados desejados, é necessário que o professor reavalie seus métodos de ensino e incorpore recursos que estimulem o desenvolvimento de habilidades e capacidades nos alunos. Nesse contexto, este trabalho propõe uma metodologia de ensino da Geometria utilizando os softwares Autocad e 3Ds Max, amplamente utilizados na construção civil.

Embora a tecnologia possa facilitar a internalização do conhecimento, a responsabilidade do professor em personalizar esse meio para alcançar os melhores resultados não deve ser subestimada. Portanto, é essencial que o professor domine a tecnologia e a utilize de forma a despertar a curiosidade dos alunos e enriquecer seus métodos de ensino.

A pesquisa realizada adota uma abordagem exploratória, iniciando com uma revisão bibliográfica sobre as características da “geração Z” e a importância da tecnologia na educação. Em seguida, são apresentados um breve histórico da Geometria e uma proposta de ensino utilizando os softwares mencionados.

2. A GERAÇÃO X, Y, Z

A noção de geração refere-se ao conjunto de pessoas que, “[...] por terem nascido no mesmo período histórico, receberam ensinamentos e estímulos culturais e sociais similares e, por conseguinte, têm gostos, comportamentos e interesses em comum” (Oliveira, 2020, p.34).

Atualmente, temos quatro gerações coexistindo: a Geração Baby Boomers, Geração X, Geração Y, Geração Z e, por fim, Geração Alfa. Entretanto, as gerações relevantes para este estudo, uma vez que, ainda estão presentes na vida escolar, são as gerações a partir da X, desconsiderando a Alfa, que tem início a partir de 2010. Portanto, não faz parte do grupo

específico que está sendo considerado neste trabalho, a saber, os jovens do ensino médio.

2.1 A definição de Geração e suas características

De acordo com Lima (2012), geração é o termo empregado para categorizar um período dentro de um intervalo de tempo. Esse conceito é aplicado na genealogia da reprodução humana para se referir à estrutura familiar (avós, pais e filhos). Com base nos aspectos culturais, sociais e nas transformações ocorridas nesses cenários, pesquisadores começaram a reconhecer as diferentes categorias das gerações. Lima (2012, p.15) afirma:

As gerações não têm uma data precisa. Diversos estudos, linhas de pensamento, ideologias e pesquisadores consideram datas diferentes para início e término das mesmas, não havendo, portanto, uma classificação incontestável e definitiva. O que existe, na verdade, é um sentido de adequação referente a cada cultura ou contexto social.

A cada nova geração, a anterior passa por rupturas ou busca a limitação dos jovens, não os deixando enfrentar os seus próprios desafios, esquecendo-se de que já experimentaram dessa juventude e que passaram por esse processo, também conhecido como “rebeldia”. Pautado nessa ideia, Oliveira (2012, p. 25) aponta que ao escrever sobre gerações, “[...] é preciso considerar os diversos fatores que ajudam a entender o tema, principalmente o conceito que é mais aceito pelos estudiosos, a separação da sociedade pela idade cronológica”.

A geração Belle Époque, constituída por indivíduos nascidos entre 1920 e 1940, é conhecida por sua dedicação ao trabalho, senso prático e respeito à hierarquia, uma geração que se ocupou em reconstruir o mundo após os períodos de guerras e batalhas. Dentre as principais características dessa geração destaca-se a extrema disciplina. Oliveira (2012, p.40) expressa que “[...] conceitos como “Primeiro o dever, depois os lazeres” ficaram cristalizados na sociedade.”

Nessa geração, a estratégia de recriar a sociedade vinculou-se na ampliação familiar: as famílias passaram a ter vários filhos, seguindo os velhos padrões, nos quais o homem sustentava a casa e as mulheres cuidavam do lar e da prole. Os paradigmas das “famílias perfeitas” começam a ser quebrados, com a geração dos seus filhos, a chamada geração Baby Boomer que, na juventude, demonstrou a insatisfação em relação à forma rígida dos pais, passando a contestar tudo e iniciando os “anos rebeldes”.

Com comportamento mais contestador e irreverente, o jovem Baby Boomer criou famílias menos hierarquizadas e não fez tanta questão de sustentar o mesmo nível de rigidez de seus pais (Oliveira, 2012, p. 43).

Os filhos dos Baby Boomers, a geração X, foram concebidos em conjunto com a televisão, um elemento relevante nas mudanças comportamentais da sociedade que influenciou o aumento do consumismo. Para Oliveira (2012, p.45-46):

As crianças da recém-inaugurada Geração X aprendiam desde cedo que, desejando e acreditando, tudo era possível. A máxima “Querer é poder” ficou muito popular nesse período. As crianças aprenderam que deveriam querer muito e pedir incessantemente a seus pais.



A geração seguinte, também conhecida como Y, nasceu em um mundo tecnológico, com recursos em abundância. O principal agravante dessa geração, vista como desestruturada e contestadora, foi o excesso de proteção dos pais para com seus filhos: os pais, em observância no que não tiveram ou não puderam ter na juventude, buscaram, mediante muito trabalho, fazer tudo pelos filhos, inviabilizando estes de buscarem seus objetivos. Nesse sentido, Oliveira (2012, p.78) aponta que:

Paradoxalmente, a Geração X não permitiu a seus sucessores terem o mesmo tipo de exposição. Suprir constantemente as necessidades dos jovens fez com que a Geração Y iniciasse o ciclo das consequências mais tarde, entrando no mercado de trabalho somente após a formação superior. Além disso, toda a infraestrutura de facilidades proporcionada pelos pais gerou uma relativa dependência, fazendo com que os jovens da Geração Y também adiassem a exposição a alguns desafios com consequências, como a independência financeira ou a formação da própria família.

Os indivíduos da geração Y, das tecnologias digitais e das redes sociais, ingressaram no mercado de trabalho em meados dos anos 2000, por serem concebidos em tempos prósperos, diferente das demais, “[...] são autoconfiantes, acreditam em si mesmos, desejam sucesso financeiro, gostam de trabalhar em equipe e são imediatistas” (Borges; Silva, 2013, p. 03).

E, por fim, o último grupo geracional que será expresso neste trabalho, a denominada Geração Z, nasceu mais imersa na era digital e se sente totalmente à vontade diante de qualquer componente eletrônico e tecnológico. Devido a tais características, foi intitulada “[...] por zapear de uma coisa para outra, olham televisão, ficam no telefone, no computador entre outras coisas, simultaneamente” (Borges; Silva, 2013, p. 04). A maior característica dessa geração é a interação e integração com os inúmeros equipamentos eletrônicos ao mesmo tempo. Os indivíduos da geração Z não conheceram o mundo sem tecnologia, por esse motivo “[...] para eles não existem fronteiras, os “amigos virtuais” estão espalhados pelo mundo, através das redes sociais” (Borges; Silva, 2013, p. 04).

2.2 O Comportamento da Geração Z e a Influência nas Atitudes dos Professores

De acordo com Scharf (2012), a geração Z representa os nascidos após 1996, sucessores das gerações X e Y. Essa geração, também denominada de zapping, realiza várias coisas ao mesmo, porque se encontram em um mundo alicerçado na internet, celulares e videogames (Scharf, 2012).

Segundo Maurer (2013), os indivíduos da geração Z são imediatistas; buscam soluções e resultados prontos. Essa geração apresenta resistência em trabalhar em equipe e seguir estruturas hierárquicas. Para Dos Santos e Franco (2010), os constituintes dessa geração são “[...] rápidos e ágeis com os computadores, têm dificuldades com as estruturas escolares tradicionais e, muitas vezes, com os relacionamentos interpessoais, uma vez que a comunicação verbal é dificultada pelas tecnologias presentes a todo o momento” (Dos Santos Neto; Franco, 2010, p. 14).

Dos Santos Neto e Franco (2010) compreendem que, assim como a geração Y, a Z também está sofrendo ruptura na maneira como percebe o mundo. Tal processo expressa-se na construção de valores e da própria personalidade. Destaca-se ainda a reconfigu-

ração na linguagem escrita, já que muitos destes jovens demonstram aversão em praticar leituras em livros físicos, preferindo os materiais em PDF. Dessa forma, entende-se a apatia que a geração Z com a geração de professores que ensinam por meio do método tradicional, pois:

[...] este é um problema complexo para esses jovens, pois seu mundo entra em choque com o de seus pais e educadores: o choque de formas diferentes de apreensão/percepção e, conseqüentemente, também de construção do conhecimento. (Dos Santos Neto; Franco, 2010, p. 15).

Nesse sentido, o professor precisa estar sensível a essas ocorrências, que muitas vezes são imperceptíveis pela convivência limitada. Para Moran (2013), o papel da educação, no que se refere ao papel do professor:

É ajudar os alunos na construção da sua identidade, do seu caminho pessoal e profissional – do seu projeto de vida, no desenvolvimento das habilidades de compreensão, emoção e comunicação que lhes permitam encontrar seus espaços pessoais, sociais e profissionais e tornar-se cidadãos realizados, produtivos e éticos (Moran, 2013).

Diante das adversidades advindas da introdução das tecnologias nas atividades escolares com a finalidade de atender as demandas educacionais dos adolescentes e jovens, é importante que o ensino nas escolas fuja do tradicionalismo. Para Moran (2013, p.89):

Ensinar e aprender exigem hoje muito mais flexibilidade espaço temporal, pessoal e de grupo, menos conteúdos fixos e processos mais abertos de pesquisa e de comunicação. Uma das dificuldades atuais é conciliar a extensão da informação, a variedade das fontes de acesso, com o aprofundamento da sua compreensão, em espaços menos rígidos, menos engessados.

Dessa forma, observam-se os grandes desafios que encontrados cotidianamente por professores e alunos. Alguns educadores, cujas raízes estão em gerações menos conectadas, há uma resistência em aceitar a adequar o uso da internet e de smartphones durante as suas aulas, já que existem grandes chances de dispersão no percurso.

3. A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA NA VIDA COTIDIANA E NA EDUCAÇÃO

Segundo Boyer (1996), a Geometria é um dos campos mais antigos da Matemática, ela configura-se como uma das primeiras áreas desenvolvidas pelo homem para atender as necessidades que surgiam durante o seu cotidiano. Para o autor, “[...] o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem” (Boyer, 1996, p. 5).

Além de suas aplicações práticas, a geometria também é essencial para a compreensão das formas e dimensões dos seres matemáticos, como afirmado por Ferreira (1999, p. 983) a Geometria é a “[...] ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” e também um ramo do conhecimento matemático que estuda “[...] as formas, plana e espacial, com as suas propriedades”.

Percebe-se então a importância da geometria como instrumento de compreensão



do mundo que cerca os estudantes. De acordo com Lorenzato (1995, p. 5), a presença da Geometria na escola é essencial, pois sem o seu estudo:

[...] as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano.

Para Lorenzato (1995, p. 6), a geometria desempenha uma “[...] função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática”.

4. OS RECURSOS TECNOLÓGICOS E SUAS UTILIDADES NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

De acordo com Moraes (2006), é imprescindível adotar um paradigma que reconheça a relevância das novas parcerias entre a educação e os avanços científicos e tecnológicos contemporâneos. A educação do século XXI não contempla os educadores que não acompanham tais avanços e se limitam à mera reprodução de conhecimento.

Allevato, Onuchic e Jahn (2010, p. 206) destacam que apesar das tecnologias serem elementos presentes no cotidiano das pessoas em geral e, especialmente, de muitos professores, “[...] sua efetiva integração na sala de aula é, ainda, demasiadamente tímida”. É fundamental, portanto, que a educação seja inserida nesse contexto de transformações tecnológicas, considerando que o período atual é caracterizado como a era do conhecimento, marcado por mudanças que afetam toda a sociedade.

Kenski (2007) enfatiza que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, e softwares diferenciados estão transformando a realidade da sala de aula, tornando-a mais dinâmica e interativa.

A partir dessa ideia, compreende-se a importância da utilização das tecnologias em sala de aula e a necessidade dos professores acompanharem as evoluções tecnológicas. Essa adaptação não é algo novo, mas diante da rápida transformação tecnológica, é crucial que a educação se ajuste a essas mudanças. A pandemia de Covid-19, por exemplo, impulsionou muitos educadores a adentrarem o mundo tecnológico de forma mais intensa e rápida.

Diante disso, é fundamental apresentar os softwares existentes de geometria que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem. No próximo tópico, serão explorados dois aplicativos: Autocad e 3Ds Max.

5. UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DO AUTOCAD E 3DS MAX

O AutoCAD é um software que possibilita a motivação dos estudantes para o ensino de matemática, especialmente da geometria através de uma diversidade de ferramentas para construção de entidades geométricas como linhas, curvas, polígonos e até mesmo para o cálculo de perímetro e área. Essa ferramenta também é capaz de criar arredonda-

mento entre duas linhas ou subtrair as formas de dois objetos dimensionais com a finalidade de ser obter um terceiro.

AutoCAD é um software do tipo CAD (Computer Aided Design) ou desenho auxiliado por computador - desenvolvido e comercializado pela Autodesk, Inc. desde 1982. Esse programa é utilizado principalmente nas áreas de Arquitetura, Engenharia Civil, Engenharia Mecânica e outros profissionais do ramo construção da construção civil para a elaboração de desenho técnico, projeto arquitetônico, projeto estrutural, projeto de bombeiro etc.

Já o 3DS Max é um software utilizado para a criação de desenhos em três dimensões. Com o programa, o usuário modela, faz animações, renderização e cria visualizações em 3D. Normalmente, ele é usado em confecção de games, para a criação de cenas de vídeos, como filmes, comerciais e produção de vinhetas, além de qualquer projeto voltado para criação virtual.

Para organizarmos um projeto 3D com o 3ds Max, podemos utilizar o comando Project Folder. Ele permite selecionarmos, ou até mesmo criarmos uma pasta onde serão dispostos todos os arquivos do projeto. Isto permitirá trabalharmos com mais profissionalismo e otimizarmos o processo quando estivermos trabalhando em grupo.

5.1 Proposta de Ensino da Geometria Plana com o AutoCAD

O AutoCAD possui diversas funcionalidades. Nosso intuito não é descrevê-las em sua totalidade neste trabalho, mas expressar como o educador deve proceder para utilizá-lo em conjunto com as aulas de Geometria Plana. Após a introdução das principais funções dos alunos irão se envolver na prática, fazendo uma conexão entre os conhecimentos matemáticos e aqueles adquiridos por meio AutoCAD. Dessa forma, os alunos têm a oportunidade de criar plantas usando as figuras geométricas estudadas.

Um exemplo de como o professor pode fazer o vínculo dos objetos de conhecimento da Geometria Plana com os do Autocad é através da seguinte atividade: fazer uma planta de uma praça em formato triangular, estabelecer o formato baseado em um dos tipos de triângulo e apresentar quantos metros possui cada lado do triângulo. Por exemplo, como na Figura 1.



Figura 1. Planta Triangular efetivada no Autocad

Fonte: Elaboração própria com base no Autocad (2021)

Através da construção da planta triangular acima, o estudante pode visualizar os triângulos em suas realidades e inclusive identificar a tipologia de algumas obras arquitetônicas que apresentam o mesmo formato. Também é possível se utilizar da planta efetivada no AutoCAD para calcular o perímetro que a figura geométrica apresenta. Veja na Figura 2 uma Planta em formato de Triângulo Isósceles efetivada no AutoCAD.

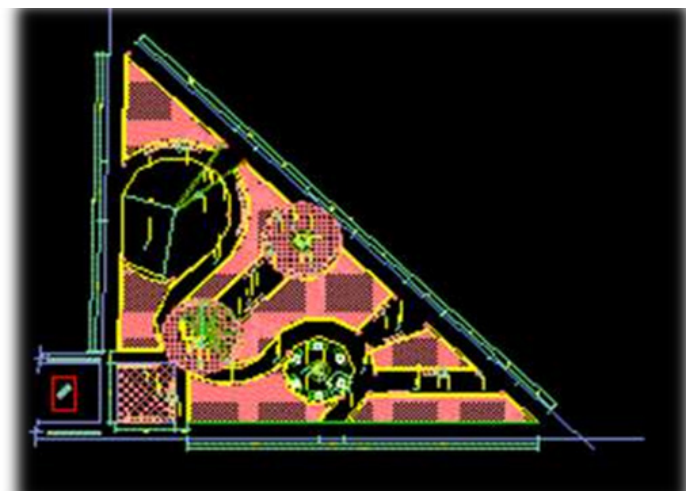


Figura 2. Planta em formato de Triângulo Isósceles efetivada no Autocad

Fonte: elaboração própria com base no Autocad (2021)

Com a utilização desse tipo de abordagem, o estudante poderá adquirir da BNCC a competência 1 e a habilidade (EM13MATI05) que consistem em utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). E satisfazer os objetos de conhecimento do 2º período da 1ª série. Além dos objetos de conhecimento os estudantes também iriam obter conhecimentos no campo da informática.

A proposta efetivada com o Autocad tem como finalidade os seguintes objetivos:

1. Identificar as figuras geométricas presentes na planta;
2. Trabalhar o conceito de decomposição com as figuras desconhecidas presentes na planta;
3. Propor para os alunos uma pesquisa (pode ser online) de dois ou três orçamentos para a compra do piso da casa, para isso terão que calcular a área total da casa e utilizar os dois pontos anteriores;
4. Propor também a pesquisa de dois orçamentos para a compra de tinta para pintar a casa, onde eles irão trabalhar também o conceito de área e deve existir o conhecimento prévio de conversão de unidades de medida.

5.2 Proposta de Ensino da Geometria Espacial com o 3Ds Max

Essa proposta visa integrar o uso do software 3Ds Max na aprendizagem da Geometria Espacial, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais prática e visual dos conceitos abordados. A ideia central é utilizar a criação de uma planta 3D de uma casa como ponto de partida para uma série de exercícios geométricos.

Essa ferramenta é capaz de gerar plantas 3D detalhadas, como mostra a Figura 3, que exemplifica uma etapa do processo de elaboração da planta baixa. O destaque também

recai sobre a ampla gama de funcionalidades oferecidas por esse software, embora estas não sejam exploradas em profundidade aqui, já que o foco principal reside na sua aplicação para o ensino da Geometria Espacial.

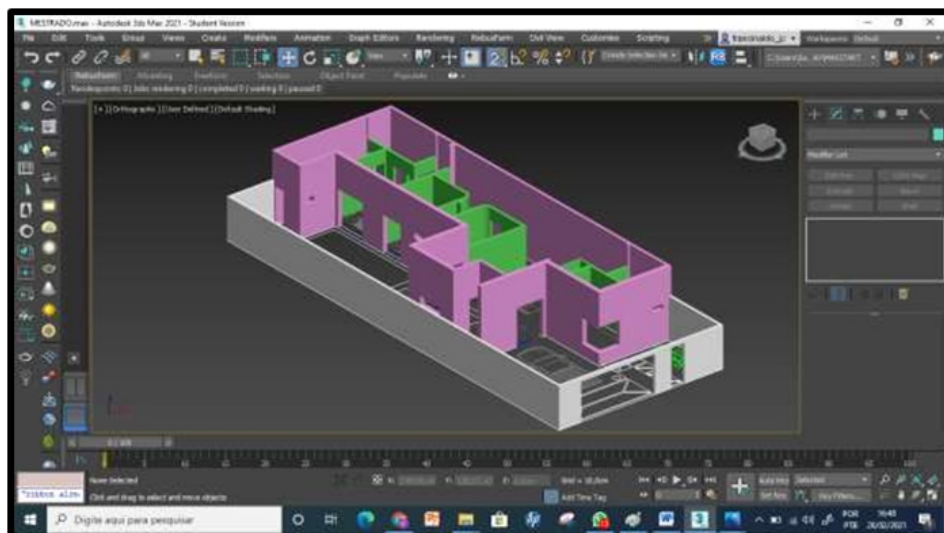


Figura 3. Planta baixa elaborada no 3Ds Max

Fonte: elaboração própria (2021)

Após a apresentação dos conceitos básicos sobre o programa a internalização da prática de modelagem adquirida com ele, se faz necessário efetivar o vínculo entre o aplicativo e os conhecimentos geométricos. A Figura 4, pode ser explicitada como umas das relações entre o 3Ds Max e a Geometria Espacial.

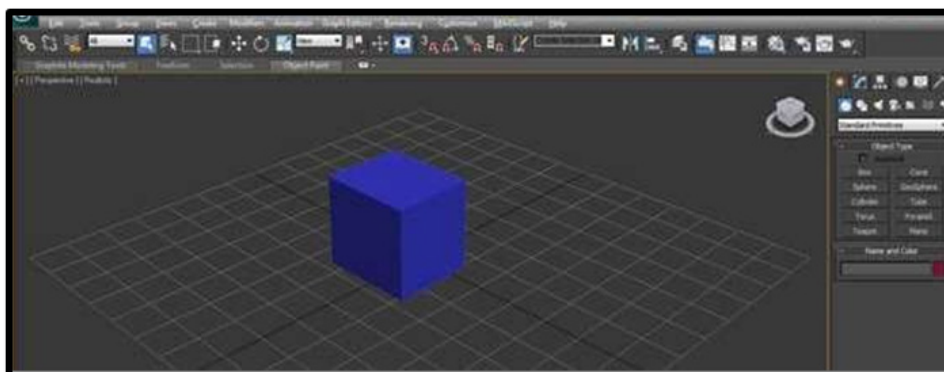


Figura 4. Cubo criado no 3Ds Max

Fonte: elaboração própria (2021)

Como atividade, o professor pode solicitar que os alunos criem um cubo. Após a criação o professor induz a seguinte problemática: qual é a área total da superfície do cubo com arestas medindo 15 centímetros?

Com a utilização do 3ds Max os estudantes poderiam compreender melhor sobre as figuras da Geometria Espacial, assim como obter mais conhecimentos no campo da informática. A relação entre o aplicativo e os conteúdos podem contribuir para que os educandos resolvam problema diários que sejam atrelados as fórmulas da Geometria Espacial.

Os objetivos dessa proposta são:

1. Identificar os sólidos que surgiram na planta 3D;
2. Trabalhar o conceito de Área e Perímetro das figuras na planta;

3. Propor para os alunos o cálculo do volume total em m^3 para a construção das paredes de alvenaria e colunas, considerando que as paredes e todas as estruturas são formadas por uma espécie de composição entre tijolo e argamassa. Ao término dessa tarefa solicite aos alunos calcularem a quantidade de tijolos utilizados na construção das paredes supondo que em $0,15 m^3$ da composição tijolo+argamassa existam 38 tijolos de 6 furos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A compreensão da atual geração, conhecida como “geração Z”, revela uma nova mentalidade multitarefa, imediatista e familiarizada com a linguagem digital, fruto do aumento do uso de computadores. Esses nativos digitais, nascidos após 1995, adotam uma abordagem de aprendizagem baseada em tentativa e erro, facilitando seu processo de aprendizado. No entanto, é essencial que essa integração seja guiada por um projeto pedagógico claro, para evitar a ampliação das disparidades sociais. Softwares educativos desempenham um papel fundamental nesse processo, possibilitando simulações realistas e promovendo a colaboração entre os alunos.

Na geometria, em particular, existem muitas oportunidades para o desenvolvimento de atividades exploratórias e investigativas, impulsionadas pelo uso de recursos tecnológicos. Essas ferramentas permitem uma abordagem mais visual e prática do ensino, facilitando a compreensão de conceitos complexos e incentivando a participação ativa dos estudantes. Além disso, os softwares educativos podem representar situações virtuais que se aproximam da realidade, proporcionando uma experiência de aprendizado mais imersiva e engajadora.

É fundamental que os professores reconheçam a importância de seu papel na integração eficaz da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem. Eles devem estar preparados para utilizar as ferramentas digitais de forma seletiva e crítica, garantindo que sua aplicação esteja alinhada aos objetivos pedagógicos e às necessidades dos alunos. Ao fazer isso, é possível aproveitar todo o potencial da tecnologia para melhorar a qualidade da educação e preparar os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo.

Referências

- ALLEVATO, Norma S. G.; ONUCHIC, Lourdes R.; JAHN, Ana Paula. O computador no ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: reflexões sob a perspectiva da resolução de problemas. In: SBEM (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática**: ensino, aprendizagem e formação de professores. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1–15.
- BORGES, Maria de Lourdes; SILVA, Adelina G. da. **Implicações de um cenário multigeracional no ambiente de trabalho**: diferenças, desafios e aprendizagem. 2013. Trabalho acadêmico.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- DOS SANTOS NETO, Elydio; FRANCO, Edgar Silveira. Os professores e os desafios pedagógicos diante das novas gerações: considerações sobre o presente e o futuro. **Revista de Educação do COGEIME**, v. 19, n. 36, p. 9–25, 2010.
- FERREIRA, Pedro Manuel Machado. **Para uma didática de uma geometria descritiva**. 2010. Trabalho acadêmico.
- KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologia**: o novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus, 2007.
- LIMA, Ranieri. **Perfil das gerações no Brasil**: as gerações X, Y, Z e seus perfis políticos. São Paulo: Baraúna,

2012.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau: SBEM, ano III, n. 3, p. 3–13, 1995.

MAURER, Ana Luiza. **As gerações Y e Z e suas âncoras de carreira**: contribuições para a gestão estratégica de operações. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Administração) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2013.

MORAES, Maria Cândida; DE LA TORRE, Saturnino. **O paradigma emergente**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2006.

MORAN, José. Os desafios de educar com qualidade. In: MORAN, José; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 21. ed. Campinas: Papirus, 2013. p. 45–62.

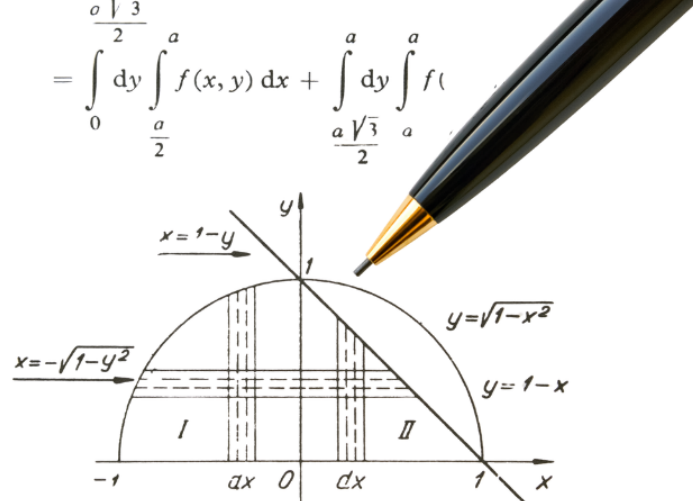
MORAN, José Manuel. Modelos e avaliação do ensino superior à distância no Brasil. **ETD – Educação Temática Digital**, v. 10, n. 2, p. 54–70, 2009.

OLIVEIRA, Arthur. **Identidade de moda de garotos da Geração Z**. 2020. Trabalho acadêmico.

OLIVEIRA, Gustavo Medeiros. **Geração Z**: uma nova forma de sociedade. 2012. Trabalho acadêmico.

SCHARF, Edson Roberto; ROSA, Célio Paulo; OLIVEIRA, Denise. Os hábitos de consumo das gerações Y e Z: a dimensão ambiental nos contextos familiar e escolar. **Contextus – Revista Contemporânea de Economia e Gestão**, Fortaleza, v. 10, n. 1, p. 33–50, jan./jun. 2012.





11

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA NO ENSINO DOS POLIEDROS CONVEXOS

MATHEMATICAL MODELING AS AN ALTERNATIVE IN TEACHING CONVEX POLYHEDRA

Paulo Batista Franca¹
Lélia de Oliveira Cruz²
Celina Amélia da Silva²

¹ Mestre, UEMA, São Luis - MA

² Doutora, UEMA, Caxias - MA

RESUMO

A pesquisa visa identificar se o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial através da Modelagem Matemática como metodologia de ensino contribui para a formação científica e tecnológica dos estudantes, bem como para sua cidadania. O estudo contemplou a Geometria Espacial com ênfase nos poliedros convexos. O método aplicado foi uma pesquisa qualitativa, que iniciou com a análise de textos publicados sobre a temática, evoluindo para a aplicação de questionário e a realização de quatro oficinas. As oficinas foram desenvolvidas com o emprego da Modelagem Matemática como metodologia para o estudo dos poliedros convexos. Os resultados compactuam com a preocupação quanto aos conhecimentos dos 32 alunos do segundo ano do ensino médio que participaram do estudo. Logo, foi possível concluir que a utilização da Modelagem Matemática oportuniza o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico, da capacidade de conviver e aprender com os outros.

Palavras-chave: Ensino aprendizagem da Matemática, Modelagem Matemática, Geometria Espacial.

ABSTRACT

The research aims to identify whether the process of teaching and learning Spatial Geometry through Mathematical Modeling as a teaching methodology contributes to students' scientific and technological training, as well as to their citizenship. The study focused on Spatial Geometry with an emphasis on convex polyhedra. The method applied was qualitative research, which began with an analysis of published texts on the subject, evolving into the application of a questionnaire and the realization of four workshops. The workshops were developed using mathematical modeling as a methodology for studying convex polyhedra. The results are in line with the concern about the knowledge of the 32 second-year high school students who took part in the study. It was therefore possible to conclude that the use of Mathematical Modeling provides an opportunity to develop autonomy, critical thinking and the ability to live with and learn from others.

Keywords: Teaching and learning mathematics, mathematical modeling, spatial geometry.



1. INTRODUÇÃO

Ao contrário do modelo tradicional de ensino, a Modelagem Matemática oferece soluções para problemas reais dos estudantes tornando a Matemática mais significativa e prazerosa, a medida que utiliza modelos, segue padrões ou utiliza fórmulas para explicar fenômenos naturais de qualquer área do conhecimento, levando a realidade do aluno para dentro da sala de aula. Dessa forma, os alunos têm a oportunidade de interpretar e melhorar sua compreensão matemática, resultando em uma alfabetização matemática mais efetiva.

Com base nos pressupostos, uma interrogação começou a incomodar, resultando no problema de pesquisa: como a Modelagem Matemática pode contribuir para a construção do conhecimento teórico e prático da Geometria Espacial dos alunos de Ensino Médio? Visando responder à questão posta, elaboramos o objetivo de pesquisa: identificar se o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial através da metodologia de ensino de Modelagem Matemática contribui para a formação científica e tecnológica dos estudantes.

Devido a abrangência do objetivo principal, foram estabelecidos os objetivos específicos, dos quais destacamos: criar um ambiente favorável ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial em sala de aula; utilizar estratégia para a formação de agrupamento, visando o apoio mútuo entre os alunos e acompanhamento do professor para a melhoria do ensino e aprendizagem da Geometria por meio da modelagem; estimular os alunos para o envolvimento em atividades cooperativas, realizadas em classe e extraclasse, voltado para as diferentes maneiras de calcular áreas e volumes de formas geométricas espaciais; favorecer o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas e atividades referentes a essa temática; implementar a construção de materiais lúdicos de aprendizagem.

A aplicação da metodologia foi pensada como suporte para uma investigação com poliedros convexos, por entender que a Modelagem Matemática, quando aplicada no ensino da Geometria Espacial, pode melhorar a aprendizagem dos alunos, mediante incorporação de novas tecnologias de ensino.

A escolha do assunto justifica-se pelos benefícios que a Modelagem Matemática pode trazer, permitindo que os alunos entendam os ensinamentos e os apliquem em atividades cotidianas, além de contribuir para a compreensão dos conteúdos matemáticos no contexto escolar.

A metodologia aplicada neste estudo partiu de uma revisão bibliográfica para fundamentar as ideias e estabelecer um recorte da temática. Momento em que revisitamos produções de teóricos e/ou pesquisadores que estudam Modelagem Matemática, selecionamos e analisamos trabalhos publicados nos últimos 15 anos. O estudo teve como foco as produções que versavam sobre a Modelagem Matemática no contexto da Geometria e dos poliedros convexos, tendo sido realizado em duas fases. A primeira fase consistiu na seleção e análise de textos relacionados ao tema, abrangendo a fundamentação teórica da ideia, com o intuito de explorar as concepções de pesquisadores. Na segunda fase, houve aplicação de dois questionários e a realização de uma oficina sobre Modelagem Matemática. Os dados coletados foram discutidos com base no referencial teórico para a construção do texto.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA NO ENSINO DOS POLIEDROS CONVEXOS

As formas geométricas fazem parte do cotidiano das pessoas, ou seja, elas estão rodeadas de formas geométricas, e mais precisamente a espacial, seja no ambiente natural ou em casa. Logo, para identificar se o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial através da metodologia de ensino de Modelagem Matemática contribui para a formação científica e tecnológica dos estudantes, buscamos entender o papel da Geometria Espacial como ferramenta de estudo, materializando a teoria à prática.

Para tanto, consideramos os elementos básicos aplicados para o ensino da Geometria, especificamente, os sólidos geométricos, priorizando o estudo dos poliedros convexos com o uso da Modelagem Matemática. Nesse segmento, vários elementos constituem a Geometria e favorecem as noções básicas que servem como suporte na exploração intrínseca das figuras, tanto geometricamente quanto pelo método algébrico.

Diante dessa abordagem, convém lembrar que a Geometria Espacial é conhecida como a área da Matemática que estuda as figuras tridimensionais, com partes finitas e limitadas pelas superfícies planas e curvas, bem como suas áreas, volumes, propriedades e relações. A palavra geometria significa medição da terra, ou seja, as propriedades das figuras, dos corpos, as relações internas e suas composições contemplam questões do espaço. Logo, na sala de aula, durante a explanação didática de Geometria para o ensino médio, é praxe iniciar com a apresentação da Geometria Plana, com ênfase nas figuras planas, como quadrado, círculo e triângulo, a base da tridimensionalidade.

De acordo com Pavanello (2014), a Geometria Espacial pode ser apresentada, no ensino da Matemática, como o estudo dos sólidos geométricos, destacando suas características, medidas e as propriedades da base. A autora afirma que:

A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da 'capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível', oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. Delineia-se, desta forma, um caminho que, partindo de um pensamento sobre objetos, leva a um pensamento sobre relações, as quais se tornam, progressivamente, mais e mais abstratas (Pavanello, 2004, p. 4).

Com base nas palavras da autora, o ensino da geometria acarreta uma metodologia, um caminho que qualifique seu estudo, e a partir de então, poderá desenvolver elementos do pensamento geométrico, o qual, é de suma importância na formação intelectual do educando.

Cabe mencionar que os primeiros estudos acerca da geometria e suas características apontavam o contato com as denominações de ideologias iniciais e/ou primitivas. Tendo como base a construção das figuras, a partir de conceitos como pontos, retas e plano, desenvolvendo o processo de aprendizagem sobre as figuras planas e as noções de área e perímetro, e assim por diante.

Santiago (2018) menciona que a geometria é uma área da matemática que por muito tempo ficou como segundo plano para o ensino, ou seja, não era dada a devida importância. O autor mencionado relatou que existem dois fatores essenciais à priorização para a explicação dos conteúdos algébricos, acentuados na maioria dos livros didáticos, e o outro caso, de maior preocupação, era o conhecimento dos professores. A falta de um conhecimento aprofundado ou a formação deficiente resultava na desqualificação dos



ensinamentos da Geometria. Assim sendo, a Geometria era pouco abordada na sala de aula, apesar de se constituir um mecanismo primordial na formação dos alunos, por fazer parte do seu cotidiano.

Atualmente, a Geometria vem ganhando espaço na sala de aula, devido à sua importância e aplicação nas atividades diárias. Constitui-se, ainda, um instrumento de base para o estudo de outras áreas. Essa significatividade é destacada na terceira competência específica de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio, na BNCC, seguindo o texto:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2017, p. 523).

A competência supracitada requer o desenvolvimento de variadas habilidades, não destacamos nenhuma, em especial, por acreditar que o principal é:

[...] assegurar aos estudantes as competências específicas e habilidades relativas aos seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (Brasil, 2017, p. 535).

Pressuposto que poderá ser alcançado por meio das novas modalidades de ensino, como a modelagem matemática. Uma metodologia de ensino que possibilita ao aluno explorar, buscar novas perspectivas, a partir da construção, representação e discussão, bem como explorar recursos que enquadrem as inúmeras propriedades matemáticas na construção do conhecimento da geometria espacial, à medida que desenvolve habilidades para a exploração das situações rotineiras.

A prática do fazer para aprender e a visualização de situações reais tornam a formação, do aluno mais eficiente. Logo, é possível ter uma ideia do quão necessário é que o docente esteja apto às novas modalidades de ensino, e que

não fique preso apenas ao livro, mas busque a aplicação da teoria estudada. A modelagem é a ferramenta que irá proporcionar aos alunos um ambiente investigativo, exploratório, no qual eles irão aprimorar a interpretação e a compreensão dos conceitos.

Para alcançar as habilidades citadas anteriormente, o docente deve planejar a aula visando a construção dos conteúdos, o que exige apresentações interessantes dos temas da aula, a fim de amenizar as dificuldades de compreensão e promover uma aprendizagem que favoreça e/ou desperte no aluno o interesse pela exploração na construção do conhecimento matemático, principalmente, quando abordado na geometria, os poliedros convexos.

Acredita-se ser necessário, para trabalhar os poliedros convexos, conhecer o significado da palavra. Para tanto, buscou-se a etimologia da palavra poliedro, segundo a qual é uma junção das palavras gregas *poli*, que significa várias; e *edro*, que significa faces. Desta forma, a palavra poliedro significa várias faces. Portanto, de modo genérico, entende-se poliedro como um objeto geométrico que possui muitas faces.

Na Educação Básica, a pesquisa se desenvolveu no ensino médio. O livro didático ado-

tado no período do estudo era organizado por Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020) Os autores apresentam poliedros como:

[...] sólidos formados por um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles, em que: cada lado de um desses polígonos é comum a dois, e somente dois, polígonos; a intersecção de dois desses polígonos é um lado comum ou é um vértice comum ou é vazia (Bonjorno; Giovanni Junior; Sousa, 2020, p. 78).

A concepção dos autores converge com Dante (2012, p. 206), ao afirmar que os polígonos são regiões planas limitadas, ou seja, são formados por uma:

[...] reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de uma região poligonal, comum a exatamente duas faces, é chamado aresta do poliedro. E cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

Com o objetivo de aprimorar a definição de poliedro, buscamos a compreensão proposta por Lima, et al. (1998), que assim postula: o poliedro resulta da junção de um número finito de polígonos planos, em que cada um dos lados destes polígonos é ainda o lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um dos polígonos é chamado de uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces é denominado aresta do poliedro e cada vértice de uma face, é também, vértice do poliedro.

Em consonância com a definição anterior, podemos afirmar que todo poliedro apresenta região interior e exterior, por conseguinte, a região limitada do espaço é o interior do poliedro. Assim sendo, um poliedro é convexo se o seu interior é convexo. De acordo com Lima et al. (1988, p. 233), “Um conjunto C , do plano ou do espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C ”. Em outras palavras, o poliedro é convexo quando cada uma de suas faces deixa todas as outras faces em um mesmo semiespaço que seja determinado por ela, como apresentado na Figura 1.

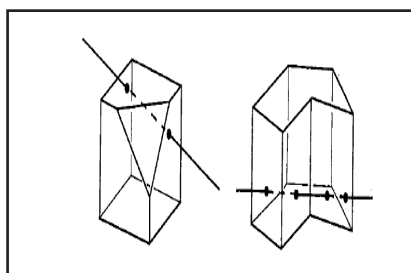


Figura 1. Poliedro Convexo

Fonte: Lima (1998, p. 233)

Observando a Figura 1, concluímos que, se o poliedro é convexo, significa que qualquer segmento de reta que liga dois pontos contidos está inserido totalmente dentro dele, caracterizando assim o objeto dessa pesquisa.

A modelagem matemática como ferramenta para o ensino dos poliedros convexos proporciona as inovações em prol do ensino e da aprendizagem, utilizando materiais adequados que estimulem o pensamento lógico dos alunos, podendo ser uma estratégia me-

metodológica, uma forma diferenciada de ensino, além da interação social que proporcione e desperte no educando o interesse pelo estudo, conforme sentença Biembengut (2009, p. 18) ao afirmar que a modelagem:

[...] emerge como estratégia para motivar estudantes, nos mais diversos níveis de escolaridade, a aprender matemática e se consolida como método não apenas para motivá-los a aprender matemática, mas principalmente, propiciar a eles a capacidade de realizarem, fora da sala de aula, modelagem e aplicações em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos; isto é, resolver problemas, tomar decisão, ter senso crítico e criativo.

Na sequência, será apresentada uma das atividades da pesquisa, envolvendo Geometria Espacial com aplicação da Modelagem Matemática como metodologia de ensino.

3. CAMINHO METODOLÓGICO

É preciso encontrar um caminho que permita descortinar o percurso entre a questão de pesquisa e os resultados que comprovem ou refutem os objetivos propostos. Neste sentido, buscamos apoio em Thiollent (2011, p. 28) ao afirmar “a metodologia desempenha o papel de ‘bússola’ na atividade dos pesquisadores, esclarecendo cada uma das suas decisões por meio de alguns princípios de cientificidade” para estabelecer o caminho que orientou no delineamento dos elementos que permitiram responder às indagações a respeito do objeto pesquisado. Na busca das informações, foi realizada uma pesquisa qualitativa.

Segundo Lüdke e André (2014, p. 14), “A pesquisa qualitativa, [...], envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”. O trabalho teve início com a análise de textos relacionados ao tema, evoluindo para a aplicação de dois questionários e a realização de quatro oficinas sobre modelagem matemática, para responder à questão de pesquisa.

Vale ressaltar que as oficinas foram realizadas em quatro dias, e os 32 alunos do 2º ano do ensino médio foram organizados em grupos para realização das atividades. No decorrer das oficinas, os participantes tiveram a chance de escolher objetos geométricos encontrados no ambiente escolar e explorá-los por meio de observações, desenhos, construções e cálculos de áreas e volumes. Essas atividades foram concluídas com reflexões e discussões sobre os desafios enfrentados pelos alunos durante o processo de ensino aprendizagem. Na sequência, será apresentada uma das atividades desenvolvidas nas oficinas.

3.1 Atividade

Tema: Modelagem Matemática Aplicada ao Ensino dos Poliedros Convexos.

Público-alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Objetivos:

- Apresentar a ideia de poliedros convexos e suas propriedades matemáticas;
- Mostrar como a modelagem matemática pode ser usada no entendimento e descrição desses objetos;

- Desenvolver a habilidade de visualização espacial e pensamento lógico.

Etapas:

Introdução (10 minutos)

- Apresentação do tema e dos objetivos da aula.
- Discussão sobre o que é um poliedro convexo e exemplos (cubo, tetraedro).
- Exposição de imagens de poliedros convexos e discussão de suas características.

Modelagem Matemática (30 minutos)

- Explicar como a modelagem matemática pode ser usada para descrever objetos tridimensionais.
- Demonstrar a utilização de planificações para representar um poliedro convexo em uma superfície bidimensional,
- Exemplificar a construção de um cubo a partir de uma planificação.

Propriedades dos Poliedros Convexos (30 minutos)

- Apresentação das propriedades dos poliedros convexos (número de faces, número de vértices, número de arestas).
- Exploração das relações entre as propriedades.
- Demonstração da modelagem matemática como alternativa para entender e investigar essas propriedades.

Atividade Prática (30 minutos)

- Distribuir modelos de poliedros convexos, em papel, para os alunos.
- Desafiar os alunos a identificar o número de faces, vértices e arestas dos modelos.
- Incentivar os alunos a construir uma planificação do modelo.

Conclusão (10 minutos)

- Recapitulação dos principais conceitos e ideias discutidas durante a aula.
- Discussão sobre a importância da modelagem matemática para a compreensão dos poliedros convexos.
- Encorajamento dos alunos para continuar a explorar e investigar os poliedros convexos.

Recursos:

Imagens de poliedros convexos, papel para construção de modelos, tesouras, cola, quadro branco e canetas.

Avaliação:

Observação durante a atividade prática, participação dos alunos durante as discussões e compreensão dos alunos dos conceitos apresentados.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A análise de dados é uma das etapas mais importantes da pesquisa, pois remete à organização sistemática das informações recolhidas pelo pesquisador, “com o objetivo de aumentar a própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar



aos outros aquilo que encontrou” (Bogdan; Biklen, 1994, p. 205).

Neste sentido, os resultados obtidos por meio das atividades realizadas durante a oficina foram fundamentados nas dificuldades relacionadas ao conhecimento prévio dos alunos e nas características que correspondem às sugestões de atividades com Geometria Espacial. As atividades foram sugeridas, tendo por base a conceituação de Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 101) ao afirmarem:

[...] as informações não nos fornecem gratuitamente as explicações e compreensões que buscamos. [...] não são simples dados fornecidos pela natureza ou pelas práticas sociais. Nós é que os produzimos mediante um processo interativo de diálogo e questionamento da realidade.

Antes de iniciar a atividade, foi dado um prazo de uma semana para que cada grupo escolhesse uma forma geométrica espacial poliédrica convexa no ambiente escolar ou nas adjacências do colégio. Em seguida, cada grupo apresentou informações sobre a forma geométrica escolhida. Essa experiência prática possibilitou que os alunos aprendessem de forma lúdica e significativa, garantindo a compreensão do conteúdo abordado.

Na atividade prática, os alunos coletaram as medidas de um vaso que tinha a forma de um tronco de uma pirâmide de base retangular, conforme ilustrado na Figura 2, e fizeram anotações para serem utilizadas posteriormente. Além disso, foi possível refletir sobre os prismas retangulares como cuboides ou poliedros, que são caracterizados por possuírem duas bases paralelas congruentes. Bem como entender as propriedades volume e área da superfície.



Figura 2. Grupo 4 (vaso de planta em formato de tronco de Pirâmide retangular)

Fonte: Autoria própria (2022)

Durante essa atividade, os alunos tiveram a chance de observar, manipular e contar as faces, vértices e arestas desse prisma, o que contribuiu para aprofundar seu entendimento sobre suas propriedades. Essa experiência permitiu que eles explorassem a geometria tridimensional de forma prática e tangível. Uma aplicação da Modelagem Matemática, conforme defende Dionísio Burak (1992, p. 62), em sua tese de doutorado, “[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” Segundo o teórico, a aplicação da Modelagem Matemática acontece por meio da ação de construção de modelos, “por mais grosseiros que possam ser. Adquire-se confiança [...] construindo modelos matemáticos e dedicando esforços para o aperfeiçoamento desses modelos” (Burak, 1992, p. 60).

Fundamentados na abordagem de Burak (1992), os alunos realizaram medidas e contagens, comprovaram conceitos de contagem, reconhecimento de formas de processamento e visualização espacial. Ao pesquisarem a forma geométrica escolhida, identificaram que o tronco da pirâmide é um sólido formado por uma seção transversal paralela à base, com faces laterais em formato de trapézio e bases em formato poligonal, as arestas laterais são congruentes, as bases são compostas por polígonos regulares, as faces externas são identificadas como trapézios isósceles congruentes e a altura de qualquer face lateral é chamada de apótema. Realizaram, também, cálculos de área e volume. As atividades foram executadas pelos alunos fora da sala de aula e permitiram a construção de habilidades fundamentais para o estudo da geometria e são contínuas em diversas áreas do conhecimento.

Segundo Bassanezi (2009), a Modelagem Matemática contribui na formação cidadã dos alunos, pois permite a interação com seu ambiente natural e, conseqüentemente, com os problemas do dia a dia, ao afirmar que:

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão. [...] A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural (Bassanezi, 2009, p. 17 e 38).

Ao retornarem à sala de aula, os alunos foram convidados a preencher uma ficha com os dados coletados, e a construir um modelo usando uma escala de conversão. A Figura 3 apresenta uma das oficinas.



Figura 3. Modelo do Grupo 4

Fonte: Autoria própria (2022)

Após preencherem as dimensões e as informações necessárias, os alunos foram desafiados a criar um modelo para o seu grupo. Eles podiam usar materiais disponíveis, como papel cartão, isopor, cola, tesoura, estilete, régua, fita métrica, entre outros.

Cada grupo apresentou o seu modelo e fez comparações com o objeto real, uma vez que os modelos foram todos construídos em escala. Na sequência, os alunos apresenta-

ram os resultados, ou seja, cada grupo de acordo com suas escolhas, socializaram as fases da sua pesquisa, destacando as dificuldades, as descobertas, caracterizaram as figuras, explicaram os cálculos que foram explorados, como as áreas, o volume, o número de faces, vértices e as arestas, e responderam às indagações dos colegas. A Figura 4 expõe o modelo construído pelo Grupo 4.



Figura 4. Modelo do Grupo 4

Fonte: Autoria própria (2022)

Com a aplicação da oficina, percebeu-se que os alunos demonstraram muito entusiasmo com a proposta diferenciada, gostaram de expor suas ideias, de explicar o porquê das respostas corretas e exercitaram a solidariedade, no momento dos agrupamentos e, algumas competências socioemocionais como a empatia, o foco, a autoconfiança, o entusiasmo e o respeito, conforme os depoimentos:

Foi descontraída, pois medimos, recortamos, construímos, e isto faz a gente esquecer as dificuldades em entender Matemática (Aluno A). A aula foi boa, porque eu aprendi muita coisa que eu vou usar no meu dia a dia (Aluno B).

Durante a realização da oficina, foram identificados comportamentos diversos entre os participantes dos grupos, que iam desde o interesse até a distração total, passando por aqueles que não demonstravam interesse algum e os mais tímidos. Diante dessa situação, o professor atuou como mediador e interveio, estimulando e incentivando os alunos a participarem das discussões e atividades propostas. Tendo por base a concepção defendida por Burak e Pontes (2016), quando afirmam que a modelagem matemática tem potencial para contribuir com a educação escolar, pois é:

[...] capaz de transformar a ignorância em sabedoria; a memorização em conhecimento elaborado por meio da pesquisa articulada com a interação entre os sujeitos envolvidos; o cidadão comum em cidadão crítico; o conformismo em luta; o problema em estratégia de solução (Burak; Pontes, 2016, p. 187).

Com base nos teóricos citados, entendemos que a modelagem matemática é uma estratégia de ensino que relaciona as situações do cotidiano do estudante com os conteúdos matemáticos, abordando fenômenos e/ou problemas em diversas áreas do conhecimento.

Após a intervenção do professor, os grupos foram capazes de responder de forma satisfatória as questões propostas, tanto em relação ao objeto real quanto ao modelo construído durante a oficina. A Figura 5 apresenta a ficha com os dados coletados.

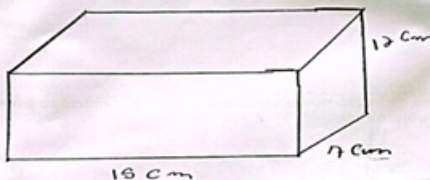
1. Nome do poliedro construído: <u>Prisma retangular</u>	
2. Dimensões do objeto real: <u>Comprimento = 150 cm</u> <u>Largura = 70 cm</u> <u>Altura = 120 cm</u>	
3. Dimensões do modelo construído: <u>Comprimento = 15 cm</u> <u>Largura = 7 cm</u> <u>Altura = 12 cm</u>	
4. Faça o esboço do desenho do poliedro construído.	
	
5. Qual foi a escala utilizada para construir o modelo matemático? <u>1:10 (cm)</u>	
6. Área total do objeto real:	7. Área total do modelo construído:
$AT = 2 \cdot 150 \cdot 12 + 2 \cdot 70 \cdot 120 + 2 \cdot 150 \cdot 70$ $AT = 3600 + 16800 + 21000$ $AT = 41400 \text{ cm}^2$	$AT = 2 \cdot 15 \cdot 12 + 2 \cdot 7 \cdot 120 + 2 \cdot 15 \cdot 70$ $AT = 360 + 1680 + 2100$ $AT = 4140 \text{ cm}^2$
8. Volume do objeto real:	9. Volume do modelo construído:
$V = a \cdot b \cdot c$ $V = 150 \cdot 70 \cdot 120$ $V = 1.260.000 \text{ cm}^3$	$V = 15 \cdot 7 \cdot 12$ $V = 1260 \text{ cm}^3$
10. Determine o número de vezes que o volume do modelo construído é menor em relação ao volume do objeto real:	
$n = \frac{1.260.000}{1260} \quad n = 1000 \text{ vezes}$	

Figura 5. Ficha com os dados

Fonte: Autoria própria (2023)

A última oficina foi a consolidação dos conhecimentos, realizada com a correção das questões. Na oportunidade, fornecíamos feedback detalhado aos alunos, explicando o conteúdo desenvolvido e indicando as alternativas corretas e incorretas. Quando necessário, também exemplificávamos com outras questões, apresentando as formas geométricas identificadas e escolhidas, e realizávamos exercícios em conjunto, para que os alunos pudessem compreender melhor os conceitos abordados. Dessa forma, garantíamos que os estudantes recebessem um suporte completo e efetivo em seu aprendizado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar a caminhada, apresentamos os resultados alcançados com o estudo sobre a contribuição da Modelagem Matemática para o processo de ensino aprendizagem de Geometria Espacial, em resposta à questão problematizadora, da qual apontamos a formação científica, tecnológica e a cidadania como ganhos obtidos no percurso educacional.

O estudo teve início com a análise de textos científicos que versam sobre a temática, contudo, a mola propulsora foi a angústia do autor da pesquisa, que é também professor da Educação Básica em um colégio de tempo integral.

Considerando o exposto, reconhecemos a importância de tornar o ensino de Matemática mais democrático por meio do uso da Modelagem Matemática. Essa abordagem representa uma proposta de ensino viável, capaz de fornecer entendimento e compreensão dos conteúdos matemáticos, especialmente da Geometria Espacial. Ao adotar esse procedimento, buscávamos promover uma aprendizagem significativa, que seja construída de forma envolvente e relevante para os estudantes.

Levando em consideração que a modelagem difere da abordagem tradicional do ensino da matemática, um dos maiores desafios desse projeto foi mostrar aos alunos que eles poderiam ser colaboradores ativos do processo de ensino, e não apenas receptores passivos de informações. Isso se deve ao fato de que a modelagem matemática exige a participação ativa do aluno, envolvendo-os em todo o processo.

A proposta da pesquisa e sua abordagem permearam o ensino da geometria espacial com ênfase nas formas dos sólidos geométricos, em especial os poliedros convexos, cuja realização ocorreu a partir da percepção no ambiente escolar e de informações que fazem parte do dia a dia dos alunos, bem como do envolvimento com outras áreas do conhecimento.

Nesse viés, a efetivação do projeto ocorreu mediante as fases já citadas, e seguiu um roteiro com a elaboração de um plano de ação. A modelagem matemática é uma forma de relacionar teoria e prática, para que as aulas sejam mais interessantes e interativas, evitando os preceitos tradicionais e abrindo um leque de possibilidades aos alunos. É uma nova ferramenta para facilitar o processo de ensino e de aprendizagem.

Além disso, a necessidade de despertar os alunos para o enfrentamento de novos desafios requer novas propostas pedagógicas que incluam a preservação dos recursos existentes, sendo necessária a elaboração de estratégias para evitar a degradação do ensino.

Conscientizar o aluno de que a utilização da modelagem matemática pode ser uma oportunidade para desenvolver o hábito da leitura, do estudo em casa, da autonomia, do pensamento crítico, da capacidade de conviver e aprender com os outros é um dos maiores obstáculos que rodeiam a educação escolar. Portanto, ultrapassar esse obstáculo implica em tornar o aluno mais ativo e gerente de seu conhecimento. A tarefa não é fácil, porém necessária.

Referências

- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2009.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BONJORNIO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma Matemática**: geometria. Ensino Médio, área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª versão revista. Brasília, DF. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio.pdf. Acesso em: jul. 2024.
- BURAK, Dionísio; PONTES, Helaine Maria de Souza. Modelagem Matemática na Educação Básica: uma experiência vivida. In: BRANDT, Célia Flick; BURAK, Dionízio; KLÜBER, Tiago Emanuel. (orgs). **Modelagem matemática**: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]. 2 ed. rev. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, ISBN 978-85-7798-232-5.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações, v.2, Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2012.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2007. Coleção Formação de Professores

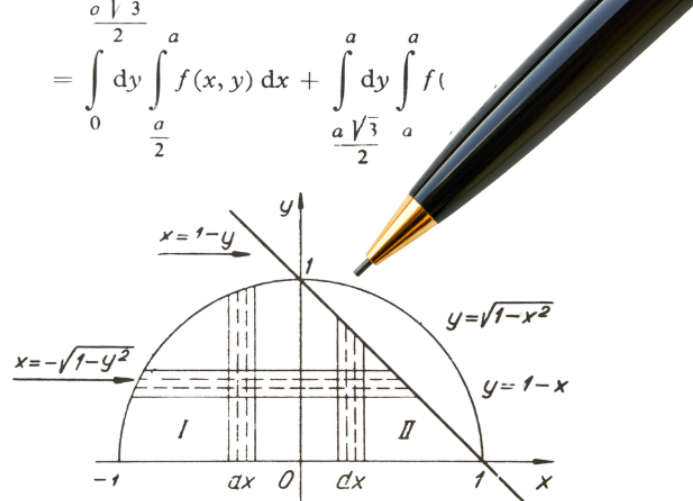
LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Coleção do professor de Matemática. vol 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Disponível em: www.ime.usp.br/~toscano/disc/2021/Lima-CarvalhoWagnerMorgadoEMvol2.pdf. Acessado em: out. 2024

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. 2ª edição. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.

PAVANELLO, Regina Maria. (org.). Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula. São Paulo: Biblioteca do educador matemático, 2004. **Coleção SBEM** – v. 2.

SANTIAGO, Thiago Lopes Nascimento. **O ensino dos sólidos geométricos:** um estudo utilizando a modelagem matemática / Thiago Lopes Nascimento Santiago. – Juazeiro-BA, 2018. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/profmat/thiago-lobes-nascimento-santiago_turma_2015.pdf. Acessado em: nov. 2024.





12

ANÁLISE DE ERROS: UM CAMINHO PARA APRENDER FUNÇÃO AFIM

ERROR ANALYSIS: A WAY TO LEARN THE AFFINE FUNCTION

Maria Camila da Cunha dos Santos¹

Lélia de Oliveira Cruz²

Sandra Imaculada Moreira Neto³

¹ Mestre, UEMA, São Luís - MA

² Doutora, UEMA, Caxias - MA

³ Doutora, UEMA, São Luís - MA

RESUMO

O presente trabalho investigou os erros cometidos na resolução de questões envolvendo Função Afim por alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública estadual. O estudo da Função Afim é uma etapa importante do currículo, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é essencial para a resolução de problemas cotidianos e matemáticos, o que favorece a conexão de várias áreas do conhecimento. Nessa conjuntura, a problemática formulada buscou a solução do questionamento: Quais as contribuições da análise de erros para o ensino aprendizagem da Função Afim na primeira série do Ensino Médio? Para respondê-lo analisou-se os erros dos estudantes em uma verificação de aprendizagem sobre Função Afim. A partir da Análise de Erros nas respostas obtidas nos testes, pôde-se conferir as dificuldades sentidas pelos estudantes no domínio de conceitos e procedimentos associados à Função Afim, por conseguinte, percebe-se que esta é uma estratégia que pode fundamentar ações com vistas a favorecer melhor a construção do saber Matemático.

Palavras-chave: Função Afim, Resolução de Questões, Erro.

ABSTRACT

The present research investigated the misconceptions made by first-year secondary school students from a public state school when solving problems related to Affine Functions. The study of affine functions is an important stage of the curriculum, contributing to the development of algebraic reasoning, which is essential for solving both real-life and mathematical problems, and promoting connections across various domains of knowledge. In this context, the stated problem aimed to address the following inquiry: What are the contributions of error analysis to the teaching and learning of affine functions in the first year of secondary school? To answer this, the errors made by students were analyzed through a learning assessment on Affine Functions. As a result of the error analysis of the responses obtained from the tests, it was possible to identify the obstacles faced by students when learning the concepts and procedures associated with affine functions. Therefore, it is evident that this is a strategy that can support interventions aimed at more effectively promoting the construction of mathematical knowledge.

Keywords: Affine Functions, Solving Problems, Error.



1. INTRODUÇÃO

O estudo da Função Afim é uma etapa importante do currículo, tendo em vista sua capacidade de contextualização em diversas situações, bem como, a aplicação desse assunto em outras áreas do conhecimento. A abordagem desse conteúdo ocorre desde o nono ano do ensino fundamental e é retomada algumas vezes durante o Ensino Médio, mesmo assim, é possível verificar a dificuldade dos estudantes em compreender e, consequentemente, resolver questões sobre o tema.

Ribeiro e Cury (2020) salientam que o professor não deve apenas conhecer os conteúdos que vai lecionar, ele precisa também ter conhecimento sobre as demais particularidades referentes ao ensino, por conseguinte, os autores destacam a análise de conteúdo de erros como estratégia para compreender dificuldades dos estudantes.

Desse modo, buscando-se investigar os percalços nas resoluções, realizou-se uma análise sobre os erros na resolução de questões envolvendo Função Afim por alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

Ao abordar essa temática, destaca-se, as contribuições dos trabalhos de Cury (2019) e Esteban (2013), que compreendem o erro como um momento do processo de construção do conhecimento, a partir do qual é possível entender como o raciocínio para resolver a questão está sendo construído pelo aluno. A partir desta ideia, o erro é encarado sob um novo prisma, ou seja, como ferramenta pedagógica e ponto de partida para a melhoria da aprendizagem dos estudantes.

Dessa maneira, formulou-se a problemática que buscou a solução do questionamento: Quais as contribuições da análise de erros para o ensino aprendizagem da Função Afim na primeira série do Ensino Médio? Para respondê-lo analisou-se os erros dos estudantes em uma verificação de aprendizagem sobre Função Afim, baseando-se em Cury (2019) e em Zabala (1998), que trata sobre a tipologia dos conteúdos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O erro é um processo comum na aprendizagem de qualquer disciplina e pode ser ocasionado por vários fatores. Destacar os erros dos estudantes é uma atividade comum, mas restringe-se, predominantemente, a assinalar quais questões estão certas ou estão erradas, não dando espaço para verificação das razões que levaram o aluno a errar. Nesta realidade, onde a educação é pautada em resultados, errar recebe contornos negativos.

Normalmente, o pensamento comum ao realizar a correção das atividades dos alunos é associar o seu erro com a falta de conhecimento quando, na verdade, poderia ser tratado como uma janela para o pensamento do aluno. Errar uma questão proposta não corresponde ao completo desconhecimento, da mesma forma que acertá-la não represente total domínio do que se está estudando (Esteban, 2013).

Cury (2019) afirma que o erro é execrado, o que influencia decisivamente no comportamento tanto do professor quanto do aluno, este, por medo da punição, tenta esconder o erro, enquanto que o docente elabora questões que apresentam propositalmente a dificuldade do aluno.

Por outro lado, se o erro for visto sob uma perspectiva diferente, é possível utilizá-lo como uma estratégia pedagógica, como afirma De La Torre (2007, p. 10), segundo o qual

“[...] o erro não é um fim, não pode sê-lo: é uma estratégia”. Ou seja, o autor defende a abordagem do erro de uma maneira diferente, não objetivando o resultado, mas observando e analisando os processos de resolução que desembocaram nele, é o que o autor chama de mudança de enfoque dos resultados para os processos.

Ribeiro e Cury (2020) apresentam e sintetizam algumas pesquisas em que o enfoque era detectar erros e dificuldades dos estudantes no estudo de funções. Nesses trabalhos foram observadas nas resoluções: o uso incorreto de propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, a não utilização do princípio aditivo da igualdade, o uso de propriedades inválidas e dificuldades no conceito de função.

Posto que o erro, como uma ferramenta de análise, é uma estratégia positiva na superação das dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos, busca-se mostrar como, efetivamente, o seu uso pode ocorrer no processo avaliativo, o que requer, dentre outros fatores, que o erro seja categorizado.

3. METODOLOGIA

Trata-se de uma investigação que explora uma base qualitativa. A pesquisa ocorreu em uma escola estadual da cidade de São Luís- MA e consistiu em aplicação, para 22 estudantes da Primeira Série do Ensino Médio, de uma verificação de aprendizagem sobre Função Afim por meio de um instrumento avaliativo e, por fim, análise das respostas a partir do viés da Análise de Erros.

Cury (2019), baseando-se em Bardin (1979) descreve uma estratégia para a realização da análise de erros:

- 1º). As respostas a cada questão do teste são separadas e organizadas e, posteriormente, digitalizadas. Neste ponto, serão separadas as questões certas, erradas e em branco.
- 2º) Unitarização e classificação das respostas incorretas, com agrupamento das resoluções segundo critérios definidos e levando-se em consideração as resoluções que compartilham do mesmo código de identificação;
- 3º) Tratamento dos dados, por meio da observação das categorias de erros, a fim de identificar padrões, frequências e relações entre elas. Por fim, elaboração de textos para cada classe de erros, com apoio retirados do próprio *corpus*.

Os erros que apareceram foram, então, reagrupados em categorias maiores, seguindo-se a tipologia de conteúdo proposta por Zabala (1998), dando-se ênfase aos conteúdos conceituais e procedimentais, cujos erros foram considerados do Tipo 1 (T1) e do Tipo 2 (T2).

Os conteúdos conceituais associam conceito e princípio, trata sobre o conjunto de fatos, objetos e símbolos, as mudanças que reproduzem sobre eles e as relações de causa e efeito ou de correlação que se estabelecem entre eles. Os conteúdos procedimentais, por sua vez, versam sobre todas as regras, técnicas, métodos, habilidades dirigidas para se alcançar determinado objetivo (Zabala, 1998).

4. ANÁLISE DOS DADOS E PRODUÇÃO DE RESULTADOS

Como dito anteriormente, a categorização dos erros seguiu a metodologia de traba-



Iho de Cury (2019) e os erros que apareceram foram reagrupados em categorias maiores, seguindo-se a tipologia de conteúdo proposta por Zabala (1998), que embora não fale diretamente sobre categorização de erros, ele trata sobre a aprendizagem dos conteúdos, levando em consideração a sua tipologia. Dessa forma, foi dada ênfase aos conteúdos conceituais e procedimentais, da seguinte forma:

Tipo 1 (T1) – Erros predominantemente ocasionados por dificuldades de apropriação de conteúdos conceituais;

Nessa classificação foram incluídos:

- Apenas repetição dos dados da questão;
- Erro no uso dos dados da questão;
- Dificuldades no uso da linguagem matemática.

Tipo 2 (T2) – Erros predominantemente ocasionados por dificuldades de apropriação de conteúdos procedimentais;

Nesta classificação foram incluídos:

- Erro na interpretação do enunciado;
- Erro na realização de um cálculo aritmético;

Foi frequente a aparição de mais de um erro na resolução de questões, porém, a fim de facilitar a organização e análise das respostas, foi considerada a primeira ocorrência de erro na resolução do estudante.

Primeira questão: Dada a função f definida de $R \rightarrow R$, com expressão algébrica $f(x) = 5x + 3$. Determine o zero da função.

Nessa questão, 12 estudantes erraram (54,55%), 1 deixou em branco (4,54%) e 9 acertaram (40,91%). A maior faixa de erros (8 ocorrências) é do tipo T1, ou seja, o aluno não compreendia o conceito de zero da função, não fazendo qualquer substituição a fim de calculá-lo. Um exemplo pode ser visto na Figura 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2) f(x) = 5x + 3 \\ f(x) = 5x + 3 \\ f(x) = 3 + 5 \cdot x = 8x \end{array} \right.$$

Figura 1. Erro T1 do aluno_02 da segunda questão

Fonte: Arquivo da própria autora (2022)

O aluno_02, inicialmente, repetiu a função e, posteriormente, adicionou os coeficientes da função. Erros como esse foram recorrentes ao resolver as questões propostas, evidenciando que os alunos não compreendem que $5x$ e 3 não são termos que possam ser somados entre si.

Matos e Ponte (2008) verificaram um erro semelhante ao proporem a resolução da equação $2x + 3 = 4x - 1$ a um aluno do 8º ano, neste caso, o aluno não reconhecia o símbolo $=$ como sinal que representa igualdade/ equivalência, assim sendo, o sinal $=$ seria um indicativo de um resultado de uma operação, levando o estudante a operacionalizar um binômio

$$2x + 3 = 5x.$$

Booth (1995) destaca uma diferença marcante entre aritmética e álgebra: o fato desta última utilizar letras para indicar valores. Essa diferenciação pode resultar no que a autora chama de falta de referencial numérico. Em uma verificação aplicada a estudantes da sétima série, um dado aluno, ao ser questionado sobre o significado da adição $3 + 5y$, respondeu ao professor que ela representa 8 grupos de y . Este estudante continuou a ser indagado, agora sobre o que seria o y , a resposta obtida pelo docente foi que o y poderia ser qualquer coisa que começasse com a letra y , como iate (em inglês *yatch*). Ou seja, o aluno ainda não compreende que a letra y representa um valor e confunde com o que ocorre na aritmética, quando $3m$ pode significar, por exemplo, 3 metros.

Agora, voltando às resoluções, com relação aos erros do tipo T2, eles estão associados aos problemas na execução dos passos, ou seja, são respostas em que os alunos conseguiram mostrar que entendiam que o zero da função era o valor de x que fazia $f(x) = 0$, porém, erraram técnicas associadas à resolução da equação, que aparece no decorrer do problema após a substituição de $f(x)$. Esse fato diz respeito a quatro resoluções. Um exemplo em que erro T2 ocorreu pode ser visto na Figura 2.

$$\begin{aligned}
 y=0 &\rightarrow f(x)=5x+3 \quad a=5 \quad b=3 \\
 0 &= 5x+3 \\
 -5x &= 3 \cdot (-1) \\
 5x &= -3 \\
 x &= \frac{-3}{5} = 6
 \end{aligned}$$

Figura 2. Erro T2 do aluno_05 da segunda questão.

Fonte: Arquivo da própria autora. (2022)

O aluno_05 identificou os coeficientes, destacou que para determinar o zero da função deveria fazer $f(x) = 0$, fez a substituição corretamente e iniciou a resolução da equação $0 = 5x + 3$. No último passo, realizou a divisão $\frac{-3}{5} = 6$, ao invés de $-0,6$.

Essa resolução desperta duas reflexões, a primeira referente aos sinais, erro esse bastante recorrente, onde o aluno não percebe ou não sabe que ao dividir um número negativo por um positivo a resposta será negativa. Claro, pode ter sido apenas um descuido, mas Landim e Maia (2018) para investigar as dificuldades de estudantes do 8º ano e da Educação de Jovens e Adultos (EJA) na compreensão da multiplicação e divisão de números inteiros, utilizaram entrevistas clínicas com 32 estudantes e, por meio delas, perceberam que os alunos apresentam resistências e erros comuns, como confundir sinais de operação com sinais de número e aplicar regras dos números naturais em contextos de números inteiros. Os autores, dessa forma, ressaltam que o ensino tradicional, baseado em regras e memorização, sem contextualização, dificulta a aprendizagem significativa.

A segunda reflexão despertada pela resolução do aluno_05 refere-se à realização da operação em si, ou seja, não transformar, corretamente, $\frac{3}{5}$ na forma decimal.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca, ainda para o sexto ano do ensino fundamental, a importância que os estudantes desenvolvam a habilidade de reconhecer e converter números racionais entre suas diferentes representações, como frações, números decimais e porcentagens, aplicando esses conhecimentos em diversos contextos. Dessa maneira, é necessário traçar caminhos para que os estudantes se apropriem eficien-

temente das diferentes representações dos números racionais (Brasil, 2018).

Abrahão (2016) aponta que atividades práticas e reflexivas, aliadas ao uso de materiais manipulativos (material dourado, *Cuisenaire*), são eficazes para desenvolver uma aprendizagem significativa, destacando a importância do domínio do conteúdo e das estratégias didáticas pelos professores para ensinar de forma mais eficiente e contextualizada os números racionais.

Segunda Questão: Utilizando a função $f(x) = -2x - 4$, definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esboce o gráfico que representa essa função.

Nesta questão, houve 13 soluções incorretas (59,9%), 2 em branco (9,09%) e 7 corretas (31,82%). Nessa questão houve um equilíbrio na ocorrência dos erros: 7 do tipo T1 e 6 do tipo T2. O exemplo de erro T1 pode ser observado na figura 3.

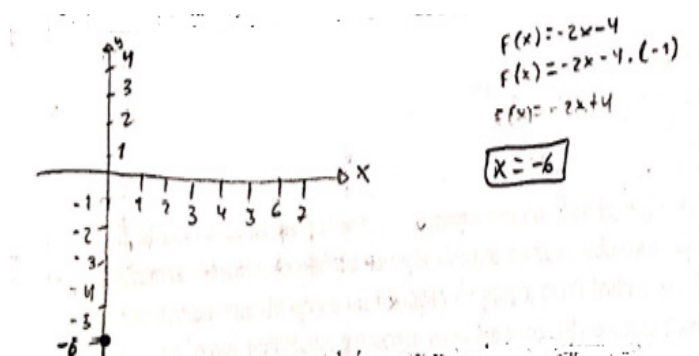


Figura 3. Erro T1 do aluno_22 da terceira questão

Fonte: Arquivo da própria autora. (2022)

Nesta questão, o aluno_22 realizou operações com os coeficientes da função, chegando a $x = -6$, valor este que o mesmo estudante colocou no eixo das ordenadas, mostrando também que possui dificuldades em encontrar a posição de um ponto no plano cartesiano.

Com relação aos erros do tipo T2, os casos se dividiram em trocas de sinais em operações aritméticas e, majoritariamente, confusão sobre os eixos cartesianos, ou seja, registros que deveriam ser feitos no eixo das abscissas foram feitos no das ordenadas e vice-versa. O erro T2 ocorreu em seis resoluções na turma 100 MAT e pode ser visto no exemplo tratado na Figura 4.

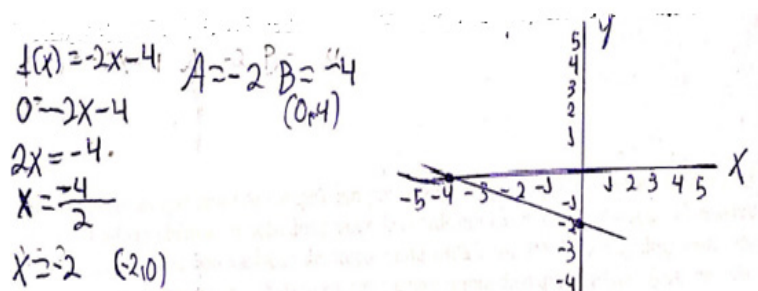


Figura 4. Erro T2 do aluno_10 da terceira questão.

Fonte: Arquivo da própria autora (2022)

O aluno_10 extraiu corretamente o coeficiente angular e o coeficiente linear da Função Afim, além de determinar o zero da função, porém, ao colocar os dados no plano cartesiano, trocou os eixos nos quais deveria fazer cada registro.

A BNCC enfatiza a importância de os alunos serem capazes de transitar entre essas

diferentes representações, reconhecendo suas vantagens e limitações em diferentes contextos, uma vez que compreender como essas representações funcionam e transitam entre elas, facilita o entendimento de como o conhecimento Matemático é construído. Na Função Afim, por exemplo, percorrer por essas representações significa ter ferramentas suficientes para interpretar problemas e analisar fenômenos, que ocorrem nas diversas áreas do conhecimento, como saúde, economia, meio ambiente e outras (Brasil, 2018).

Duval (2012) observa que os alunos frequentemente têm dificuldades em lidar com múltiplas representações e em realizar conversões entre elas. Isso decorre do fato de que cada sistema de representação tem suas próprias regras e características, e a transição entre eles exige um domínio específico. Ou seja, um aluno pode compreender uma função em sua forma algébrica, mas não conseguir interpretar o mesmo conceito em um gráfico. De toda forma, a falta de coordenação entre esses registros pode levar a dificuldades de aprendizagem e a concepções equivocadas.

5. CONCLUSÕES

O estudo mostrou algumas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na resolução de questões sobre Função Afim, extrapolando a classificação costumeira de questão certa ou questão errada. Observou-se que há diversidade de níveis de aprendizado na turma avaliada, notada pelas diferentes formas de resolução apresentadas no instrumento avaliativo.

Alguns alunos enfrentavam dificuldades desde a apropriação dos conceitos pertinentes a cada questão proposta, o que foi verificado pela repetição de dados e pela ausência de encadeamento lógico das resoluções. Notou-se, também, os casos em que alunos mostravam conhecer mais sobre o assunto trabalhado, errando operações aritméticas e trocando a posição dos pontos ao fazer representações no plano cartesiano.

Os erros, nesse caso, apontam quais tópicos precisam ser retomados e abordados de maneira mais eficiente em sala de aula, buscando-se levar em consideração os desafios de aprendizagem de cada aluno.

Com isso, pôde-se ver o potencial da Análise de Erros como fonte de informação acerca do conhecimento do alunado sobre função Afim. Espera-se que pesquisas como essa contribuam para o debate sobre o tema e levistem outros questionamentos que podem ser utilizados em trabalhos futuros como, por exemplo, sugestões de estratégias de intervenções mediante a realização da Análise de Erros e reaplicação dos testes com vistas a perceber se houve alguma alteração de desempenho.

Referências

ABRAHÃO, A. M. C. Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, 28 dez. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2209/2264>. Acesso 20 jan. 2025.

BRASIL **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasília: MEC, 2018.

BOOTH, L.; COOK, J. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

DE LA TORRE, S. **Aprender com os Erros**: o Erro Como Estratégia de Mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007.



240 p.

DUVAL, R. Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012. Tradução de: Strasbourg: ULP- IREM, 1993. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 3 jan. 2025.

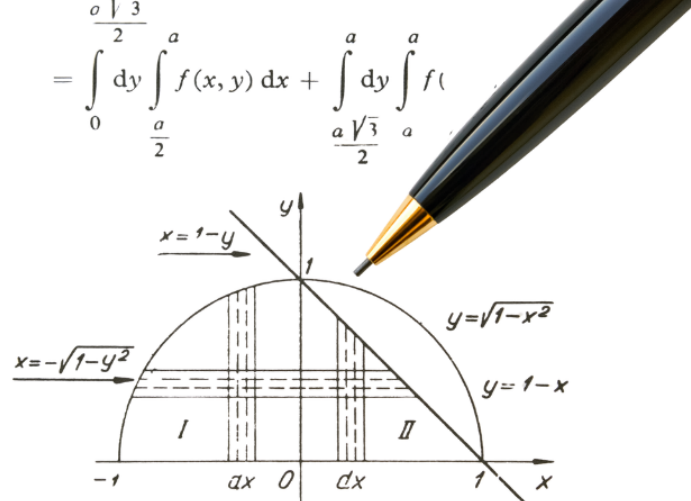
ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?** 2. ed- Petrópolis, RJ: De Petrus et Alii, 2013.

LAMDIM, E.; MAIA, L. S. L. Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros na sala de aula. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, Campo Mourão, v.7, n.14, p. 88-109, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.33871/22385800.2018.7.14.88-109>. Acesso em: 3 jan. 2025.

MATOS, A.; PONTE, J da. O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. **Revista Latinoamericana de Investigacion Matemática Educativa**, México, v. 11, n. 2, p. 195-231, 2008. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200003. Acesso em: 12 jan. 2025.

RIBEIRO, A. J; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**. Autêntica Editora. 2020.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Penso, 1998. 238 p.



13

PROPORCIONALIDADE E A RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

PROPORTIONALITY AND ITS RELATIONSHIP WITH THE DEVELOPMENT OF PROPORTIONAL REASONING

Celina Amélia da Silva¹

Thadeu Alves da Silva Júnior²

João Coelho Silva Filho³

¹ Doutora, UEMA - Campus Caxias - MA

² Mestre, UEMA - Campus Brejo - MA

³ Doutor, Departamento de Matemática e Informática, UEMA, São Luís - MA

RESUMO

A matemática é vista como disciplina que exige dos alunos uma aprendizagem que nem sempre vem a ser utilizada, proporcionando assim um estudo que nem sempre tem aproveitamento, causando obstáculos na transmissão e aprendizagem dos saberes nessa área do conhecimento. Diante dessa problemática, focando no tema que é considerado eixo integrador de diversos outros e seu conceito está presente em outras áreas do conhecimento que é a “proporcionalidade matemática”, investigamos como seu estudo pode propiciar o desenvolvimento do raciocínio proporcional. A proporcionalidade matemática é percebida desde o Ensino Fundamental, está presente nas atividades humanas e se mostra relevante no decorrer da história da humanidade. O tema proporcionalidade em seu conceito estabelece relação a vários outros conteúdos e também a outras ciências, se mostrando assim de grande importância não só no âmbito escolar como na vida dos seres humanos. Com essa observação, temos uma ferramenta, que é a associação de um conteúdo a situações do cotidiano, o que pode ser de grande valia para a compreensão dos alunos.

Palavras-chave: Proporcionalidade matemática, Raciocínio proporcional, Desenvolvimento do raciocínio proporcional.

ABSTRACT

Mathematics is seen as a subject that requires students to learn in a way that is not always used, thus providing a study that is not always useful, causing obstacles in the transmission and learning of knowledge in this area of knowledge. Faced with this problem, focusing on the theme that is considered an integrating axis of several others and its concept is also present in other areas of knowledge, which is “mathematical proportionality”, we investigated how its study can promote the development of proportional reasoning. Mathematical proportionality has been perceived since elementary school, is present in human activities and has proven to be relevant throughout the history of humanity. The theme of proportionality in its concept establishes a relationship with several other contents and also with other sciences, thus proving to be of great importance not only in the school environment but also in the lives of human beings. With this observation, we have a tool, which is the association of a content with everyday situations, which can be of great value for students’ understanding.

Keywords: Mathematical proportionality, Proportional reasoning, Development of proportional reasoning.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de matemática proporciona o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico e a criatividade, essenciais para a resolução dos variados problemas, o que contribui para que o indivíduo seja capaz de inserir-se num mundo cada vez mais competitivo. Essas qualidades que contribuem com o desenvolvimento intelectual, são pontos importantes para que os alunos associem representações do mundo real a representações matemáticas fazendo uso de induções e conjecturas, fatos respaldados pela legislação educacional em vigor. Considerando essas perspectivas, esse estudo objetivou de forma geral, pesquisar a relação da proporcionalidade com o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Para desenvolver o raciocínio proporcional, o aluno estará preparado para elaborar muitos outros conceitos matemáticos importantes, e a resolver situações-problemas envolvendo medidas, usar regra de três com segurança, entre outros conceitos matemáticos. Assim, a pesquisa possibilitou a análise sobre a importância da proporcionalidade matemática no ensino e aprendizagem, além de possibilitar a docentes um repensar nas estratégias de ensino e que visem o aprimoramento do processo de aprendizagem dos educandos.

Dessa forma, de acordo com a pesquisa apresentada, as observações sobre o ensino e aprendizagem de proporcionalidade matemática aqui levantadas, com base legal e referenciais teóricos, bem como opiniões de docentes analisadas por meio de questionário, remetem à importância no que diz respeito ao desenvolvimento de um raciocínio proporcional nos educandos, além de ser no mínimo questionável como está sendo feito esse ensino ao observarmos o desempenho dos alunos a respeito de proporcionalidade em provas externas como por exemplo o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA (Programme for International Student Assessment).

2. PROPORCIONALIDADE E O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O ensino e aprendizagem da proporcionalidade muitas das vezes é resumida em razão e regra de três deixando de lado a associação deste tema a outros conteúdos o que pode objetivar uma assimilação de uma forma mais proveitosa e a efetiva compreensão dos menos, fato necessário para uma boa aprendizagem em qualquer conteúdo a ser estudado.

Estudar proporções é uma abertura para busca de uma proposta interdisciplinar de ensino. Desta forma, muitos livros didáticos trazem propostas para trabalhos onde o conceito de proporção é explorado em diversas ciências. no entanto Garcez (2016, p. 20) afirma que, “[...] há, dentro deste universo, as falsas contextualizações, isto é, onde o autor visando apropriar-se desta proposta interdisciplinar, faz referências a outras áreas do conhecimento sem apresentar de forma explícita e prática para o aluno uma ligação entre elas”

A proporcionalidade está presente não só nos ambientes acadêmicos, escolares, mas está explícita ou não no pensamento do pedreiro com relação à quantidade de dias estimado para concluir um trabalho, levando em consideração à quantidade de pessoas que irão executar o serviço. Assim o raciocínio proporcional se mostra útil nas atividades do nosso cotidiano e que seu estudo é de fundamental importância na construção de um



pensamento matemático. Esta pesquisa investiga pontos no decorrer da história e definições sobre proporcionalidade, mostrando diferentes abordagens na resolução de problemas, bem como sua associação a outros temas.

Com relação à importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional para um indivíduo, Santos (2018), afirma que:

Exercer cidadania, é estar preparado para o mundo do trabalho, trata-se de ser capaz de tomar decisões diante da complexidade da sociedade. Nessa perspectiva, a matemática tem papel fundamental visto que a organização social, se tornou tão complexa que a matemática se faz necessária em todos os seus setores; desde os mais complexos e sofisticados, onde são movimentadas altas quantias financeiras e utilizadas as tecnologias mais elaboradas, até setores que para leigos, não possuem influência direta da Matemática, (aparentemente), como postos de saúde, recursos humanos (Santos, 2018, p. 16).

A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras ciências no âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em uma de suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática há várias décadas. (Maranhão, Machado, 2011), tendo em vista ser um tema pertinente na contextualização de atividades cotidianas podendo servir de interação na construção de um pensamento intuitivo, algébrico, aritmético do aluno o que contribui para o desenvolvimento mental.

2.1 A proporcionalidade matemática no ensino

O estudo de proporcionalidade matemática se mostra relevante na história da humanidade, na busca de contrastes harmônicos e sem dúvida no contexto escolar, sendo um dos conteúdos mais associados a outros e ao cotidiano com isso é um tema necessário ao ensino fundamental e demais níveis educacionais. O conceito de proporcionalidade matemática está presente em diversos conteúdos e se faz presente na construção de noções fundamentais da matemática, bem como nas ações do cotidiano.

Homologada em 2017, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Segundo a BNCC, a matemática está relacionada a diversos fenômenos do cotidiano e sistematiza os conteúdos a serem estudados na educação básica.

A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetivos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (Brasil, 2017, p. 265).

Nesse sentido, defende-se que a proporcionalidade é importante na compreensão e desenvolvimento do conhecimento, conforme citado na BNCC para a assimilação e apropriação do saber matemático. Com referência ao Ensino Fundamental, anos finais, a BNCC, sugere que o estudo da matemática seja dividido em cinco unidades temáticas, são elas:

Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Sobre a temática Álgebra a BNCC afirma que: As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (Brasil, 2017, p. 270).

No Ensino Fundamental, temos na matemática (Matemática Comercial, Função do 1º grau, Geometria Plana); em Geografia (Escala, Densidade demográfica); Ciências (Química – Lei das proporções definidas (Lei de Proust), (Física – Princípio da conservação de energia, Leis de Newton, Gravitação Universal).

No Ensino Médio, é visto na matemática (Função afim, Progressão aritmética, Matemática comercial, Geometria Plana); em Geografia (Escala, Densidade demográfica); Física (Leis de Newton, Princípio da conservação de energia, Lei geral dos gases, Termodinâmica, Ondulatória); em Química (Lei das Proporções Constantes, Cálculo Estequiométrico

Nesse sentido, entendendo-se que o conceito de proporcionalidade que se mostra significativo na matemática e em outras disciplinas e acreditando que esse conceito deve ser estabelecido principalmente no ensino fundamental, assim, se tratando de um tema importante, de notória relevância, qual a visão de professores sobre o ensino e aprendizagem da proporcionalidade matemática? Na busca por entendimentos, aplicamos um questionário há um grupo de professores (todos graduados em matemática, especialistas ou cursando mestrado) de redes públicas e privadas de algumas cidades do estado do Piauí e do Maranhão, cujos resultados foram analisados tendo em vista buscar resposta aos questionamentos inicialmente levantados.

3. RELEVÂNCIA DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE

Ao parar para pensar em como a matemática está ligada a todas as atividades do dia a dia, não fica difícil conseguir perceber que a proporcionalidade está nas mais diversas situações desenvolvidas pelo ser humano, e mesmo para quem não consegue a ver de forma explícita, certamente utiliza o pensamento proporcional em muitos momentos do seu dia. Essa concepção está registrada em muitos momentos da história de povos da antiguidade ao longo dos tempos.

Lima, Andrade e Alcântara (2018) apontam que, ainda na antiguidade, em 1650 a. C. foi escrito o principal texto matemático, o Papiro de Rhind, com regras para realizar cálculos de adições, subtrações, frações, equações simples, problemas de aritmética e medições de superfícies e volumes, inclusive problemas que envolviam ideia de proporcionalidade, no qual grande parte dos problemas eram resolvidos pelo método da falsa posição. Método este que mencionaremos com mais detalhes no decorrer desta pesquisa.

Com essa observação, os autores destacam que o interesse pela proporcionalidade acontece no decorrer da história da humanidade, quando menciona que “podemos notar que desde os primórdios da história, a proporcionalidade já era utilizada” (Lima, Andrade, Alcântara, 2018, p. 01), evidenciando que em suas visões, a proporcionalidade se faz interessante no estudo ao longo dos tempos.

4. DIFERENTES ABORDAGENS, GENERALIZAÇÕES

Como já mencionado, o conceito de proporcionalidade está em diversas situações, no Ensino fundamental anos finais, há vários outros temas nos quais é aplicado o pensa-



mento proporcional e que muitas vezes não é explicitado para os alunos tal relação. Outro ponto a ser observado é o fato de questões sobre grandezas, serem desenvolvidas apenas por regra de três. Com isso, Luiz Júnior (2016) entende que:

É oportuno refletir se apenas este método de resolução capacita os educandos de forma a desenvolver integralmente a habilidade de solucionar problemas contextualizados e reais envolvendo os conceitos de proporcionalidade. Desenvolver diferentes métodos de resolução é possibilitar diferentes visualizações e interpretações de uma mesma situação, aumentando assim o nível cognitivo do estudante sobre o conceito abordado (Luiz Júnior, Hércules; 2016; p. 5).

Nesse contexto, a seguir, mencionamos diferentes maneiras de desenvolver questões envolvendo grandezas, além de aplicação do pensamento proporcional a outros tópicos, bem como generalizações e demonstrações de importantes teoremas, mostrando que a proporcionalidade é eixo integrador a vários temas matemáticos.

4.1 Método da Falsa Posição

O método da falsa posição pode fornecer uma maneira de resolver equações aritmeticamente, ou seja, sem procedimentos algébricos, e foi usado em diversos momentos da história. Daremos a solução, por falsa-posição, para uma equação dada em simbolismo atual por $ax = b$. Escolhemos um valor arbitrário x_0 para x e calculamos o valor de ax_0 , que chamaremos de b_0 . Na prática, procuremos escolher esse valor inicial de um modo que facilite as contas. Em seguida, investigamos por que número devemos multiplicar b_0 para obter b e chegamos a $a \cdot \frac{b}{b_0}$. Para manter inalterada a igualdade $ax_0 = b$, devemos multiplicar esse mesmo número por x_0 . Obtemos, assim, que $a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b$. Logo, a solução de $ax = b$ deve ser $\left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right)$. (Roque, 2012, p. 64). A seguir temos um fragmento do problema 24 do Papiro de Rhind.



Figura 1. Fragmento do Papiro de Rhind

Fonte: Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 18, nº 26, p. 11-29, 2018.

Veremos a seguir, o desenvolvimento do problema 24 encontrado no Papiro de Rhind.

Problema 24: Uma quantidade e seu $\frac{1}{7}$ somados fazem 19. Qual é a quantidade?

Traduzindo para o simbolismo atual temos:

$x + \frac{1}{7}x = 19$, para facilitar, faremos $x_0 = 7 = x$, obtendo 8, mas $8 \neq 19$.

$a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right)$, como $a \cdot x_0 = b_0$, $a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b$,

assim, $\frac{8}{7} \cdot \left(7 \cdot \frac{19}{8}\right) = 19$, ou seja, a

solução é $7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$, pois:

$$7 \cdot \frac{19}{8} + \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8} + \frac{19}{8} = \frac{152}{8} = 19$$

Portanto, a solução para $x + \frac{1}{7}x = 19$ é $\frac{133}{8}$.

4.2 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Uma utilização do raciocínio proporcional em Geometria é o Teorema de Tales, onde toda paralela a um dos lados de um triângulo, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais. Vejamos a seguir:

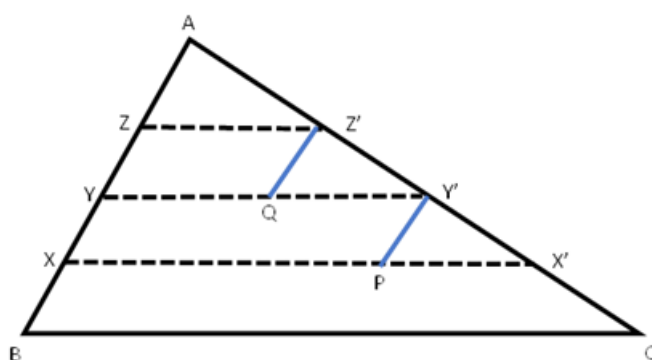


Figura 2. Triângulo ABC, com feixe de retas paralelas ao lado BC

Fonte: Próprio autor

Demonstração:

Seja o triângulo ABC. Para cada ponto X do lado AB corresponde X' do lado AC, em que XX' seja paralela a BC. Mostra-se que o comprimento X'C é diretamente proporcional ao comprimento XB. Em primeiro lugar, é vidente que se X, Y são pontos de AB, tais que $XB = YB$, então $XB = Y'B$ por que XX' e YY' são paralelas. Após, afirma-se que se os pontos X, Y, Z do lado AB são tais que $XY = YZ$, então $X'Y' = Y'Z'$.

Para perceber isso, toma-se os pontos P em XX' e Q em YY' de modo que $Y'P$ e $Z'Q$ sejam paralelas a AB.

Os triângulos $PX'Y'$ e $QY'Z'$ são congruentes, por que têm um lado igual ($PY' = QZ'$) compreendido entre ângulos iguais.

Desse modo, se X, Y são pontos de AB com $YB = n \cdot XB$, então seus correspondentes X', Y' no lado AC são tais que $Y'C = n \cdot X'C$.

Portanto, conclui-se que X'C é diretamente proporcional a XB. Como existe uma constante K em que, para todo ponto X do segmento AB, tem-se $X'C = k \cdot XB$ (*).

E para $X=A$, em que $A'=A$, obtém-se $AC=k \cdot AB$ (**).

Ao subtrair (*) de (**) tem-se: $AX' = k \cdot AX$ (***) e dividindo (***) por (*) obtém-se $\frac{AX'}{AC} = \frac{AX}{AB}$, que é o que determina o Teorema de Tales.

4.3 Regra de Três

I – Dada uma proporcionalidade direta $a = kb$ com $a' \Rightarrow b'$ e $a'' \Rightarrow b''$, logo,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$$

II – Dada uma proporcionalidade inversa $a = \frac{k}{b}$ com $a' \Rightarrow b'$ e $a'' \Rightarrow b''$, logo,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'}$$

III - Dada uma proporcionalidade mista $a = k \cdot \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{b_{p+1}, \dots, b_{p+n}}$ com

$b'_1, b'_2, \dots, b'_p, b'_{p+1}, \dots, b'_n \rightarrow b'$ e $b''_1, b''_2, \dots, b''_p, b''_{p+1}, \dots, b''_n \rightarrow b''$, logo,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'_1}{b''_1} \cdot \frac{b'_2}{b''_2} \cdot \dots \cdot \frac{b'_p}{b''_p} \cdot \frac{b'_{p+1}}{b''_{p+1}} \cdot \dots \cdot \frac{b'_n}{b''_n}$$

4.4 Proporcionalidade, Percepção Visual

Ao observarmos construções feitas pelo homem e a natureza, é possível perceber alguns padrões relacionados às medidas que nos proporcionam uma visão harmoniosa, agradável. Com essa percepção, pode-se encontrar a famosa proporção áurea ou número de ouro que tem o valor aproximado (1,61803398875) e que a representação é dada pela letra grega ϕ (fi), nas mais variadas situações.

Tal proporção foi descoberta já na Grécia antiga, mas foi só em 1202 que o matemático Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) apresentou em um livro a famosa Sequência de Fibonacci, que funciona da seguinte maneira: para todo n da sequência, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ sendo n natural.

A partir da sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ao serem construídos quadrados com lados com as medidas de seus elementos, pode ser construído um retângulo, conhecido como Retângulo de Ouro. A partir desse retângulo é possível estabelecer a construção da Espiral de Fibonacci como podemos observar a seguir. Ao desenharmos um arco dentro desse retângulo, obtemos a Espiral de Fibonacci:

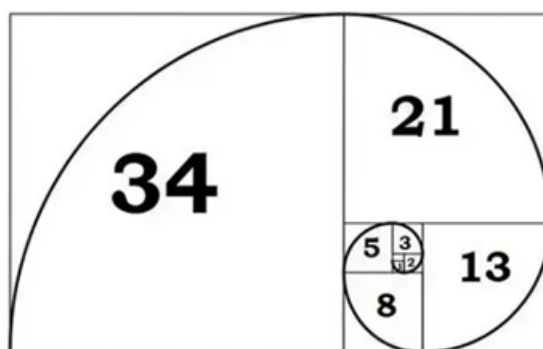


Figura 3. Espiral de Fibonacci

Fonte: <https://www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea/>

A proporção áurea pode ser calculada de diferentes maneiras, mas uma das formas mais comuns é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento de maior segmento e o comprimento de menor segmento. (Oliveira, R. R.)

A forma citada no parágrafo anterior como uma das maneiras de calcularmos a razão áurea é representada na figura abaixo.

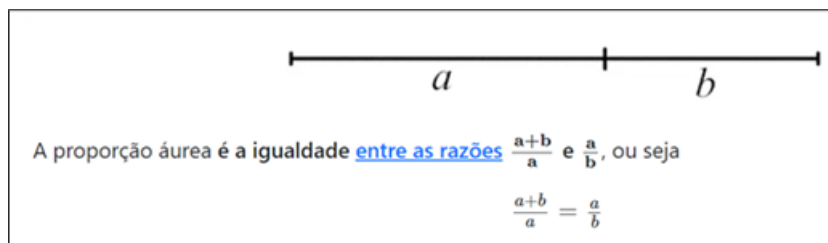


Figura 4. Segmento de reta dividido de forma proporcional

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm>

Para encontrar o comprimento da proporção áurea (ou número de ouro), assim, como $\frac{a}{b} = \varphi$, temos: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, de certo então $\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, logo concluímos que $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, o que equivale a $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Resolvendo por Bháskara:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = 5$$

$$\varphi = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Assim, temos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi = 1,618$$

Figura 5. Proporção Áurea através da fórmula de Bháskara

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm>

É indiscutível que a proporcionalidade ao longo da história se faz presente e indispensável tanto em situações do cotidiano quanto na matemática escolar.

O conceito de proporcionalidade é fundamental não só no contexto escolar, mas também no cotidiano das pessoas. Ele é importante para lidar com várias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos (Beiral, p. 1; 2017).

5. O PERCURSO DA PESQUISA

Esta pesquisa teve o intuito, investigar a importância do estudo e aprendizagem do conceito de proporcionalidade no que se refere à relação da proporcionalidade com o pensamento proporcional, onde além de pesquisa documental (legislação e estudos publicados), envolveu-se professores graduados, licenciados e bacharelados e alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental. Diante dos objetivos propostos e áreas envolvidas, aplicou-se uma pesquisa de base qualitativa por assim entender que suas características possibilitam a condução da pesquisa de forma coerente para coleta, análise e discussão dos dados obti-

dos.

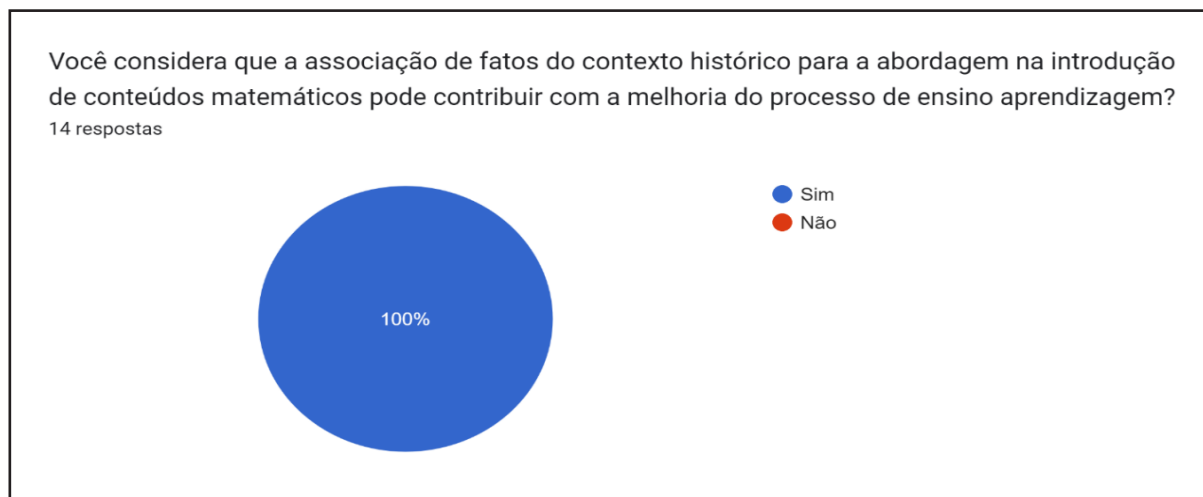
Para o desenvolvimento da proposta da pesquisa, foi realizado estudos bibliográficos, buscando formas de aplicações do pensamento proporcional em alguns pontos da história da humanidade, entendendo como os antigos egípcios aplicavam o raciocínio proporcional na resolução de problemas em um antigo e famoso documento, o Papiro de Rhind.

De acordo com Lüdke e André (2018), em pesquisas qualitativas, tanto quanto a entrevista, quanto a observação ocupa lugar privilegiado nas novas abordagens de pesquisas educacional. Usada como principal método de investigação ou associada a outras técnicas de coleta, a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que apresente uma série de vantagens.

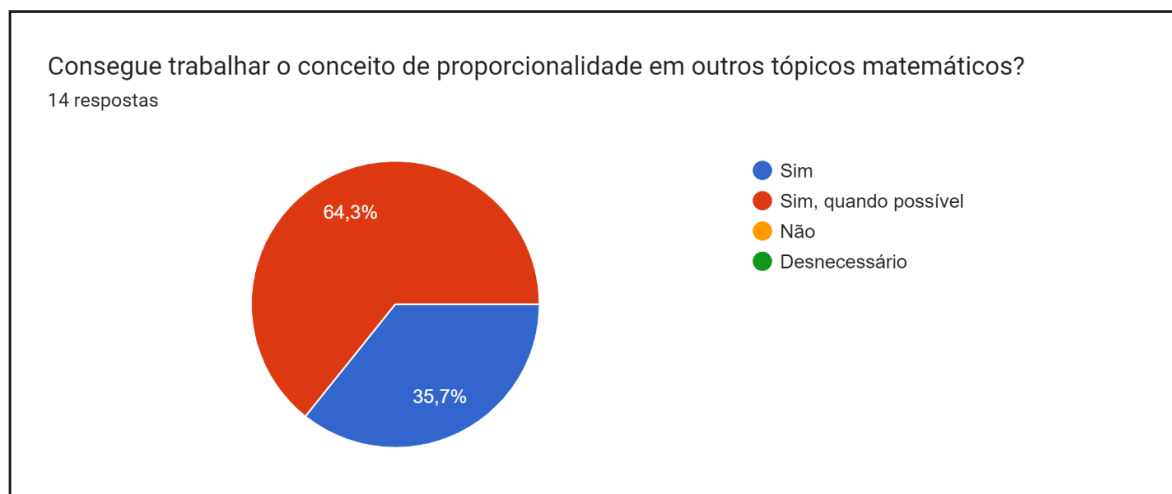
Perguntas como: Considerando a sua experiência profissional, os alunos da Educação Básica desenvolvem de forma adequada o conceito relativo à proporcionalidade? Entre outras foram respondidas e serão analisadas mais adiante. Além deste questionário de pesquisa aplicado a docentes com considerável experiência, foi trabalhado o conteúdo proporcionalidade no 8º Ano do Ensino fundamental da rede municipal da cidade Luzilândia, estado do Piauí, onde inicialmente foi aplicado uma atividade com questões como: O que é razão entre duas grandezas de mesma espécie? e O que é proporcionalidade matemática?

Portanto, foi possível identificar a visão dos pesquisados sobre a temática em estudo, entre as quais relata-se a seguir, o que pensam sobre a importância do estudo da proporcionalidade matemática, seu ensino e aprendizagem, as diferentes abordagens de resolução de problemas, sua relação a outros temas, bem como ao desenvolvimento de um raciocínio proporcional.

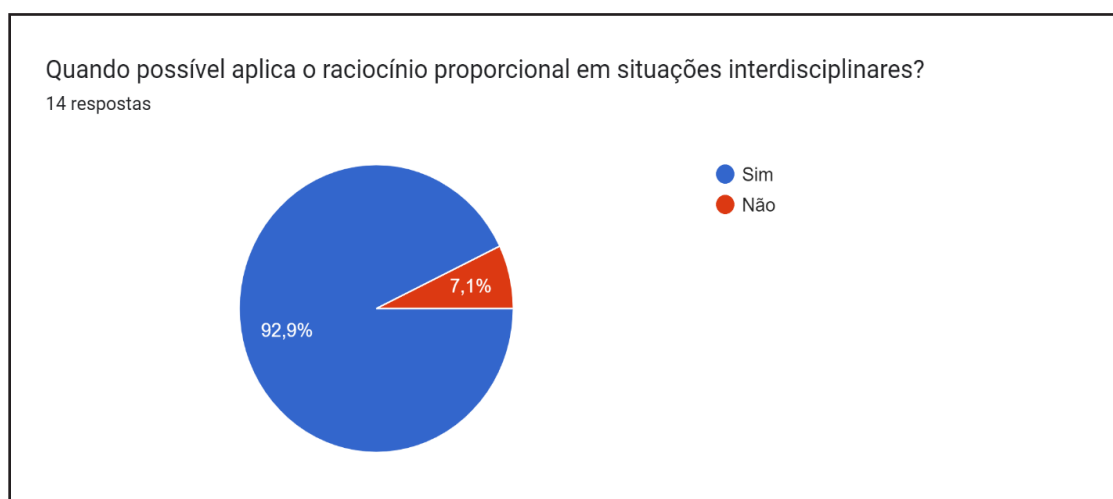
Ao serem indagados sobre a importância da associação de fatos históricos na introdução de temas a serem trabalhados, a resposta entre os professores que responderam ao questionário foi unânime, todos consideram importante:



Nessa linha de pensamento buscamos compreensões em pesquisadores que compartilham da mesma ideia a saber Groenwald, Mora e Silva “O conhecimento da História da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda sua essência” (2004, p.47). Nessa perspectiva cabe ao professor considerar em seu planejamento a História da Matemática como ferramenta para contextualizar as situações e no desenvolvimento do aluno, pois dessa forma haverá um trabalho interdisciplinar.



Este conceito é apresentado muitas vezes de forma mecânica, sem contextualização e sem sua referência em outros conteúdos matemáticos e a outras disciplinas. O aluno aprende o algoritmo, mas não compreende o conceito. Nesse sentido é considerável a visão de Castro (2015) ao entender que o conceito de Proporcionalidade é pré-requisito para o estudo de vários conteúdos. Entendimento com o qual corroboramos e norteia a indagação seguinte feita aos pesquisados



Em uma turma do 8º Ano que foi aplicado o questionário, havia 26 alunos matriculados e frequentando, mas apenas 19 alunos se fizeram presente no dia da aplicação da atividade.

Perguntou-se na primeira questão: O que é razão entre duas grandezas de mesma espécie? Apenas dois alunos mencionam que se trata de uma divisão, alguns respondem totalmente fora do contexto e a maioria nem responderam. Na segunda questão, perguntou-se: O que é proporção matemática? Apenas um aluno respondeu que é uma igualdade entre razões, mas esse mesmo aluno não respondeu a primeira questão, o que nos leva a acreditar que não associa a palavra razão à uma operação de divisão.

Na terceira questão, quando são indagados: Qual ou quais conteúdos já estudados por você nesse ano ou no ano anterior que pode ou podem ser associados (à proporcionalidade)? Dentre as alternativas disponibilizadas, proporcionalidade, equação do 1º grau, juros simples, todos, nenhuma das alternativas, 5 deles afirmam que todos estes conteúdos têm associação à proporcionalidade.

Com as três primeiras questões, observa-se que não há uma boa fundamentação do pensamento proporcional estabelecida por parte dos educandos, e que embora os con-

teúdos de probabilidade, equação do 1º grau e juros simples fazerem parte da estrutura curricular e já haverem sido estudados no ano anterior (8º Ano) não há uma associação por parte dos alunos entre proporcionalidade e os outros conteúdos já mencionados.

A experiência compartilhada tanto pelos estudos pesquisados como pelos documentos educacionais, além dos docentes que se propuseram a responder ao questionário de pesquisa, nos conduz a certezas que devemos nos aprimorar sempre no ensino e estudo não só do tema proposto por esta pesquisa, mas no que diz respeito à nossas práticas como profissionais e até pessoais, tendo em vista que somos seres capazes de aprimoramento, o mundo nos faz assim e assim acontece a evolução, não diferentemente dessa linha de raciocínio, a educação é a principal evolução na vida de qualquer ser humano

6. CONCLUSÃO

As considerações do currículo sobre o ensino de proporcionalidade proposto na BNCC estabelecem que o ensino e estudo de proporcionalidade matemática é relevante em consonância com a opinião dos docentes que aceitaram participar da pesquisa sobre o tema, entende-se que a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional é fundamental, porém, os resultados em avaliações externas por exemplo não mostram um bom desempenho pelos alunos, o que no mínimo é questionável em como vem sendo trabalhado a assimilação desse pensamento proporcional.

Nesse sentido, observou-se pontos que emergiram dessa pesquisa que se mostram relevantes, os quais elencamos: a investigação das generalizações, pode contribuir significativamente para o docente na construção da conjectura do pensamento proporcional a ser transmitida para os alunos; a busca por uma efetiva contextualização da proporcionalidade no cotidiano contribui com a associação do raciocínio proporcional a outros tópicos matemáticos e a diversificação da forma de abordagem e de resoluções de situações problemas que estão relacionados ao pensamento proporcional.

Entende-se que as reflexões que surgiram a partir dessa pesquisa, ao mesmo tempo que se mostram-se adequadas e necessárias para a busca do pensamento proporcional, também vem à tona o fato de muitos docentes não conseguirem a concreta transmissão do pensamento proporcional atribuindo uma base composta inadequadamente, além de déficit do desenvolvimento do senso de interpretação por parte dos alunos.

Referências

- BEIRAL, Livia Narcísio. A Proporcionalidade no cotidiano: uma proposta para o ensino fundamental. 2017. 55f. **Dissertação** (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2017. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/11647>
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017
- CASTRO, Fabrício Almeida de. A relação da proporcionalidade com outros temas matemáticos. 2015. 139 f. **Dissertação** (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2015. Disponível em: www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/8416/1/texto%20completo.pdf
- Garcez, W. R. **Todos estudam proporções**: o que aprendem? Rio de Janeiro. Clube de Autor, 2016.
- GROENWALD, C.L.O.; SILVA, C. T.; MORA, D. Perspectivas em Educação Matemática. **Acta Scientiae**, v. 6, n. 1. Canoas: Ulbra, 2004. Disponível em: www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/issue/view/17.
- LIMA, José Vitor Ramos De et al.. Uma alternativa histórica para o ensino de proporcionalidade. **Anais V CONEDU...** Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visua>

lizar/49190.

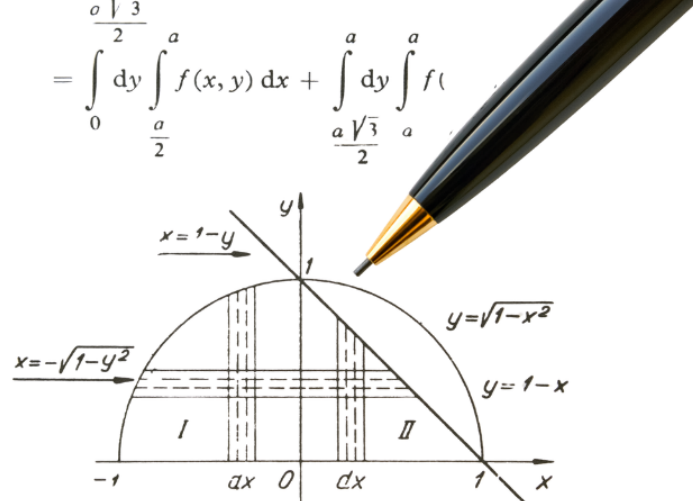
LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalzamo Afonso de. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. 2ª Ed. [Reimpr]. Rio de Janeiro. E. P. U. 2018.

LUIZ JÚNIOR, Hércules. As diferentes abordagens do ensino de proporcionalidade, 2016. 29f. **Dissertação** (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2015. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=80377

OLIVEIRA, R. R. **Proporção Áurea**. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm>.

SANTOS, Mayra Taís Albuquerque. Os desdobramentos teóricos da proporcionalidade na escola de educação básica. 2018. 100 f. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018. Disponível em: www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/riufal/3433





14

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA

TEACHING MATHEMATICS FROM THE PERSPECTIVE OF INCLUSIVE EDUCATION

Amujacy da Conceição Pereira Costa¹

Celina Amélia da Silva²

Lélia de Oliveira Cruz²

¹ Mestre, UEMA, Brejo - MA

² Doutora, UEMA, Caxias - MA

RESUMO

A inclusão vem sendo um assunto de relevância mundial, despertando diferentes opiniões e sentimentos. Assim, a pesquisa aborda a intersecção entre a educação matemática e a inclusão, fornecendo *insights*, recursos e estratégias necessárias para garantir que todos os alunos tenham acesso a uma educação matemática de qualidade e inclusiva. Mediante uma abordagem qualitativa, a pesquisa traz o tema: O ensino de matemática sob a ótica da educação inclusiva, investigando os principais desafios encontrados pelos professores e apontando possibilidades de práticas pedagógicas. Para tanto, buscou responder à seguinte pergunta: Como o ensino de matemática pode contribuir para a educação inclusiva no sentido de possibilitar diálogos que desafiam e favorecem a aprendizagem? Intencionando responder à questão, destacamos como objetivo geral investigar possibilidades e desafios do ensino de matemática por um viés inclusivo nas séries finais do Ensino Fundamental. A pesquisa se propôs a identificar bases teóricas das políticas de inclusão em nível nacional, estadual e/ou municipal, além ainda de construir reflexões sobre as dificuldades encontradas pelos professores de matemática no contexto da inclusão, sobre a formação de professores de matemática para atender a diversidade, mas também propõe pensar caminhos para promover um ensino de matemática acessível através das tendências em educação matemática. O fundamento da pesquisa está estabelecido na convicção de que o ensino de Matemática pode e deve ser acessível a todos os alunos. Espera-se como resultado o reconhecimento de que, embora haja desafios significativos a serem enfrentados, existem razões para sermos otimistas em relação a um ensino de matemática inclusivo.

Palavras-chave: Diversidade, Formação docente, Educação Matemática, Educação Matemática Inclusiva.

ABSTRACT

Inclusion has become a topic of global relevance, arousing different opinions and feelings. Thus, the research addresses the intersection between mathematics education and inclusion, providing insights, resources and strategies necessary to ensure that all students have access to a quality and inclusive mathematics education. Using a qualitative approach, the research addresses the theme: Teaching mathematics from the perspective of inclusive education, investigating the main challenges encountered by teachers and pointing out possibilities for pedagogical practices. To this end, it sought to answer the following question: How can mathematics teaching contribute to inclusive education in the sense of enabling dialogues that challenge and favor learning? In order to answer this question, we highlight as a general objective to investigate possibilities and challenges of teaching mathematics from an inclusive perspective in the final grades of Elementary School. The research aimed to identify theoretical bases for inclusion policies at the national, state and/or municipal levels, as well as to reflect on the difficulties encountered by mathematics teachers in the context of inclusion, on the training of mathematics teachers to meet diversity, and to think about ways to promote accessible mathematics teaching through trends in mathematics education. The foundation of the research is established in the conviction that mathematics teaching can and should be accessible to all students. The expected result is the recognition that, although there are significant challenges to be faced, there are reasons to be optimistic about inclusive mathematics teaching.

Keywords: Diversity, Teacher training, Mathematics Education, Inclusive Mathematics Education.



1. INTRODUÇÃO

A educação é um ato humano e político, já dizia Paulo Freire, acrescentando ainda que “educar é um ato de amor” (Freire, 2019, p.127). É fato que todos somos diferentes. Cada estudante é diferente, por conta de sua raça, gênero, deficiência ou qualquer outra condição tida como diferente. A diferença é uma parte essencial da condição humana e as nossas diversidades culturais, perspectivas e experiências de vida nos tornam únicos.

Compreendemos o quanto é complexo colocar em prática a docência de modo a promover uma educação que atenda a todos e que ofereça respostas às novas demandas e perspectivas do cenário escolar. Isso claramente nos desafia e exige de nós professores que nos afastemos de preconceitos e de práticas tradicionais.

A Educação Inclusiva está nas rodas de discussões de pensadores, intelectuais e principalmente de professores. Não é um desafio fácil, mas é uma tarefa da escola. É acima de tudo, assumir um compromisso social com a vida humana. A inclusão é muito mais que o acesso físico ou a convivência no mesmo espaço escolar, é também favorecer o seu aprendizado, respeitá-lo como sujeito único, remover barreiras que possam impedir sua aprendizagem, destacando menos as diferenças e as patologias, diminuindo o abismo entre o discurso e a prática educacional.

Esta pesquisa se consolida na necessidade de refletir e discutir o ensino de Matemática, como prática social que educa para autonomia e além das diferenças, por um viés inclusivo que se opõe a práticas mecanizadas e inflexíveis que, por vezes, se apresentam nas salas de aula acreditando que o ensino inclusivo da matemática ocorre quando o conhecimento escolar é alcançado por todos os alunos, independente das condições sociais, emocionais, físicas, intelectuais, linguísticas, e ainda reconhecendo e respeitando a pluralidade da turma.

2. EDUCAÇÃO INCLUSIVA NO BRASIL: MARCOS HISTÓRICOS, AVANÇOS E LEGISLAÇÃO VIGENTE

A inclusão é um movimento amplo que abrange não apenas o âmbito educacional, mas também o social e o político. Ao pensar na inclusão como um movimento, reconhecemos que é um processo dinâmico e contínuo, que busca promover a participação plena e igualitária de todas as pessoas na sociedade. Com a proposta iniciada pela Declaração de Salamanca (Salamanca, 1994) a inclusão é um movimento relacionado à promoção da equidade, garantindo que todos tenham acesso igualitário a oportunidades, recursos e direitos. Isso requer ações e políticas públicas deliberadas para superar desigualdades estruturais e sistemas de discriminação que possam perpetuar a exclusão de certos grupos.

O conceito de inclusão possui uma ampla abordagem, não devendo se restringir apenas às pessoas com deficiência, mas deve abranger todas as formas de diversidade e diferença, incluindo raça, etnia, gênero, orientação sexual, religião, *status* socioeconômico e outras características. Isso significa criar ambientes que valorizem e respeitem a diversidade em todas as suas formas.

A educação especial é um campo da educação focado em atender às necessidades de alunos com deficiências ou dificuldades de aprendizagem. O objetivo principal da educação especial é oferecer apoio especializado e individualizado para alunos com deficiências, visando promover seu desenvolvimento acadêmico, social e emocional.

Assim, a Constituição Federal coloca em seu artigo 206, inciso I, “a igualdade de condições de acesso e permanência na escola” (Brasil, 1988, s.p.) como um dos princípios para o ensino acrescentando em seu artigo 208 que “o dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de acesso aos níveis mais elevados de ensino, da pesquisa e da criação artística, segundo a capacidade de cada um”.

A Constituição Federal garante ainda que é dever do Estado oferecer Atendimento Educacional Especializado às pessoas com deficiência, preferencialmente ofertado na rede regular de ensino, importante marco para a educação inclusiva no Brasil.

Segundo o art. 58 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9394/96) a educação especial é “modalidade de educação escolar oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para educandos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação” (Redação dada pela Lei nº 12796, de 2013).

Encontramos no ECA expresso em seu art. 5º proteção contra discriminação, proibindo qualquer forma de discriminação contra crianças e adolescentes, incluindo aquelas com deficiência. O citado documento estabelece que todas as crianças e adolescentes têm direito ao respeito à sua dignidade e integridade física e psicológica, o que é fundamental para promover a inclusão e o respeito pela diversidade.

Por outro lado, a educação inclusiva é uma abordagem que busca garantir que todos os alunos, incluindo aqueles com deficiências ou necessidades educacionais especiais, tenham acesso a uma educação de qualidade em escolas regulares e em ambientes inclusivos.

Mazzotta (2010) destaca que a inclusão do ponto de vista social refere-se à “concretização das melhores condições possíveis de comunicação e participação ativa, concretizando os ideais de justiça social” (Mazzotta, 2010, p.79). Logo, a educação inclusiva defende a participação plena e igualitária de todos os alunos, valorizando a diversidade e promovendo o respeito mútuo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2017, é um documento de caráter normativo que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica no Brasil. A BNCC aborda a inclusão de maneira transversal, incorporando princípios e diretrizes que visam garantir o acesso, a permanência e o sucesso de todos os alunos.

Assim, a BNCC destaca a importância de “reconhecer a necessidade de práticas pedagógicas inclusivas e de diferenciação curricular” (Brasil, 2017, p.11) para atender às especificidades de cada grupo destacando a necessidade de currículos inclusivos que valorizem a diversidade e reflitam a história, a cultura e as contribuições de grupos historicamente marginalizados. Quanto a isso destaca-se a nona competência geral:

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de origem, etnia, gênero, idade, habilidade/necessidade, convicção religiosa ou de qualquer outra natureza, reconhecendo-se parte de uma coletividade com a quem deve se comprometer (Brasil, 2017, p. 19).

Ademais, a BNCC destaca que “a escola, como espaço de aprendizagem e de democracia inclusiva, deve se fortalecer na prática coercitiva de não discriminação, não preconceito e respeito às diferenças e diversidades” (Brasil, 2017, p.14).



Consoante a BNCC (2017, p. 265):

[...] o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.

É importante destacar a importância da compreensão e da implementação eficaz das políticas públicas de inclusão na prática educacional. Por mais abrangentes e bem-intencionadas que sejam as políticas, é a forma como são interpretadas e aplicadas no contexto escolar que determina seu impacto real na promoção da inclusão.

Portanto, uma política inclusiva requer não apenas ações superficiais de conformidade, mas sim uma mudança de mentalidade e práticas pedagógicas que reconheçam e valorizem a diversidade dos alunos.

3. CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

O processo de inclusão já vem sendo alvo de investigação de vários pesquisadores e professores há muito tempo, em busca de avanços e conquistas, reunindo todos num esforço conjunto para delineamento das bases da educação para todos.

A diversidade está presente em todas as áreas da sociedade e na escola não seria diferente. No ambiente escolar, a dificuldade em lidar com estas diferenças parece preocupar mais os educadores do que as famílias. Exige-se deles que promovam metodologias assistivas que favoreçam a aprendizagem e desenvolvam o aluno, respeitando a singularidade humana. Nesse contexto, em primeiro momento, causa desafio e o professor, movido pelo novo, é obrigado a buscar soluções fora da zona de conforto. O que muitas vezes gera insegurança e frustração.

Assim, a busca por compreensões sobre o tema, gerou a pesquisa no âmbito da Educação e especificamente da Educação Matemática cujo objetivo é pensar em possibilidades de soluções para os problemas encontrados nas escolas no que se refere aos fatores que interferem ou influenciam no processo ensino e aprendizagem de Matemática referentes a inclusão.

Dessa forma, é evidente que a escola, através de seus profissionais, especialmente os professores, deve estar preparada no sentido de oferecer um ensino de qualidade e significativo aos alunos, oportunizar situações de aprendizagens e mobilizar recursos que garantam a real inclusão. O desafio torna-se ainda maior quando se trata do ensino de Matemática, visto que alguns estudantes já carregam sentimentos negativos relacionados a disciplina. O professor aqui não é apenas o professor de matemática, responsável por repassar o conteúdo.

Neste cenário, o professor de Matemática não pode e nem deve ficar alheio a essa realidade e assim se vê diante de um grande desafio, tendo em vista que precisa promover práticas para que todos possam participar das aulas e ter sucesso na aprendizagem. Os professores têm encontrado dificuldades para administrar seu trabalho em classes heterogêneas e muitas vezes sua disciplina ainda pode se transformar em instrumento de exclusão.

4. O ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ENFOQUE DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA NA PERSPECTIVA DOCENTE

Considerando que a escola deve não apenas só aceitar a matrícula do educando como forma de inclusão, mas ser realmente inclusiva, possibilitando o acesso e a permanência de todos os educandos, assegurando-lhes um ambiente acolhedor que permita o seu desenvolvimento conforme suas limitações, foram propostas questões as professores que abordaram fatores relacionados a formação para atuar na perspectiva da educação inclusiva com o propósito ainda de investigar a atuação pedagógica com vistas a promover um ambiente inclusivo nas aulas de Matemática.

Dentre os 10 professores que participaram da pesquisa, 30% veem a inclusão como a promoção de transformações para a turma e não apenas para alguns estudantes em particular o que entra em acordo com a ideia de que a sala de aula é um ambiente heterogêneo e diverso e que todos devem ter suas particularidades consideradas.

Foi pesquisado também como é realizada a avaliação dos estudantes que apresentam alguma necessidade educacional especial. Se estes são avaliados de forma diferenciada. Dos respondentes, 30% dos professores, destacaram que a avaliação diferenciada dos estudantes com NEE é uma prática importante e necessária para garantir que sejam avaliados de forma justa e que seus resultados reflitam de forma adequada e coerente ao seu progresso e aprendizado. Porém, a inclusão na educação é um compromisso mais abrangente, indo além da simples adaptação das práticas de avaliação para alunos com NEE, mas garantindo que todos aprendam. Dos professores que participaram da pesquisa, 20% responderam que o processo de inclusão geralmente objetiva promover a socialização dos estudantes. Embora seja um aspecto importante da inclusão, vale destacar que os benefícios vão além da socialização.

A inclusão envolve um processo de reforma sistêmica, incorporando aprimoramentos e modificações em conteúdos, métodos de ensino, abordagens, estruturas e estratégias de educação para superar barreiras, com a visão de oferecer a todos os estudantes uma experiência e um ambiente de aprendizado igualitário e participativo, que corresponde às suas demandas e preferências (Hehir et al., 2016, p.3).

Proporcionar contextos que desenvolvam o potencial dos estudantes é um aspecto essencial da prática educacional, especialmente na perspectiva inclusiva e foi assinalado por 20% dos professores. Para isso envolve criar ambientes de aprendizagem estimulantes, desafiadores e adaptados às necessidades individuais de cada aluno, permitindo-lhes explorar e desenvolver suas habilidades.

Os dez participantes da pesquisa foram questionados quanto a já haverem participado de algum curso específico para trabalhar com a inclusão escolar de alunos com necessidades especiais (NEE).

Ao analisar os dados percebemos que 50% dos professores de matemática que participaram a pesquisa responderam que SIM.

A necessidade de cursos de formação específicos para atuar com Necessidades Educacionais Especiais é amplamente reconhecida e fundamental para garantir que os educadores estejam preparados para atender às necessidades diversificadas dos alunos em sala de aula.

Moreira e Manrique (2014) destacam a importância da formação contínua para os do-



centes, especialmente quando se trata de lidar com a inclusão de alunos com NEE em aulas de Matemática.

Afinal, os professores precisam de conhecimentos especializados para compreender as diferentes necessidades dos alunos. A inclusão de alunos com NEE em salas de aula regulares traz desafios específicos para os docentes, especialmente quando se trata do ensino de disciplinas específicas, como Matemática.

Daí a necessidade de se adaptarem e se prepararem para atender às exigências que a inclusão exige, corrigindo as lacunas deixadas pela formação inicial, familiarizando os educadores com a legislação e as políticas educacionais na perspectiva da educação inclusiva, garantindo que estejam cientes dos direitos dos alunos e das responsabilidades das escolas em relação a esses alunos.

Quando questionados se durante a sua formação inicial para a docência, tiveram alguma disciplina que abordasse a inclusão de alunos com NEE nas aulas de Matemática nas respostas foi identificado como resultado que 60% dos professores não tiveram em sua formação inicial nenhuma disciplina que abordasse a inclusão de alunos com NEE nas aulas de matemática.

Segundo Pimenta (2012) os cursos de formação inicial em seus currículos devem manter uma conexão estreita com a realidade da escola e com a prática profissional dos docentes onde “a formação é, na verdade autoformação, uma vez que os professores reelaboram os saberes iniciais em confronto com suas experiências práticas, cotidianamente vivenciadas nos contextos escolares” (Pimenta, 2012, p. 32).

Para além da finalidade de conferir uma habilitação legal ao exercício profissional da docência, do curso de formação inicial se espera que forme o professor ou que colabore para a sua formação. Melhor seria dizer que colabore para o exercício de sua atividade docente, uma vez que professorar não é uma atividade burocrática para a qual se adquire conhecimentos e habilidades técnicos-mecânicas.

Nesta concepção, a formação inicial de professores é entendida como um espaço em que o licenciando, aqui o professor em formação inicial, tem a oportunidade de debater e refletir sobre o ensino em diferentes contextos, a fim de preparar-se para sua futura atuação profissional.

Não obstante, Pimenta (2005, p. 26) destaca a importância da teoria na formação dos docentes, afirmando que o “conhecimento docente não é formado apenas da prática, mas também é enriquecido pelas teorias da educação”. As teorias da educação fornecem aos professores uma base conceitual e analítica que lhes permite entender os diversos contextos que trabalham.

Logo, a formação inicial é entendida como um espaço em que o licenciando, aqui o professor de Matemática em formação, tem a oportunidade de debater e refletir sobre o ensino em diferentes contextos, a fim de preparar-se para sua atuação profissional. “Isso implica não somente a aprender o conhecimento especializado necessário à profissão, como também, compreender as diferentes abordagens de ensinar e explorar determinado conceito, o objetivo de ser ensinado e como fazê-lo” (Da Costa; Da Silva; Noronha, 2021, p. 2).

Além disso, as teorias da educação oferecem uma variedade de perspectivas e abordagens para lidar com os desafios e dilemas que os professores enfrentam em sua prática diária permitindo-lhes que adaptem suas práticas de ensino de acordo com as necessida-

des e características específicas de seus alunos e do ambiente escolar.

Outro aspecto considerado fundamental, na prática docente inclusiva, foi o planejamento do professor, assim procurou-se investigar, como a flexibilização da inclusão pode contribuir para alcançar a inclusão na prática. Isso significa considerar e implementar ajustes, modificações e alterações nos planos de aulas para atender a diversidade e a heterogeneidade de alunos. Os respondentes assim se posicionaram:

- 30% assinalaram que incorporam os feedbacks dos alunos aos planos de aula e realizando reajustes graduais e contínuos com base nessas informações. Dessa forma, é possível adaptar as estratégias de ensino com base nas necessidades e no progresso dos alunos.
- 20% informaram que realizam adaptações individuais para os estudantes que têm direito a ela, mas não sendo necessário alterar o plano de aula.

Realizar adaptações individuais é importante para garantir a inclusão e atender às necessidades específicas de cada aluno. No entanto, é importante ressaltar que, mesmo com adaptações individuais, pode haver momentos em que é necessário fazer ajustes no plano de aula para acomodar as necessidades de todos os alunos. Incluindo mudanças na metodologia de ensino, na organização das atividades, na distribuição do tempo de aula ou em outros aspectos do planejamento.

Segundo Mittler (2003, p. 52):

Ao planejar, os professores devem estabelecer expectativas altas e criar oportunidades para todos os alunos aprenderem com sucesso, incluindo meninos e meninas, alunos com necessidades especiais, alunos com deficiência, alunos de todos os níveis sociais e culturais, alunos de grupos étnicos diferentes, inclusive os viajantes, os refugiados e aqueles que procuram asilo político e também os que são oriundos de grupos linguísticos diversos.

O importante é encontrar um equilíbrio entre a personalização do ensino para cada aluno e a garantia de uma experiência de aprendizagem significativa para toda a turma. Conforme destacaram, 10% dos professores ao consideram que não há necessidade de modificar os planos de aula, pois há um currículo escolar que deve ser cumprido independentemente da quantidade de alunos que apresentam NEE. Enquanto os demais defendem que deve ser feita uma adequação nos planos.

É comum que os planos de aula sejam elaborados segundo o currículo escolar estabelecido, e é importante seguir esse currículo para garantir que os alunos recebam uma educação abrangente e de qualidade. Nesse contexto, pode ser desafiador fazer modificações significativas nos planos de aula, especialmente se houver uma pressão para cumprir determinados objetivos de ensino e conteúdos programáticos em um determinado período.

Stobäus (2003, p. 70) destaca que:

Um currículo inclusivo baseia-se no princípio de que as boas práticas são apropriadas a todos os alunos, de forma a conseguir-se uma aprendizagem significativa para cada aluno. Dessa forma, é indispensável que o docente possua conhecimentos que lhe permitam ensinar, na mesma classe, alunos com capacidades diferentes e com níveis diferenciados de conhecimentos prévios.



Além disso, os professores podem integrar elementos de flexibilidade em seus planos de aula, permitindo espaço para responder às necessidades emergentes dos alunos e explorar oportunidades de aprendizagem autêntica que possam surgir durante o processo de ensino-aprendizagem.

Sabemos que para alcançar a inclusão é necessário flexibilizar o planejamento das aulas considerando ajustes, modificações e alterações nas atividades e avaliações. Bem como, refletir como organiza as aulas. Correia (1999, p.111) alinhado com o conceito aceito na área da educação inclusiva, destaca que adaptações curriculares se referem a modificações ou ajustes feitos no currículo escolar, visando uma adequação com o contexto local e às necessidades dos alunos.

Neste sentido,

As adaptações curriculares constituem, pois, possibilidades educacionais de atuar frente às dificuldades de aprendizagem dos alunos. Pressupõem que se realize a adaptação do currículo regular, quando necessário, para torná-lo apropriado às peculiaridades dos alunos com necessidades especiais. Não um novo currículo, mas um currículo dinâmico, alterável, passível de ampliação, para que atenda realmente a todos os educandos (Brasil, 1998, p. 33).

Essas adaptações podem ocorrer em diferentes níveis e aspectos do currículo incluindo modificações nos conteúdos curriculares para torná-los mais acessíveis e significativos, adaptação dos métodos de ensino para atender às diferentes habilidades e estilos de aprendizagem, ajustes nos critérios de avaliação para permitir que todos demonstrem seu aprendizado e /ou provimento de recursos adicionais e apoio individualizado para auxiliar que todos participem ativamente no currículo.

Conforme posicionamento dos participantes da pesquisa:

- 30% informaram que organizam as atividades conforme os feedbacks turma. Os feedbacks podem ser perguntas, comentários, avaliações formativas e outras formas de retorno da aprendizagem. Ao organizar as atividades com base nos feedbacks da turma é possível criar um ambiente de ensino mais adaptável e responsivo às necessidades dos alunos. Através do feedback é possível identificar padrões, adaptar o conteúdo para abordar áreas de maiores dificuldades, abordar e explorar tópicos de maior interesse e engajamento.
- 20% preparam as aulas a partir de pesquisas feitas sobre o assunto que será discutido a fim de garantir a qualidade e a relevância do conteúdo que será abordado.
- 10% dos professores declararam que geralmente no dia a dia seguem o livro didático por considerarem que está alinhado com o currículo escolar. 10% indicaram utilizar algumas atividades que estejam alinhadas ao conteúdo que será abordado disponíveis em sites que oferecem banco de atividades para professores.
- 70% dos entrevistados responderam que os alunos com Necessidades Educacionais Especiais devem ser inseridos em classes regulares. Essa prática de segregação resultava em uma série de consequências negativas, incluindo a falta de socialização com seus pares e a perpetuação de estigmas e preconceitos. Sob essa perspectiva de integração. Dessa forma, a inclusão no caráter de segregação ficava restrita apenas ao acesso, mas sem garantia de oportunidades de aprendizagem e aprimoramento de capacidades.

É importante ajustar o nível de complexidade dos conteúdos ou das atividades às ne-

cessidades e habilidades conforme apropriado para cada aluno sendo necessário algumas vezes apresentações alternativas do conteúdo de maneira visual, auditiva ou tátil conforme a necessidade do aluno, utilizando recursos como imagens, vídeos, materiais manipulativos ou tecnologias assistivas e adaptando o nível de dificuldade, formato da atividade e recursos utilizados.

5. CONCLUSÃO

Os dispositivos legais, políticos e filosóficos sinalizam um horizonte, uma esperança para a educação inclusiva ao estabelecerem diretrizes, normas e expectativas orientando sobre como os sistemas educacionais devem operar para garantir que todos os alunos tenham acesso às mesmas oportunidades de sucesso. Porém, a simples existência de dispositivos legais não é suficiente, é crucial que eles sejam respaldados por um compromisso ético-político e de ações concretas de todos para promover a inclusão.

A educação matemática inclusiva não se limita apenas a fazer ajustes para acomodar diferenças individuais, mas também deve reconhecer, valorizar e celebrar a diversidade em todas as suas formas. Isso inclui não apenas diferenças óbvias, como deficiências, raça, etnia, gênero e habilidades, mas também outras formas de diversidade, como origens culturais, linguísticas, religiosas, socioeconômicas e de pensamento.

Além de reconhecer a diversidade, compete ao professor promovê-la ativamente. Isso envolve criar um ambiente educacional que seja acolhedor, respeitoso e inclusivo, ressaltando a riqueza que reside nas diferenças. Também implica a implementação de práticas pedagógicas e currículos que reconheçam e valorizem a diversidade, integrando-a de forma significativa no processo de aprendizagem.

Para alcançar uma verdadeira educação inclusiva, é necessária uma mudança fundamental na forma como concebemos a educação. Isso significa superar modelos tradicionais que tendem a excluir certos grupos ou privilegiar outros. Assim, exige um compromisso renovado com princípios-chave, como equidade, acessibilidade e respeito pela dignidade de cada indivíduo.

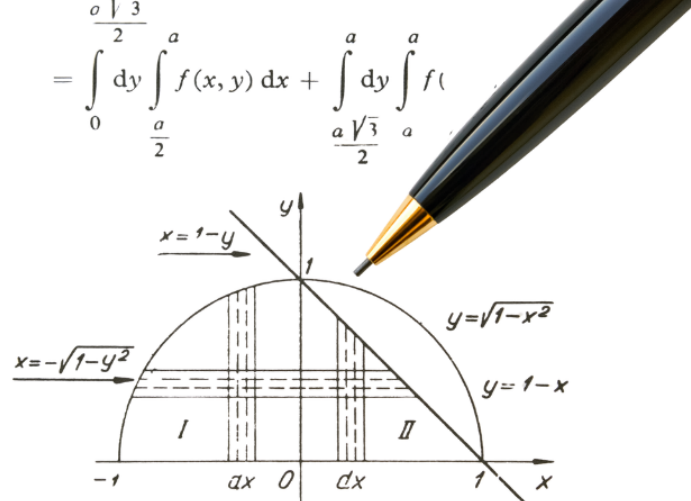
O caminho para a educação matemática inclusiva pode ser construído através do engajamento ativo de todos os indivíduos: governo, educadores, alunos, famílias, comunidades e profissionais de apoio. Embora haja desafios a serem enfrentados, há muitas razões para sermos otimista e termos esperança. Não se trata de imobilização ou impossibilidade com o compromisso contínuo, com pesquisa, desenvolvimento profissional, estratégias e recursos adequados, pode ser criado ambientes de aprendizagem matemática que atendam às necessidades de todos os alunos.

Referências

- BICUDO, M. A. V. A. **A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa.** R. B.E.C.T., v.5, n.2. 2012.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2017.
- BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**, de 5 de outubro de 1988. Brasília, 1988
- BRASIL. Presidência da República. **Lei nº 9394**, de 20 de dezembro de 1996. Brasília, 1996.
- BRASIL. **Resolução CNE/CEB nº 2**, de 11 de setembro de 2001. Institui as Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica. Brasília, 2001.



- CORREIA, L.de M. **Alunos com necessidades educacionais especiais nas classes regulares**. Porto: Porto, 1999.
- DA COSTA, P.K. A.; DA SILVA, S.C. R; NORONHA, A.M. Formação Inicial de Professores de Matemática na Perspectiva da Educação Inclusiva. **REMATEC**, v.16, n.38, p.01-18,2021
- FREIRE, Paulo. **Educação como prática de liberdade**. São Paulo. Paz e Terra, 2019.
- HEHIR, Thomas; et al. **OS benefícios da Educação Inclusiva para Estudantes com e sem Deficiência**. São Paulo: 2016
- MAZZOTTA, Marcos José Silveira. **Educação Especial no Brasil: história e políticas públicas**. São Paulo: Cortez, 2011.
- MITTLER, P. **Educação Inclusiva: Contextos Sociais**. Porto Alegre. Artmed, 2003.
- MOREIRA, G.E. MANRIQUE, A.L. **Educação Matemática Inclusiva: diálogo com as teorias da atividade, da aprendizagem significativa e das situações didáticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.
- PIMENTA, Selma Garrido. (Org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo: Cortez editora,2012.
- PIMENTA, Selma Garrido. GHEDIN, Evandro (Org.). **Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito**.3. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
- SILVA, M.F.M.C.; FACION,J.R. Perspectivas da Inclusão Escolar e sua Efetivação. In: FACION, J.R.(Org.). **Inclusão Escolar e suas Implicações**. Curitiba: Ibpex, 2008.
- STOBÄUS, Claus D.; MOSQUERA, Juan J.M.(Org.) **Educação Especial: em direção à Educação Inclusiva**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003



15

DESENHANDO APRENDIZADOS: O PAPEL DE PROTAGONISMO DO ALUNO NO ESTUDO DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS EM QUADRINHOS

*DRAWING LEARNING: THE ROLE OF STUDENT
PROTAGONISM IN THE STUDY OF PLANE GEOMETRY
THROUGH COMIC STRIPS*

Valterlli Costa Rocha¹

Waléria de Jesus Barbosa Soares²

Carlos André Bogéa Pereira³

¹ Mestre, UEMA, Urbano Santos - MA

² Doutora, UEMA, São Luís - MA

³ Doutor, UEMA, São Luís - MA

RESUMO

O estudo avaliou como estudantes do Ensino Médio podem desenvolver o papel de protagonismo estudantil durante a produção de Histórias em quadrinhos (HQs) sobre o conteúdo Geometria plana. Para tanto, contamos com a participação, de duas turmas do Ensino Médio de uma escola comunitária, uma turma da terceira série (quem criou as HQs) e outra da segunda série (quem analisou as HQs). A pesquisa, de cunho qualitativo, mostra as inúmeras vantagens da utilização das HQs na sala de aula, como um elemento que motiva os alunos a participarem das atividades além de oportunizar o exercício de habilidades importantes relacionadas à imaginação, à criatividade, à análise crítica, ao raciocínio lógico e ao exercício da leitura e da escrita. Trouxemos exemplos de HQs, produzidas pelos alunos e pelo autor, foram colhidos depoimentos dos alunos durante todas as fases de produção e análise das HQs, que atestam o entusiasmo, o forte engajamento e a intimidade criada entre eles e a matemática durante o desenvolvimento das tarefas ao mergulharem mais afundo no fascinante mundo dos quadrinhos e perceberem um grande e divertido mar de maneiras de explorar os conteúdos geométricos através do trabalho colaborativo utilizando uma abordagem significativa, divertida, com uma linguagem bem acessível e adaptada ao mundo deles. Dentre todas as vantagens elencadas neste estudo, podemos, sem nenhuma dúvida, assegurar que a principal delas foi proporcionar aos estudantes uma enriquecedora experiência de se escalarem como atores principais no processo de construção dos próprios saberes.

Palavras-chave: protagonismo estudantil, ensino de geometria, Histórias em Quadrinhos, Geometria Plana.

ABSTRACT

The study evaluated how high school students can develop the role of student protagonism during the production of comic strips (HQs) about the content of Plane Geometry. To this end, we included the participation of two high school classes from a community school: one class from the third year (who created the HQs) and another from the second year (who analyzed the HQs). The qualitative research shows the numerous advantages of using HQs in the classroom, as an element that motivates students to participate in activities while also providing the opportunity to exercise important skills related to imagination, creativity, critical analysis, logical reasoning, and the practice of reading and writing. We presented examples of HQs produced by the students and the author, and collected testimonials from students throughout all phases of the production and analysis of the HQs, which attest to the enthusiasm, strong engagement, and the intimacy created between them and mathematics during the development of tasks as they delved deeper into the fascinating world of comics, discovering a vast and enjoyable sea of ways to explore geometric content through collaborative work using a meaningful, fun approach with language that is easily accessible and adapted to their world. Among all the advantages listed in this study, we can confidently assert that the main one was providing students with an enriching experience of becoming the main actors in the process of constructing their own knowledge.

Keywords: student protagonism, geometry teaching, comic strips, Plane Geometry.

1. INTRODUÇÃO

As Histórias em Quadrinhos (HQs) representam um gênero literário, produzido a partir da junção entre texto e imagens, que contam uma história e oferecem uma leitura dinâmica, divertida, leve e prazerosa para o leitor. Elas possibilitam a combinação de elementos verbais (textos) e não verbais, como os balões de fala, as expressões corporais e faciais, além de onomatopeias — sons da natureza, animais ou objetos. Escritas com narrativas curtas e ricas em detalhes, promovem uma interação importante entre seus elementos, conferindo significados por meio das falas e movimentos dos personagens. A disposição sequencial e intencional dos elementos nos quadros — espaços onde as tramas se desenrolam — estimula a interpretação, a imaginação, a atenção aos detalhes, a análise crítica e o raciocínio lógico, além de proporcionar o uso benéfico do humor nas produções. Sobre este, Banas *et al.* (2011) ressaltam que pesquisas indicam que o uso do humor é eficaz para reduzir a tensão ao ensinar tópicos que costumam gerar dificuldades e ansiedade nos alunos.

O surgimento das HQs está associado à atuação das indústrias jornalísticas dos Estados Unidos no início do século XIX, mas suas raízes podem ser traçadas até períodos muito mais antigos, como nas inscrições rupestres que contavam histórias por meio de desenhos. A figura 1, mostra uma pintura rupestre (à esquerda) e a primeira revista em quadrinhos, publicada em 1890.



Figura 1. Compilação do autor

Fonte: Elaboração do autor

Imagens originais disponíveis em: <https://www.dw.com/pt-br/1890-primeira-revista-em-quadrinhos/a-834103> e <https://revistaogrito.com/livro-teorico-sobre-hqs-vai-das-pinturas-rupestres-ao-manga>. Acesso em: 31 de agosto de 2025.

As HQs mostram o quanto o homem se interessa por imagens e o quanto as imagens potencializam o alcance das palavras. Convém ressaltar que:

A imagem sempre fascinou o homem. Desde o tempo das cavernas, ela está presente em nossas vidas, seja em forma de fotografias, pinturas, desenhos ou simples rabiscos. As palavras podem ser lidas ou ouvidas; as imagens, por sua vez, são apreendidas de forma diferente da linguagem verbal, pois não são feitas do mesmo código, e são capazes de nos remeter diretamente à coisa representada por traços de semelhança. As imagens são portadoras de memórias, culturas e tradições. Elas podem transformar um instante em eternidade. (XAVIER, 2018, p.2).

Apesar da forte conotação visual, os estudos sobre as histórias em quadrinhos se concentram, sobretudo, em seu poder comunicacional, como um entre vários outros veículos dos meios de comunicação de massa. As HQs hoje, fazem sucesso entre o público infan-

to-juvenil, mas mantêm um público fiel entre os adultos que acompanham regularmente em jornais de grande circulação que abordam uma variedade de temas, dos mais simples a temas complexos.

A forma como as histórias em quadrinhos é produzida, fazendo a aliança entre a imagem e a linguagem escrita, além de proporcionar um prazeroso convite à leitura e à produção de textos induz à observação análise crítica e interpretação de figuras e textos o que estimula a formação de leitores fundamentados e elevando os seus níveis de atenção, imaginação e criatividade. Para Alves (2001), isso se deve ao fato de que os quadrinhos se conectam melhor com o entendimento dos alunos o que facilita a compreensão dos textos conferindo mais atratividade e prazer pela leitura e pela produção das HQs.

Na atualidade, diversas produções em quadrinhos foram adaptadas para o cinema, atraindo um público novo, promovendo a expansão do alcance deste tipo de narrativa, muito além dos adeptos já existentes e que ajuda a popularizar mais ainda o gênero.

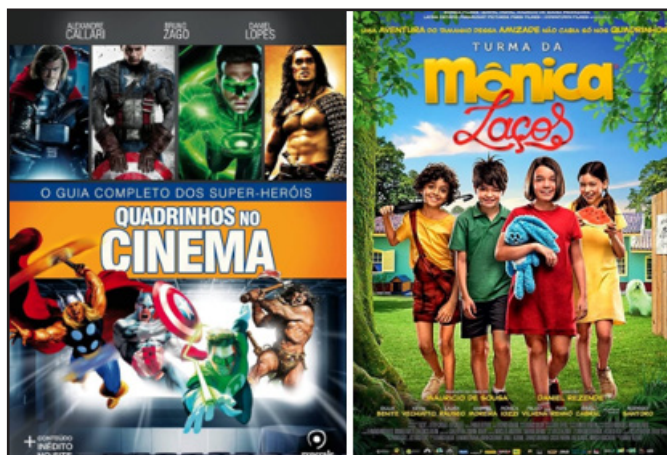


Figura 2. Quadrinhos no cinema

Fonte: Editora Evora (2019)

Disponível em: <https://www.editoraevora.com.br/quadrinhos-no-cinema>. Acesso em: 31 de agosto de 2025.

Assim, com visibilidade atual e com a já conhecida magia associada aos quadrinhos, acredita-se que a aceitação do público jovem em relação a este gênero é facilitada em todos os meios em que as HQs puderem circular, inclusive nas escolas.

2. ASPECTOS ATUAIS DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Após a consolidação das avaliações em larga escala no Brasil, como por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), alguns dados ganharam visibilidade e chamam a atenção para aspectos preocupantes da nossa educação.

Segundo o relatório do PISA (2022), 50% dos estudantes brasileiros não atingem o nível básico de leitura, considerado pela OCDE como essencial para o pleno exercício da cidadania. O relatório também revela que, surpreendentemente, 73% dos alunos brasileiros não alcançaram o nível básico (nível 2) em matemática, que é fundamental para que os jovens participem ativamente na sociedade e exerçam seus direitos como cidadãos.

Para Marcelo Viana (2023), “O Pisa traz dados bastante preocupantes que apontam mais uma vez para a urgência, a eterna urgência de melhorar o quadro de matemática”

Além disso, pela primeira vez, foi avaliada a criatividade dos estudantes. Infelizmente,

o Brasil obteve um dos piores resultados, com 54,3% dos jovens apresentando um nível baixo de pensamento criativo. Outro aspecto avaliado e que preocupa é o aumento da ansiedade matemática, constatou-se que 74,2% sentem-se preocupados em ter dificuldades com a disciplina.

Diante do exposto nos parágrafos acima, percebe-se a necessidade de adotar outras estratégias pedagógicas, que assumam o papel que vai além da explanação dos conteúdos, mas que também reduzam a tensão e o estresse nos ambientes educativos e deixem os estudantes propensos a explorarem as suas potencialidades. Neste sentido o objetivo deste estudo é propor o uso das HQs como recurso didático nas salas de aula, mostrando a importância de explorar as possibilidades dos quadrinhos promovendo uma melhor conexão entre alunos, professores e os objetos de conhecimento.

3. PROTAGONISMO ESTUDANTIL

Um aluno que possui protagonismo estudantil é aquele que possui a capacidade assumir um papel ativo e central no próprio processo de aprendizagem. Isso vai muito além da participação nas atividades escolares, mas também na apropriação da responsabilidade de fazer as suas escolhas, tomar decisões, refletir sobre elas e desenvolver ações em benefício da própria educação. O aluno protagonista é aquele que busca entender, questionar e se engajar na construção do seu conhecimento.

A Lei Complementar nº 1.164 de janeiro de 2012 (BRASIL, 2012), definiu protagonismo juvenil como “processo atitudinal pelo qual os alunos, sob orientação dos professores, assumem progressivamente a gestão de seus conhecimentos e de sua aprendizagem, com responsabilidade individual, responsabilidade social e responsabilidade institucional...”

Para promover o protagonismo estudantil nos ambientes escolares algumas estratégias podem ser adotadas, tais como:

- **Incentivo à autonomia dos alunos;** permitindo por exemplo, que eles sugiram temas de interesses para as atividades e projetos
- **Estímulo ao trabalho em grupo;** visando promover atividades a serem desenvolvidas em equipes a fim de promover o trabalho colaborativo
- **Oferta de feedback constantes e construtivos;** através de orientações, estímulos à reflexão e valorização dos esforços.
- **Valorização do pensamento crítico:** através da proposta de atividades que fomentam questionamentos, discussões, debates e questionamentos.

4. O USO DAS HQs NA SALA DE AULA E APOIO AO ENSINO DA GEOEMTRIA PLANA

A BNCC destaca o uso dos quadrinhos desde a Educação Infantil, na área de Linguagens, no campo artístico-literário para o Ensino Fundamental, campo este “relativo à participação em situações de leitura, fruição e produção de textos literários e artísticos, representativos da diversidade cultural e linguística, que favoreçam experiências estéticas” (BRASIL, 2018, p. 96).

Para o mesmo documento, o importante é que os estudantes “se apropriem das especificidades de cada linguagem, sem perder a visão do todo no qual elas estão inseridas”



(BRASIL, 2018, p. 63).

Diversos autores aconselham o uso das HQs na sala de aula como uma alternativa. Para Vergueiro (2004) a utilização das HQs em sala de aula promove uma experiência de aprendizagem rica e significativa, pois elas apresentam uma contínua interação entre os elementos verbais e não verbais facilitando a compreensão plena e instantânea do que se quer transmitir.

Além da facilitar a aprendizagem, o uso das HQs e o seu encorajamento à leitura, traz outros benefícios, é o que diz Ramos (2009) que defende a premissa de que os quadrinhos possibilitam perceber a linguagem numa nova perspectiva de olhar, mais crítico e fundamentado. Nesse sentido, eles ampliam os olhares e despertam maior interesse das crianças pela leitura, por meio das relações cognitivas e o prazer da leitura.

Utilizar as HQs em sala de aula constitui uma enriquecedora prática pedagógica com indicação para qualquer nível de ensino, é o que diz Calazans (2004), ao ressaltar que as HQs são uma forma universal de comunicação, e, por ser uma leitura espontânea e prazerosa, é um recurso didático riquíssimo que auxilia os professores em todos os níveis de ensino.

A exploração das histórias em quadrinhos nas aulas de matemática possibilita o uso potencial da imaginação, do senso crítico, da engenhosidade para transformar a linguagem matemática e todo o seu rigor em narrativas mais extrovertidas o que pode, além de facilitar a apropriação do conteúdo reescrito, aumentar o entusiasmo dos estudantes nas aulas de matemática.

A geometria desempenha um papel fundamental na vida cotidiana, influenciando diversas áreas, desde a arquitetura até a arte, passando pela engenharia e a natureza. Ela nos ajuda a entender e a descrever o espaço ao nosso redor, permitindo que projetemos e construamos estruturas, como edifícios e pontes, com segurança e eficiência. Além disso, conceitos geométricos são essenciais em atividades cotidianas, como o planejamento de móveis em um ambiente ou a análise de formas e tamanhos ao fazer compras. A geometria também está presente em fenômenos naturais, como a simetria das flores e a disposição dos cristais, ressaltando sua relevância não apenas em contextos práticos, mas também na apreciação estética do mundo. Assim, compreender a geometria nos capacita a interagir de maneira mais consciente e criativa com o ambiente que nos cerca.

Na geometria plana são abordados conteúdos essenciais para a compreensão das propriedades e relações das figuras bidimensionais. Inicialmente, os alunos estudam as principais formas geométricas, como triângulos, retângulos, quadrados, paralelogramos e círculos, explorando suas características e classificações. O cálculo de perímetro e área é um aspecto central, permitindo que os estudantes apliquem fórmulas para resolver problemas práticos do cotidiano. Além disso, a geometria plana envolve o estudo de ângulos, incluindo a soma dos ângulos internos de um triângulo e as relações entre ângulos opostos e adjacentes. Os teoremas, como o Teorema de Pitágoras, também são introduzidos, ampliando a compreensão sobre a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Por fim, a análise de transformações geométricas, como translações, rotações e reflexões, proporciona uma visão dinâmica das figuras, enriquecendo o aprendizado e a aplicação dos conceitos em diversas situações. Ainda, de acordo com Matos e Serrazina (1996), a aprendizagem da Geometria também possibilita o desenvolvimento de outras habilidades, como a verbalização, que inclui a troca de ideias, argumentos e a negociação de significados.

Porém,

Apesar do contexto natural privilegiado para desenvolver diversas capacidades, o insucesso dos alunos na aprendizagem da Geometria é reconhecido em variados estudos, pelo que alguns pesquisadores têm se debruçado sobre a função das imagens mentais na forma como se resolvem problemas, nas dificuldades percentuais dos alunos na compreensão dos desenhos e figuras, na interpretação de representações visuais de conceitos, no estudo da capacidade em imaginar transformações em objetos matemáticos e na comunicação do pensamento matemático, através do uso de vocabulário geométrico adequado (GUTIÉRREZ, 1998, p. 28).

Para pensadores como Barbosa (2009), “há a necessidade alfabetizar para a interpretação de imagens, para a decodificação da gramática visual da imagem fixa”. Logo, a utilização das HQs no estudo da Geometria Plana pode contribuir muito para a apropriação de conceitos, a verbalização de enunciados, a análise de contextos e a apreciação visual. Com este intuito, os quadrinhos se configuram em uma importante ferramenta de atração dos olhares dos estudantes aos conteúdos geométricos, tendo em vista que a utilização dos quadrinhos aguça traços como a curiosidade e pretende a atenção dos leitores.

Pois,

Os quadrinhos influenciam a imaginação do leitor, por causa da sua riqueza de detalhes. O roteiro, assim como o desenho, sem esquecer, das cores, traços e o formato são os atrativos que seduzem e que satisfazem diversos gostos. Nesse contexto, é importante salientar que por meio das HQs podemos tratar de qualquer assunto, em qualquer disciplina ou grau de ensino (ALMEIDA, 2022, p. 18).

A atratividade instantânea provocada pelos quadrinhos é extremamente valiosa, pois, apesar da sua enorme importância, estudos mostram que a geometria foi deixada de lado por um longo período nas escolas brasileiras, o que prejudicou a formação do pensamento geométrico em muitas gerações de estudantes. Dessa forma, é essencial desenvolver métodos e estratégias didáticas que promovam um melhor desempenho dos alunos na aprendizagem deste importante eixo temático da matemática.

Diante das situações apresentadas, esta pesquisa teve como um dos focos entender de que forma a criação de histórias em quadrinhos pode atrair os leitores e auxiliar na compreensão, elaboração e comunicação de conceitos básicos da Geometria. A proposta de utilizar as HQs baseia-se na ideia de que os textos desse gênero literário oferecem uma leitura mais leve e lúdica, incentivando uma observação atenta da narrativa e dos detalhes contidos em textos e imagens. Isso contribui para facilitar a capacidade de se expressar de maneira espontânea, sem, contudo, comprometer a precisão que a informação matemática requer na aprendizagem da geometria.

No entanto, o nosso objetivo principal foi avaliar o papel de protagonismo desenvolvido pelos alunos durante todas as fases de produção dos quadrinhos sobre temas relacionados à geometria plana e perceber o envolvimento deles nas escolhas dos temas, nas formações das equipes, nas pesquisas sobre os conteúdos, além das pesquisas sobre as HQs e a elaboração dos roteiros.

Estas vantagens foram bem exploradas durante a produção das HQs por parte dos alunos. Nas seções a seguir, apresentaremos algumas das histórias em quadrinhos produ-



zidas e as suas respectivas análises.

5. METODOLOGIA

A pesquisa, de caráter qualitativo e com elementos de pesquisa-ação, foi realizada em uma escola comunitária no município de Urbano Santos, no Maranhão, envolvendo duas turmas do Ensino Médio: a terceira série, composta por 29 alunos, e a segunda série, com 39 alunos.

A turma da terceira série foi dividida em 6 grupos: cinco com 6 integrantes e um com 5. Cada grupo criou uma história em quadrinhos (HQ), exceto um que optou por produzir duas, totalizando 7 HQs. As produções seguiram uma sequência didática elaborada pelo professor pesquisador. As histórias foram lidas e analisadas pela turma da segunda série, que se organizou em duplas para essa tarefa. Durante todo o processo de produção e leitura, foram coletados dados para a pesquisa por meio da observação do pesquisador e das respostas a questionários dos alunos. As figuras 3 e 4 retratam os alunos nas atividades, mostrando os da terceira série durante as apresentações das HQs e os da segunda série enquanto realizavam as leituras.



Figura 3. Alunos da terceira série no dia da apresentação das HQs.

Fonte: Elaboração do autor, 2024



Figura 4. Alunos da segunda série durante a leitura das HQs.

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Além das HQs produzidas, foram elencadas no trabalho softwares e plataformas utilizadas pelos alunos nas produções, modelos de HQs envolvendo a matemática, além de exemplos e ilustrações dos elementos principais que compõem uma história em quadrinhos tais como: quadros, requadros, calhas ou sarjetas, balões e onomatopeias.

Entre os softwares utilizados, destacam-se o aplicativo HagáQuê, o site Google Jamboard as plataformas Canva e Pixton, sobre os quais o autor mostrou algumas interfaces e funcionalidades de cada programa.

As histórias produzidas envolveram vários temas da Geometria Plana elencados na sequência didática e relacionados no quadro 1.

Tema	Círculo e circunferência
Tema	Classificação dos triângulos
Tema	Classificação dos polígonos regulares
Tema	Triângulo equilátero e suas propriedades
Tema	O cálculo da altura do triângulo equilátero
Tema	A relação entre a diagonal e a área do quadrado
Tema	A Diferença entre polígonos inscritos e circunscritos

Quadro 1. temas abordados nas HQs produzidas

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Entre as HQs produzidas destacamos três produções (figuras 5, 6 e 7), uma delas aborda a relação da diagonal de um quadrado e a sua área, outra aborda a inscrição e circuns-

crição de polígonos em circunferências e a terceira trata sobre a fórmula do comprimento da circunferência



Figura 5. HQ sobre diagonal do quadrado

Fonte: Elaboração do autor, 2024

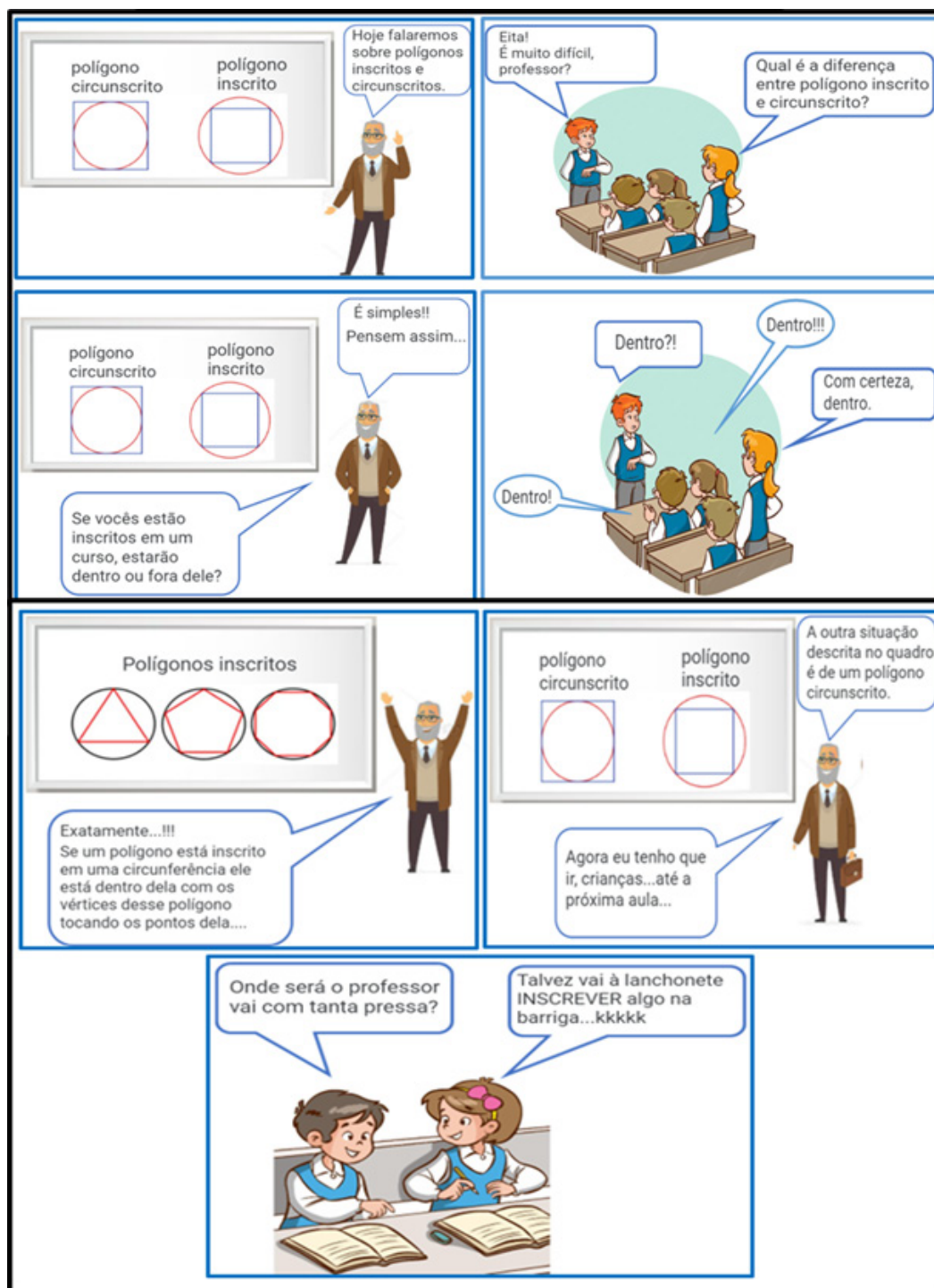


Figura 6. HQ sobre polígonos inscritos e circunscritos

Fonte: Compilação do autor, 2023

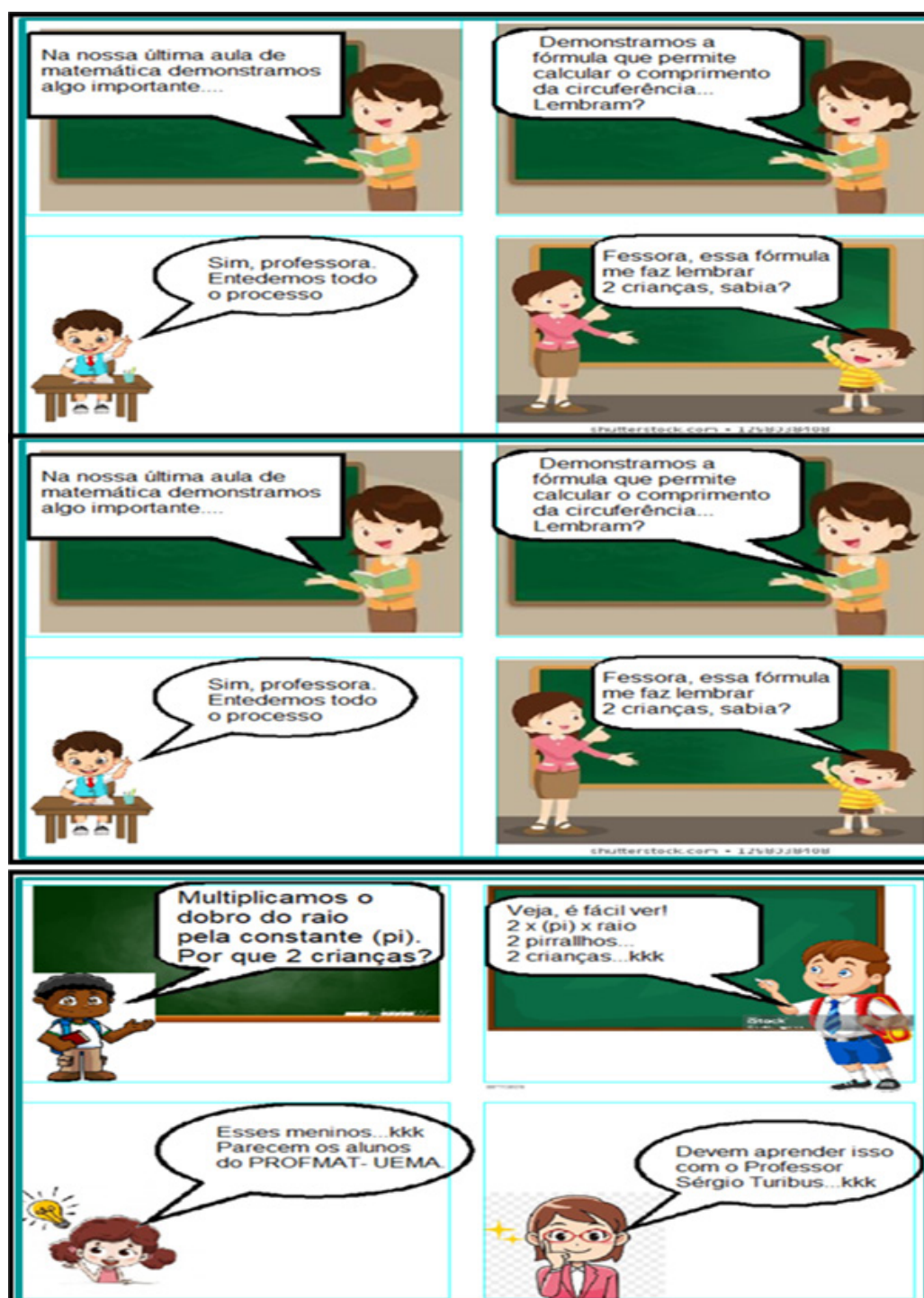


Figura 7. HQ sobre o comprimento da circunferência

Fonte: Elaboração do autor, 2024

6. ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

Durante as atividades, os dados foram coletados através da observação e aplicação de questionários que permitissem aos alunos externarem, através da linguagem escrita, as

As imagens a seguir mostram trechos dos questionários respondidos pelos alunos relatando as experiências e as aprendizagens adquiridas por eles durante o contato com os quadrinhos tanto na fase de produção quanto na fase de leitura e análise.

6.1 Comentários feitos pelos alunos na fase de produção das HQs

Para as equipes que produziram as HQs perguntou-se sobre as contribuições trazidas pelas produções. Esta equipe destaca a melhoria do conhecimento a respeito dos tópicos abordados, isso se deve ao fato de que tiveram que fazer pesquisas sobre tais tópicos e utilizar uma outra linguagem, mais coloquial, para descrever os conceitos que haviam aprendido. Acompanhe os relatos nas figuras 8 e 9

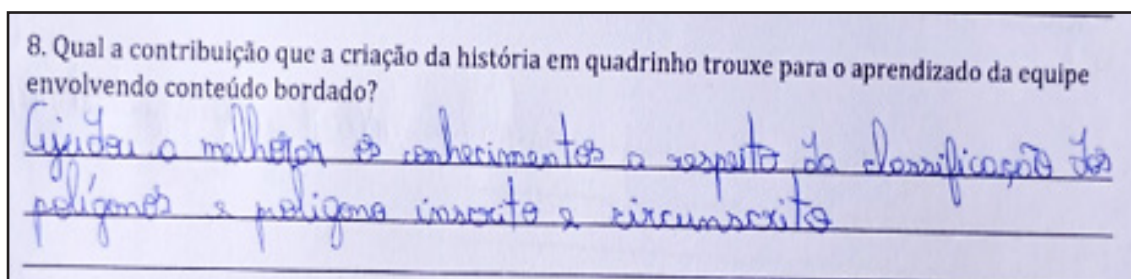


Figura 8. Depoimento de uma equipe que relata o aprimoramento dos conhecimentos a respeito de polígonos

Fonte: Elaboração do autor, 2024

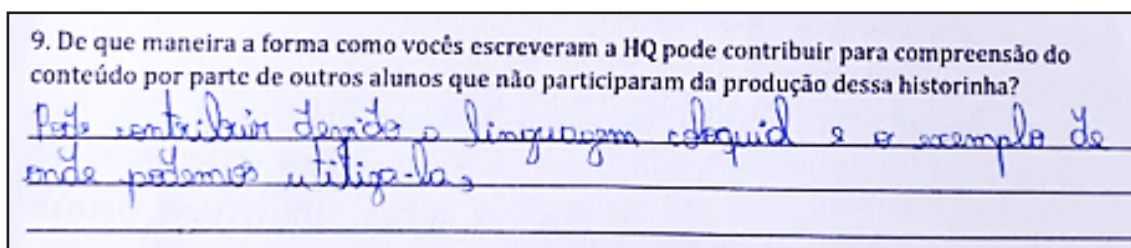


Figura 9. A equipe relata o aprimoramento dos conhecimentos a respeito de polígonos

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Perceba que esse processo de reescrita dos conceitos da geometria utilizando as histórias em quadrinhos exige que os estudantes tenham pleno domínio tanto da dinâmica dos quadrinhos quanto dos conteúdos abordados, visualizando conceitos abstratos de forma mais concreta, íntima e significativa, o que torna mais fácil a compreensão dos conceitos, o engajamento e a participação ativa deles, durante as atividades.

Outras equipes (figuras 10 e 11) relataram que o uso das histórias em quadrinhos, além de ampliar o conhecimento sobre os conteúdos criaram uma nova perspectiva de aprendizado, além do que, os quadrinhos provocam atratividade e interesse ao leitor.

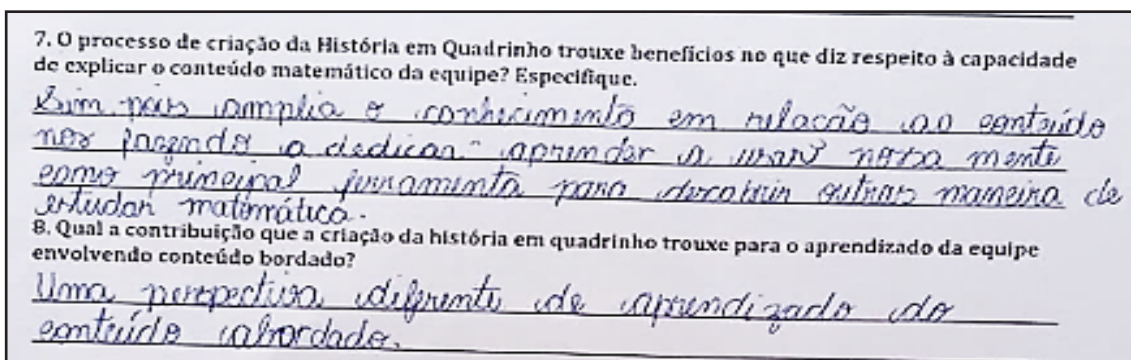


Figura 10. Depoimento de uma equipe que afirma que a utilização das HQs no ensino cria uma perspectiva diferente de aprendizagem

Fonte: Elaboração do autor, 2024

9. De que maneira a forma como vocês escreveram a HQ pode contribuir para compreensão do conteúdo por parte de outros alunos que não participaram da produção dessa historinha?

Com uma narrativa mais engajada e interessante pelo interlúdio sobre o assunto fica maior.

10. Para vocês, escrever historinhas envolvendo conteúdo matemático, em especial, conteúdo da Geometria Plana pode ajudar na compreensão da disciplina? Por quê?

Sim, porque o conteúdo fica mais atrativo, um conteúdo engajado e convincente envolver o leitor.

Figura 11. Depoimento de uma equipe que cita a atratividade e o interesse despertados pelas HQs.

Fonte: Elaboração do autor, 2024

6.2 Comentários feitos pelos alunos após a leitura das HQs

Para as equipes que leram as HQs, foi perguntado se eles detectaram diferenças entre a abordagem de conteúdo dos textos convencionais escritos nos livros e os textos escritos nos formatos de HQ e se eles indicariam a utilização das HQs nas aulas de matemática.

Os trechos trazidos nas figuras 12, 13 e 14 evidenciam o incentivo para a aprendizagem relatados pelos alunos pela associação de textos e imagens, a utilização do humor, a simplicidade da linguagem, o dinamismo e a versatilidade atribuído ao tipo de escrita

8. Há alguma diferença entre a forma como o conteúdo matemático foi escrito na HQ que você leu e os textos dos livros didáticos com os quais você já estudou? Qual?

Sim, ela se torna mais atrativa a quem lê; pois usa da Hq como ferramenta de incentivo a aprender.

9. Para você, em que aspectos a leitura de historinhas em quadrinhos envolvendo conteúdo matemático, em especial, conteúdo da Geometria Plana pode ajudar na compreensão da disciplina?

Ajuda na percepção, porque se torna mais dinâmica, deixando a aprendizagem mais versátil.

Figura 12. Depoimento de uma equipe que enfatiza a dinâmica e a versatilidade do aprendizado através do uso das HQs.

Fonte: Elaboração do autor, 2024

8. Há alguma diferença entre a forma como o conteúdo matemático foi escrito na HQ que você leu e os textos dos livros didáticos com os quais você já estudou? Qual?

Sim, na HQ o conteúdo matemático foi escrito de forma humorística e usando de figuras e imagens, ao contrário dos livros didáticos que abordam a teoria "pura".

9. Para você, em que aspectos a leitura de historinhas em quadrinhos envolvendo conteúdo matemático, em especial, conteúdo da Geometria Plana pode ajudar na compreensão da disciplina?

Ajuda na memorização do conteúdo, já que na HQ se refere a histórias que podem ser abstratas usando humor, facilitando um maior entendimento e vontade para querer aprender.

Figura 13. A equipe compara a proposta com a forma tradicional de ensino

Fonte: Elaboração do autor, 2024

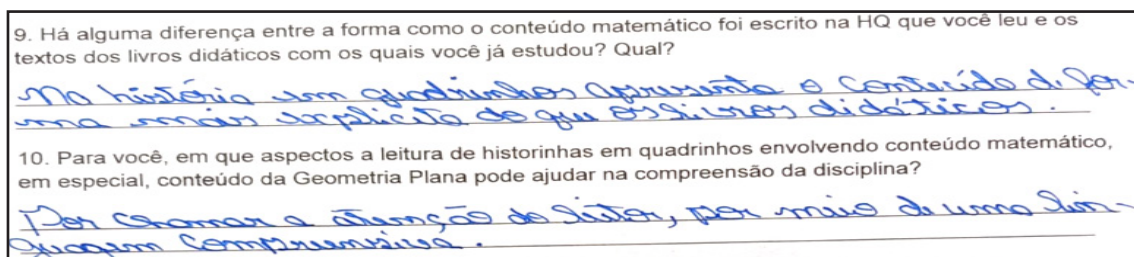


Figura 14. A equipe cita a vantagem da utilização de uma linguagem compreensiva.

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Sobre a indicação por parte deles da utilização das HQs nas aulas de matemática, muitos relatos dão conta de que isto facilitaria a aprendizagem e o entendimento, se tornando um forte atrativo à leitura extrovertida e compreensão dos textos. Acompanhe os depoimentos na figura 15.

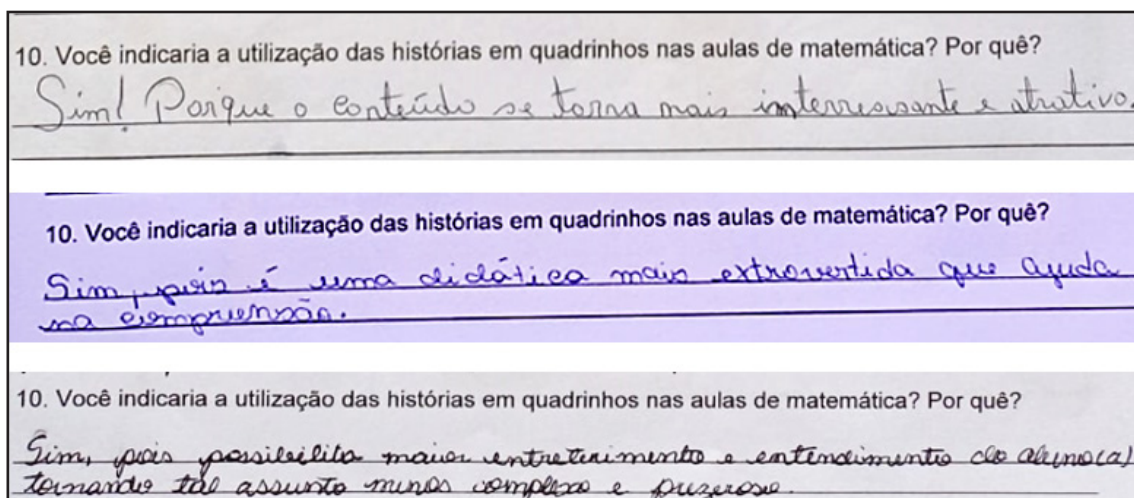


Figura 15. Depoimento de uma equipe que relata o aprimoramento dos conhecimentos a respeito de polígonos

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Dentre os participantes da pesquisa, 97% indicaram a utilização das HQs nas aulas de matemática, como mostra o gráfico 1.

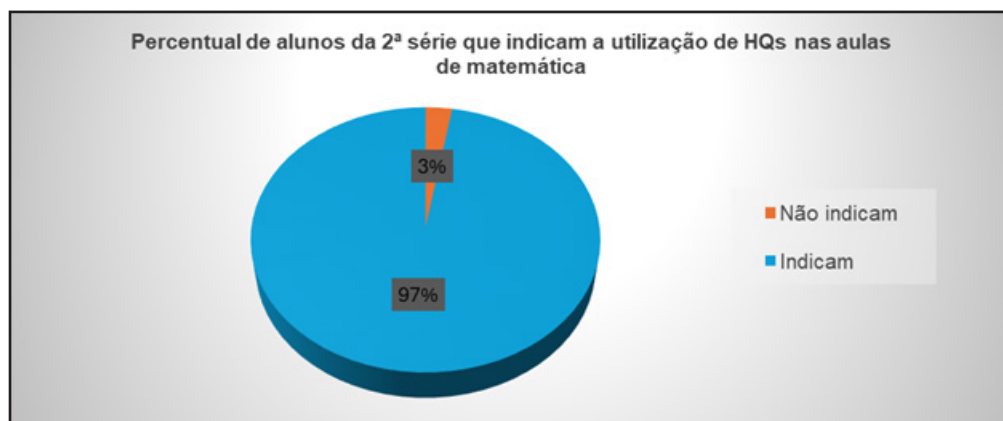


Gráfico 1. Sobre o percentual de alunos da 2ª série que indicam a utilização de HQs nas aulas de matemática.

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Há de se destacar que a associação entre as imagens e textos nas HQs enriquece o potencial de comunicação de ambos favorecendo a formação de um leitor atento, analítico e

reflexivo, como destacou o comentário da figura 16.

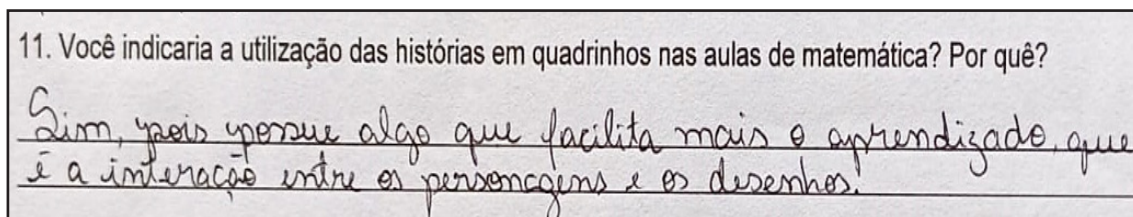


Figura 16. Depoimento de uma equipe que relata o aprimoramento dos conhecimentos a respeito de polígonos

Fonte: Elaboração do autor, 2024

Concordamos que:

Conjugando imagem à palavra, o potencial comunicativo de ambas é ainda ampliado, podendo uma reforçar o que diz a outra, dizer o que a outra não diz, ou mesmo desdizer o que é dito pela outra, criando diferentes efeitos de sentido (XAVIER, 2018, p.2).

Esse poder de observação, análise e interpretação de figuras, a compreensão de conceitos e a elaboração de inferências e conjecturas, além da escrita dos enunciados são habilidades muito exploradas durante a aprendizagem de geometria, o que podem ser potencializadas com a utilização das HQs.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo como objetivo avaliar a ação de protagonismo estudantil de alunos do Ensino Médio durante a fundamentação de uma proposta pedagógica que sugere a aprendizagem de tópicos da Geometria Plana através da leitura e construção de histórias em quadrinhos, a pesquisa avaliou de forma muito positiva o potencial da utilização das HQs nas aulas de matemática o que influenciou de maneira muito eficaz na melhoria da motivação, aumentando o desempenho dos estudantes durante as atividades

Entre as principais vantagens notas durante as atividades, podemos citar:

- **Forte engajamento e aceitação;** o notável empenho dos alunos durante as atividades desenvolvidas e o entusiasmo com o qual as mostraram o quão propensos estavam a prender o que torna mais fácil e agradável o processo de aprendizagem
- **Colaboração e trabalho em equipe;** o trabalho em equipe desenvolve o espírito de colaboração entre os alunos fazendo com que uns aprendam com os outros através da troca de ideias, experiências e saberes.
- **Utilização de ferramentas digitais;** além de conhecer bem as técnicas de produção de Histórias em Quadrinhos e os estudantes buscaram conhecer e manusear diversas ferramentas tecnológicas destinadas à criação deste gênero, melhorando a qualidade das produções.
- **Compreensão profunda sobre o tema abordado;** os estudos sobre os temas facilitaram o entendimento dos temas abordados. Esta fase incorpora ações destinadas à pesquisa, compreensão de códigos, símbolos, nomenclaturas e conceitos e posterior adaptação da linguagem à dinâmica dos quadrinhos.
- **Intimidade com a matemática;** as HQs tornam os textos sobre a matemática mais

amigáveis, através dos elementos, da linguagem peculiar, o que renova as perspectivas sobre a disciplina e aproxima os alunos tornando-os mais íntimos com a matemática.

- **Aprendizagem contextualizada e significativa;** utilizando as HQs para contextualizar situações do cotidiano dos alunos, mostra-se uma matemática com significância a eles, os encorajando a reconhecer e aplicar o conhecimento matemática em diferentes contextos
- **Ação de protagonismo por parte dos estudantes:** o exercício pleno da criatividade e da imaginação delega aos estudantes a liberdade para atuarem de maneira positiva na própria formação, sendo os atores principais na construção das próprias aprendizagens.

Ao que se percebeu, criar uma história em quadrinhos, fazendo uso de uma linguagem mais simples e compreensiva, utilizando tons humorísticos e traços marcantes de criatividade exige também o conhecimento sobre o que se escreve o que, por si só, revela uma clara manifestação de aprendizagem.

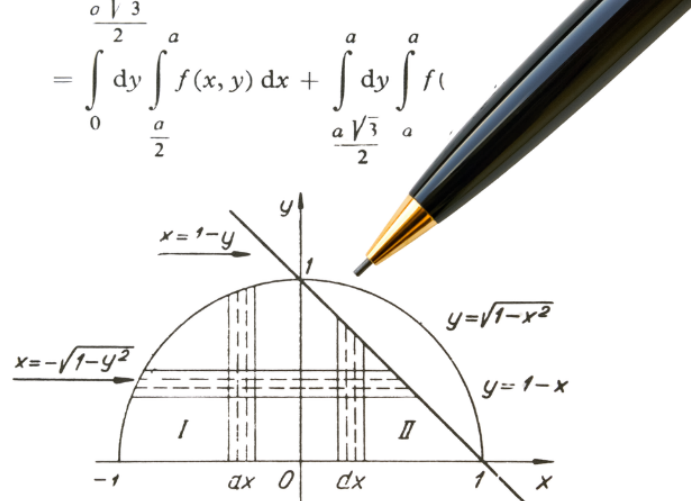
Para os estudantes da 2ª série, a aprendizagem foi facilitada pela atratividade causada pelas HQs, conferindo inovação, divertimento e simplicidade às narrativas. Já para os estudantes da 3ª série, a aprendizagem se deu, fundamentalmente, pela ação de protagonismo desempenhada por eles em todas as etapas de produção, favorecendo o processo de aquisição de conhecimentos, ligando o divertimento criativo dos quadrinhos ao conhecimento geométrico, fazendo-os assumir o papel principal na construção dos próprios saberes.

Como o estudo se mostrou promissor nos propósitos da pesquisa, indica-se mais estudos sejam realizados sobre esse tema buscando envolver o maior número possível de alunos e professores na procura por novas estratégias que aumentem a eficácia do ensino da matemática e das demais áreas do conhecimento

Referências

- ALMEIDA, F.; SOUSA, L. **A arte das histórias em quadrinhos na educação: uma experiência metodológica interdisciplinar**. Editora Científica Digital, 2022.
- ALVES, J. M. **Histórias em quadrinhos e educação infantil**. Psicologia: Ciência e Profissão, v. 21, nº 3, 2001.
- BISSOLOTTI, M. de L.; TITON, F. P. **Diagnóstico sobre as dificuldades de aprendizagem da geometria no ensino médio e os potenciais elementos facilitadores**. CONTRAPONTO: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação. Blumenau/SC, v. 3, n. 4, Jul/Dez 2022.
- BRASIL. **Lei Complementar nº 1.164, de 4 de janeiro de 2012**. Disponível em: <https://www4.planalto.gov.br/legislacao/portal-legis/legislacao-1/leis-complementares>. Acesso: 31 08. 2025
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2018.
- GUTIÉRREZ, A., & Jaime, A. On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 20 (2&3), 27-46, 1998.
- MATOS, J. e SERRAZINA, M. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.
- XAVIER, Glacy Kelli Reis da Silva. **Histórias em quadrinhos: Panorama histórico, características e verbo-visualidade**. Disponível em: <https://www.ufjf.br/darandina/files/2018/01/Artigo-Glacy-Xavier.pdf>. Acesso em: 19 de março de 2022.





16

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA CRIANÇAS COM TEA

DIGITAL TECHNOLOGIES AND TEACHING MATHEMATICS TO CHILDREN WITH ASD

Jarlisse Nina Beserra da Silva¹

Ilka Marcia Ribeiro de Souza Serra²

Jackson Ronie Sá-Silva³

João Aranha Barros⁴

¹ Doutoranda, UEMA, São Luís - MA

² Doutora, UEMA, São Luís - MA

³ Doutor, UEMA, São Luís - MA

⁴ Doutorando, UEMA, São Luís - MA

RESUMO

Este artigo discute o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) no ensino de Matemática para crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA), destacando a relevância da inclusão escolar e a valorização da diversidade. O objetivo geral é investigar de que forma as TDICs, articuladas práticas pedagógicas inclusivas, podem contribuir para o ensino de Matemática a crianças com TEA. Definiu-se como objetivos específicos: apresentar algumas concepções teóricas e culturais acerca do TEA e sua relação com os processos de ensino e aprendizagem e; identificar práticas pedagógicas inovadoras que favoreçam a inclusão de crianças com TEA no ensino de Matemática. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, de abordagem qualitativa, fundamentada em autores que discutem o conceito de inclusão, ensino de Matemática, tecnologias digitais e estratégias pedagógicas voltadas ao público com TEA. Os resultados apontam que a utilização de ferramentas digitais, quando mediada por professores sensíveis à temática, ampliam possibilidades de aprendizagem e participação, transformando a sala de aula em espaço de descoberta e que a formação docente contínua é indispensável para potencializar o uso pedagógico das TDICs no ensino de Matemática às crianças com TEA.

Palavras-chave: Educação Inclusiva, Ensino de Matemática, Transtorno do Espectro Autista, Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação.

ABSTRACT

The This article discusses the use of Digital Information and Communication Technologies (DICTs) in the teaching of Mathematics for children with Autism Spectrum Disorder (ASD), highlighting the relevance of school inclusion and the appreciation of diversity. The general objective is to investigate how DICTs, combined with inclusive pedagogical practices, can contribute to the teaching of Mathematics to children with ASD. The specific objectives are: to present theoretical and cultural conceptions about ASD and its relationship with teaching and learning processes; and to identify innovative pedagogical practices that foster the inclusion of children with ASD in Mathematics education. The methodology adopted was bibliographic research, with a qualitative approach, based on reference authors who discuss inclusion, Mathematics teaching, digital technologies, and pedagogical strategies aimed at students with ASD. The results indicate that the use of digital tools, when mediated by well-prepared teachers, expands learning and participation opportunities, transforming the classroom into a space of discovery. Furthermore, continuous teacher education is essential to enhance the pedagogical use of DICTs in Mathematics teaching for children with ASD.

Keywords: Inclusive Education Mathematics Teaching, Autism Spectrum Disorder (ASD), Digital Information and Communication Technologies (DICTs).



1. INTRODUÇÃO

A escolarização de crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA) tem movimentado, com maior intensidade, os estudos no campo da educação, tendo em vista a necessidade de repensar as práticas de ensino e redefinir o papel de professores e estudantes diante da educação numa perspectiva inclusiva.

A perspectiva inclusiva pressupõe que todas as crianças tenham as mesmas oportunidades de acesso, permanência e aproveitamento na aprendizagem escolar, independentemente de quaisquer características peculiares que apresentem. Esse entendimento vem sendo discutido em âmbito internacional e nacional desde meados da década de 1980 (Mazzota, 2011).

Cabe destacar que, na realidade brasileira, segundo os dados do Instituto Anísio Teixeira (INEP), as matrículas de estudantes com TEA aumentaram 44,4% entre 2023 e 2024. De acordo com o Censo Escolar 2024, o número saltou de 636.202 para 918.877 nesse período. Tal realidade indica, com maior clareza, a necessidade de engajamento para a tematização do ensino de crianças com TEA em pesquisas acadêmicas que possam reverberar nos espaços escolares. Assim, emerge a motivação para este estudo, que constitui o percurso de formação no curso de Doutorado em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) da Universidade Estadual do Maranhão.

É importante ressaltar, inicialmente, que essa escrita parte do pressuposto de que é fundamental reconhecer que as especificidades de crianças com TEA exigem um olhar cuidadoso dos educadores, no sentido de respeitar suas possíveis limitações e analisar suas potencialidades, buscando estratégias de ensino que se adaptem às aprendizagens desses sujeitos em desenvolvimento. Compreendendo, ainda, o processo de desenvolvimento das crianças numa perspectiva vygotskyana, situa-se o ensino de Matemática como um desafio para muitos estudantes, considerando o contato com noções de álgebra, geometria, probabilidade, entre outros conteúdos que exigem um nível de abstração, construindo as bases para o raciocínio lógico e cotidiano.

Para crianças com TEA, longe de impor uma intenção determinista, pois se trata de um espectro e, como tal, não cabe homogeneização, salienta-se a compreensão da pluralidade como característica própria da existência humana, tendo em vista a diversidade de sujeitos que somos, na qual se atravessam relações de gênero, étnico-raciais, socioeconômicas, entre tantas outras. Dessa forma, a partir do reconhecimento de que as diversidades estão presentes em nosso dia a dia, assim como na sala de aula, este estudo parte da premissa de que a Matemática pode ser desafiadora para muitas crianças, tenham elas TEA ou não. Da mesma forma, a Matemática pode ser acessível para outras tantas crianças, independentemente de apresentarem TEA.

O reconhecimento da criança com TEA como um sujeito que pode ter dificuldades diferenciadas, exigindo atendimento especializado, não limita seu potencial; ao contrário, constitui-o como sujeito de direitos, inclusive o direito a uma educação de qualidade, que subsidie o sucesso nas aprendizagens e forneça condições de acesso, permanência na escola e Atendimento Educacional Especializado (AEE), segundo a legislação educacional vigente no país.

Ao ter como foco o ensino de Matemática, é importante compreender que as práticas pedagógicas foram historicamente forjadas por um viés tradicional, pautado na memorização e categorização de conteúdos que, em sua maioria, não dialogavam com as neces-

sidades reais de compreensão dos estudantes. Contudo, a própria mudança da sociedade exige superar essas práticas, muitas vezes responsáveis pelo desinteresse dos alunos diante das instituições escolares e do estudo da Matemática.

Estamos em tempos de travessia, inseridos no contexto digital. As TDICs estão cada vez mais presentes no dia a dia de professores e alunos, possuindo grande potencial para inovar as práticas pedagógicas, ao oferecer diferentes linguagens que podem atuar sobre a diversidade de maneiras de aprender.

Diante dessa premissa, este estudo parte do seguinte questionamento: como as tecnologias digitais podem contribuir para um ensino de Matemática voltado aos estudantes com TEA nos anos iniciais do ensino fundamental? Essa indagação delineia o objetivo central do estudo: investigar as contribuições das TDICs, aliadas às práticas pedagógicas inclusivas, para o ensino de Matemática a crianças com TEA. Foram definidos como objetivos específicos: apresentar as concepções teóricas e culturais acerca do TEA e sua relação com os processos de ensino e aprendizagem; e identificar práticas pedagógicas inovadoras que favoreçam a inclusão de crianças com TEA no ensino de Matemática.

Para tanto, este estudo caracteriza-se como bibliográfico, de abordagem qualitativa, utilizando como perspectiva os Estudos Culturais em Educação, fundamentados em autores que discutem inclusão, ensino de Matemática, tecnologias digitais e estratégias pedagógicas voltadas ao público com TEA. Foram formuladas duas categorias através da análise de conteúdo de Bardin (2011), a saber: conceituações sobre TEA e TDICs para o ensino de Matemática a crianças autistas.

A organização teórica e metodológica do estudo parte da introdução, na qual são apresentados o problema de pesquisa, a justificativa, os objetivos e o que se espera do estudo. Em seguida, são apresentados apontamentos sobre o TEA, buscando uma análise para além do discurso clínico. Posteriormente, são discutidas as possíveis contribuições das TDICs para o ensino de Matemática a crianças com TEA. Por fim, são tecidas as considerações finais do estudo.

Espera-se que esta pesquisa contribua para o campo da Educação, fortalecendo o engajamento em práticas pedagógicas que promovam representações matemáticas inclusivas para crianças com TEA, levando em consideração o contexto de uma realidade cada vez mais conectada às TDICs.

2. APONTAMENTOS SOBRE AS CONCEITUAÇÕES DO TEA

A palavra “autismo” carrega em sua etimologia uma dimensão simbólica e evocativa: do grego, *autos* significa “a si mesmo”, e o sufixo *ismo* indica disposição ou condição (Machado, 2014; Sousa, 2004). Desde sua gênese, o termo sugere um movimento de interioridade, de recolhimento em si. Entretanto, essa definição não permaneceu imutável; foi sendo constantemente atravessada por discursos médicos, pedagógicos e sociais, revelando, como afirmaria Foucault (1996), que todo saber é também um exercício de poder.

Os primeiros registros datam de 1906, quando o psiquiatra Plouller utilizou o termo ao estudar processos de pensamento em pacientes diagnosticados com demência (Silva, 2017; Dias, 2015). Poucos anos mais tarde, Eugen Bleuler (1911) vinculou o autismo à esquizofrenia infantil, ainda que buscando romper com a associação imediata à demência (Dias, 2015). Em 1943, Leo Kanner delineou um quadro mais sistematizado a partir de estudos com onze crianças, lançando bases para a compreensão atual do Transtorno do Espectro Autista (TEA). Simultaneamente, Hans Asperger (1944) investigava um grupo de crianças

que, embora apresentassem dificuldades de socialização e movimentos estereotipados, revelavam talentos singulares em áreas específicas, configurando o que mais tarde se denominaria síndrome de Asperger.

Do ponto de vista clínico, o TEA foi caracterizado como comprometimento nas dimensões da comunicação, da imaginação e da interação social (Mello, 2007). Para Duarte *et al.* (2015), trata-se de um conjunto de alterações neurobiológicas que repercutem na linguagem e na aprendizagem, marcadas por dificuldades em processos criativos, atencionais e simbólicos. Contudo, reduzir o autismo a um conjunto de déficits é desconhecer seus potenciais. Temple Grandin (2015), cientista autista, aponta que o pensamento imagético constitui uma estratégia singular de cognição e memória, mostrando que as diferenças cognitivas podem se converter em notáveis formas de inteligência. Além disso, aspectos sensoriais, como hipersensibilidade a estímulos visuais, auditivos e táteis precisam ser considerados nos processos pedagógicos, pois afetam a concentração e a aprendizagem (Duarte *et al.*, 2015).

Se, por um lado, a história do conceito nos mostra um percurso de medicalização e de classificações, por outro, uma leitura pós-estruturalista evidencia que tais definições não são verdades neutras, mas construções discursivas situadas em contextos históricos específicos (Foucault, 1999).

Nesse horizonte, Stuart Hall (2000) nos lembra que identidade é sempre processo, marcada por representações e negociações simbólicas. Assim, compreender o TEA implica reconhecer que nomeá-lo como “transtorno” não é apenas um diagnóstico técnico, mas um ato cultural que produz subjetividades e influencia como os sujeitos são percebidos e como se percebem.

É nesse contexto que emerge o movimento da neurodiversidade, expressão cunhada por Judy Singer (1999), que propõe compreender condições como o autismo não como patologias, mas como variações legítimas da experiência humana. Silberman (2015) reforça essa ideia ao afirmar que a história do autismo deve ser revisitada para resgatar as vozes das próprias pessoas autistas, muitas vezes silenciadas por narrativas biomédicas. Desse modo, tensionar a lógica patologizante e afirmar a diferença neurológica como parte da pluralidade humana é um gesto político e ético. Corroboramos com Orrú (2017, p.27) quando nos alerta que:

A escola se expropria da educação e dá à medicina o poder de dizer quem é que poderá ou não aprender; quem será capaz de conviver com os outros alunos quem não conseguirá atingir os objetivos educacionais propostos pela escola; quem deve ter seu comportamento controlado para não atrapalhar os demais na sala de aula; quem deverá ser segregado, e, inclusive, quem deverá ou não receber atendimento educacional especializado.

Essa perspectiva convida a escola a deslocar-se da imposição de padrões homogêneos de cognição e comportamento para a valorização de múltiplas formas de aprender, comunicar e existir. A política inclusiva, nesse sentido, não se resume ao acesso físico às instituições, mas deve assegurar o direito de habitar a diferença sem ser reduzido a ela.

Assim, o TEA, visto sob a ótica dos Estudos Culturais, não é apenas uma categoria clínica, mas um território de disputa simbólica onde se entrecruzam discursos científicos, culturais e políticos. Reconhecer essa complexidade é afirmar que a neurodiversidade compõe a própria tessitura da humanidade e que a educação, em sua vocação mais profunda, deve abrir-se para acolher o múltiplo, o diverso e muitas vezes o inesperado.

É importante, ainda, apontar que, na realidade brasileira a inclusão de crianças diagnosticadas com TEA nas escolas regulares é garantida por marcos legais que asseguram os mesmos direitos a todos os cidadãos brasileiros. Três legislações se destacam nesse contexto, refletindo a movimentação histórica em torno da inclusão e das garantias de direitos dentro do sistema educacional regular, ao mesmo tempo em que trazem maior visibilidade, conhecimento e conscientização sobre o TEA para a sociedade (Fraga, 2023).

O arcabouço jurídico que assegura os direitos das pessoas com (TEA) no Brasil se tece em marcos significativos. A Lei nº 12.764/2012, conhecida como Lei Berenice Piana, inaugura um horizonte de reconhecimento e proteção legal, garantindo direitos fundamentais às pessoas com TEA (BRASIL, 2012). Posteriormente, a Lei nº 13.652/2018 institui o Dia Nacional da Conscientização do Autismo, inscrevendo na agenda pública um convite à reflexão coletiva (BRASIL, 2018). Por fim, a Lei nº 13.977/2020, a chamada Lei Romeo Mion, concede às pessoas com TEA o direito à carteira de identificação, fortalecendo a visibilidade e a efetividade de seus direitos (BRASIL, 2020). Esses dispositivos legais, mais do que simples normas, configuram-se como símbolos de cidadania e dignidade, projetando sobre a sociedade a responsabilidade de acolher a diferença como parte constitutiva da vida comum.

No espaço escolar, essa missão adquire contornos ainda mais intensos. A inclusão educacional atribui à escola um papel central: o de ser palco do primeiro encontro de muitas crianças com TEA com universos sociais mais amplos que o lar, sua base primordial de socialização e construção cultural (Prediger, 2023). Nesse processo, os professores tornam-se figuras de referência incontornáveis, pois é por meio deles que se constroem caminhos para o desenvolvimento cognitivo, disciplinar e comportamental. São eles, igualmente, os primeiros a perceber as dificuldades que emergem nesse percurso, tendo a possibilidade de reelaborar suas práticas pedagógicas para responder às singularidades de seus alunos (Fraga, 2023).

Assim, a escola se configura como espaço de travessia, onde o direito à educação se concretiza na delicada articulação entre reconhecimento da diferença e práticas pedagógicas efetivas. Nesse cenário, Rangel e Rangel (2023) ressaltam a relevância de o professor assumir uma postura atenta e sensível, capaz de identificar os desafios específicos vivenciados pelas crianças com TEA e, a partir dessa escuta e compreensão, elaborar estratégias inclusivas que façam da sala de aula um território de diversidade, pertencimento e aprendizado compartilhado.

3. O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA CRIANÇAS TEA E AS POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DAS TDICs

As crianças com (TEA) percorrem caminhos que diferem das rotas convencionais da escolaridade. Nessa perspectiva, Vygotsky (1997) e Orrú (2016) nos lembram que a escola deve ser espaço de descobertas, onde métodos e práticas permitam que cada estudante com TEA se engaje de forma ativa, transformando o aprender em uma experiência social e significativa. O prisma dos estudos culturais nos convida a reconhecer que a deficiência não é barreira intrínseca, mas janela para modos alternativos de interação com o mundo, modos que convocam uma mediação pedagógica sensível e cuidadosa.

Criar ambientes de aprendizagem que celebrem a diversidade e acolham as necessidades singulares de cada aluno é, portanto, uma exigência ética e educativa. Esses espaços devem despertar o interesse pelo conhecimento, integrar os alunos ao processo educativo e permitir que experimentem o prazer do aprender, individual e coletivamente. Orrú (2016) enfatiza que práticas pedagógicas inovadoras, não excludentes, devem se centrar nas po-

tencialidades dos estudantes com TEA, revelando caminhos de imersão e descobertas que transcendam a mera transmissão de conteúdo.

Entre essas práticas inovadoras, o uso das TDICs emerge como alternativa promissora para a educação inclusiva, pois quando integradas de forma dinâmica e interativa, essas tecnologias permitem que o aluno participe ativamente da construção do conhecimento. Softwares educativos, jogos interativos e aplicativos de exploração matemática adaptados às necessidades de crianças com TEA ampliam horizontes e transformam a aprendizagem em um território de experiências. Entretanto, a simples aplicação da tecnologia não basta, pois imprescindível um planejamento que carregue uma intencionalidade pedagógica.

Souza e Gomes (2019) lembram que o uso de tecnologias digitais, quando mediado por práticas pedagógicas planejadas, promove inclusão e respeita a singularidade de cada estudante. A combinação de ferramentas digitais com estratégias adaptativas evita a exclusão escolar e fortalece o ensino de Matemática. Esse movimento evidencia uma mudança de paradigma: ambientes de aprendizagem inclusivos e adaptativos, que reconhecem e valorizam as especificidades dos alunos com TEA, enriquecem a experiência educativa de todos.

A abordagem pedagógica para o ensino de Matemática a estudantes autistas é sustentada por pesquisas brasileiras que exploram a inclusão em espaços de aprendizagem compartilhados. Em tempos nos quais a educação é reconhecida como direito universal, o ideal de ambientes inclusivos se impõe: todos os estudantes, independentemente de suas características, devem compartilhar o mesmo espaço educativo. Nesse contexto, pesquisas recentes destacam a eficácia da aprendizagem por interação e uso de recursos tecnológicos diversificados.

Vygotsky (1997) oferece perspectivas fundamentais para compreender a formação de conceitos na infância, distinguindo os conceitos espontâneos, adquiridos por meio da experiência cotidiana, dos conceitos científicos, construídos na instrução formal. Essa distinção é vital no ensino de Matemática para estudantes autistas, pois permite conceber uma Matemática informal, presente em brincadeiras e vivências diárias, e uma Matemática formal, desenvolvida no contexto escolar. A Matemática formal, essencial à construção de conceitos científicos, muitas vezes se mostra inacessível a alunos com TEA, exigindo práticas que promovam construções semióticas e ações mediadoras (Vygotsky, 1997).

Outro elemento essencial é a atenção compartilhada, habilidade frequentemente comprometida em crianças com TEA, mas decisiva para o desenvolvimento social e cognitivo. Lampreia (2007) descreve a atenção compartilhada como a coordenação entre pessoas e objetos, o compartilhamento de afetos e estados emocionais e a capacidade de atrair a atenção do outro. Intervenções que cultivem essa habilidade tornam-se fundamentais para superar barreiras de aprendizagem.

A incorporação de tecnologias digitais no ensino oferece oportunidades inéditas para potencializar o engajamento e a aprendizagem, especialmente em Matemática, disciplina marcada pela abstração e pelo simbolismo. Ambientes digitais adaptáveis proporcionam recursos visuais e interativos que transformam conceitos complexos em experiências concretas e significativas. Softwares educativos e aplicativos permitem que ideias matemáticas se materializem em representações visuais e interativas, favorecendo a compreensão e estimulando a autonomia do aprendiz.

Além disso, a interatividade dessas tecnologias garante participação ativa, oferecendo um espaço seguro para exploração de conceitos matemáticos, sem a pressão das interações sociais convencionais. Contudo, sua eficácia depende além de um planejamento cuidadoso e da formação docente, que deve integrar os recursos tecnológicos ao currículo,

enriquecendo e não apenas substituindo as práticas pedagógicas tradicionais.

Ferramentas digitais como *GeoGebra*, *Matific* e *DragonBox* mostram-se particularmente eficazes, combinando estímulos visuais, auditivos e interativos. Aplicativos como *Khan Academy Kids* e *ABCmouse* promovem experiências gamificadas, reforçando conceitos básicos de Matemática e raciocínio lógico. O uso dessas tecnologias deve ser cuidadosamente planejado, integrando atividades digitais e práticas concretas, respeitando o ritmo do aluno e promovendo reforço positivo. A combinação de visualizações, jogos interativos e feedback imediato torna-se elemento-chave para o sucesso da aprendizagem matemática de crianças com TEA, transformando o ensino em um espaço de descobertas, prazer e inclusão.

A tecnologia, nesse contexto, não é apenas ferramenta de apoio: é linguagem e instrumento cultural. Inserida no tecido da sociedade contemporânea, molda o pensamento e as práticas sociais, influenciando a forma como o conhecimento é construído e disseminado. Para estudantes com TEA, representa um meio vital de comunicação, interação e aprendizado, moldado às suas necessidades e modos singulares de compreensão.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo tematizou a utilização das TDICs para o ensino de Matemática a crianças com TEA. Ressaltamos que compreender o TEA vai muito além da mera categorização médica, configurando-se como uma prática ética, política e pedagógica que exige reconhecimento da diversidade e valorização das múltiplas formas de aprender, comunicar e existir.

O olhar para o autismo, quando ampliado pelos Estudos Culturais e pela perspectiva da pós-estruturalista, permite que se compreenda a criança com TEA não como um sujeito limitado, mas com modos singulares de interação com o mundo, capazes de produzir conhecimentos e experiências ricas e diversificadas. Nesse sentido, o ensino deve ser concebido como um espaço de descoberta, reflexão e mediação, em que a diferença se transforma em potencialidades a serem desenvolvidas.

A escola, enquanto espaço social de construção do conhecimento, deve assumir papel central nesse processo, atuando como palco de inclusão efetiva e vivência de pluralidade. Práticas pedagógicas inovadoras e adaptadas às necessidades específicas de cada estudante com TEA permitem não apenas a compreensão de conteúdos, como a Matemática, mas também a promoção de competências socioemocionais, de atenção compartilhada e de comunicação. O planejamento docente, sensível às singularidades, transforma a sala de aula em um território de pertencimento, onde cada criança pode explorar, experimentar e interagir com segurança, autonomia e prazer pelo aprender.

A integração das TDICs surge como um recurso estratégico capaz de potencializar o engajamento e a aprendizagem de estudantes com TEA. Softwares educativos, aplicativos interativos e ambientes digitais adaptáveis permitem que conceitos matemáticos abstratos se tornem experiências visuais e lúdicas, respeitando o ritmo, estilo de aprendizagem e necessidades sensoriais de cada aluno. No entanto, a eficácia dessas ferramentas depende da mediação docente qualificada, que saiba articular recursos tecnológicos com práticas pedagógicas inclusivas, garantindo que a tecnologia complemente e enriqueça, e não substitua, a experiência educativa.

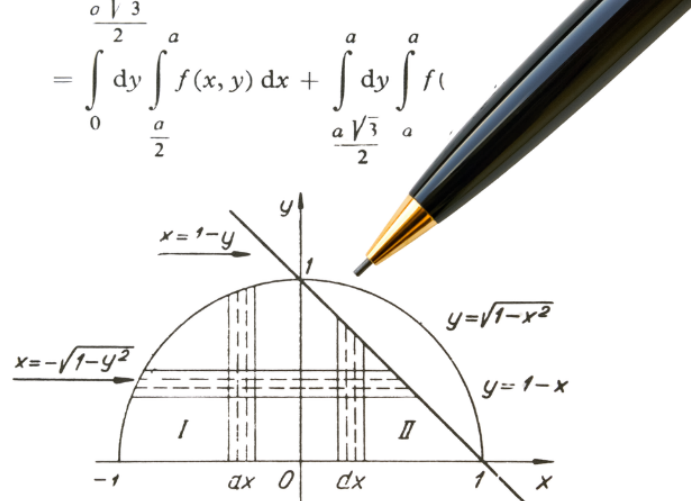
Por fim, evidencia-se que a formação continuada de professores é elemento fundamental para a construção de um ensino realmente inclusivo. A preparação docente com utilização de novas metodologias e uso intencional de tecnologias digitais favorece não



apenas o desempenho acadêmico, especialmente em Matemática, mas também a autonomia, autoconfiança e engajamento das crianças com TEA.

Referências

- BRASIL. Lei nº 12.764, de 27 de dezembro de 2012. Institui a Política Nacional de Proteção dos Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, 27 dez. 2012.
- BRASIL. Lei nº 13.652, de 11 de abril de 2018. Institui o Dia Nacional da Conscientização sobre o Autismo. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, 11 abr. 2018.
- BRASIL. Lei nº 13.977, de 8 de janeiro de 2020. Institui a Carteira de Identificação da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista (Ciptea). **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, 8 jan. 2020.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Censo da educação básica 2024**: resumo técnico [recurso eletrônico] – Brasília: Inep, 2024.
- DIAS, L. **Autismo**: uma leitura histórica e conceitual. São Paulo: Cortez, 2015.
- DUARTE, D. A. et al. Aspectos neuropsicológicos do autismo. **Revista Brasileira de Educação Especial**, v. 21, n. 3, p. 321-338, 2015.
- FOUCAULT, M. **A arqueologia do saber**. 7. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1996.
- FOUCAULT, M. **Microfísica do poder**. 13. ed. Rio de Janeiro: Graal, 1999.
- FRAGA, S. G. P. **Uma análise sobre o ensino da Matemática para alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA)**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Federal de Goiás, Goiânia, 2023. Disponível em: <http://repositorio.ifg.edu.br:8080/handle/prefix/1807>. Acesso em: 6 nov. 2024.
- GRANDIN, T. **O cérebro autista**: pensando através do espectro. Rio de Janeiro: Record, 2015.
- HALL, S. **A identidade cultural na pós-modernidade**. 11. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.
- KANNER, L. Autistic disturbances of affective contact. **Nervous Child**, v. 2, p. 217-250, 1943.
- LAMPREIA, C. Uma perspectiva desenvolvimentista para uma intervenção precoce no autismo. **Estudos de Psicologia** (Campinas) [online]. 2007, v. 1
- MACHADO, P. C. **Autismo e educação: possibilidades e desafios**. Porto Alegre: Mediação, 2014.
- MARFINATI, E.; ABRÃO, J. **Autismo: percursos históricos e desafios contemporâneos**. São Paulo: Loyola, 2014.
- MAZZOTA, Marcos. **Educação inclusiva**: fundamentos e práticas. São Paulo: Papyrus, 2011.
- MELLO, C. B. **Autismo: novas perspectivas diagnósticas e educacionais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- ORRÚ, S. E. A formação de professores e a educação de autistas. **Revista Iberoamericana de Educación**. V. 33. Edição 1. p. 1-14. 2003.
- ORRÚ, S. E. **Aprendizes com autismo**: aprendizagens por eixos de interesse em atualizada e ampliada - Petrópolis, RJ: Vozes, 2019.
- PREDIGER, I. I. **As estratégias metodológicas no ensino de Matemática para o aluno com o Transtorno do Espectro Autista (TEA) nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2023.
- RANGEL, E. M.; RANGEL, A. M. O lúdico no ensino de Matemática: the use of didactic games as a complementary method of the teaching-learning process. **Journal of Education Science and Health**, v. 3, n. 1, p. 1-9, 2023.
- SINGER, J. Why can't you be normal for once in your life? From a "problem with no name" to the emergence of a new category of difference. In: DAVIS, L. (Org.). **Disability Studies Reader**. New York: Routledge, 1999.
- SILBERMAN, S. **NeuroTribes**: The Legacy of Autism and the Future of Neurodiversity. New York: Avery, 2015.
- SILVA, R. Autismo: uma abordagem histórica. **Revista Educação e Sociedade**, v. 38, n. 2, 2017.
- SOUZA, M. M. M.; GOMES, S. A. O. Inclusão em educação especial para estudantes com deficiência intelectual na perspectiva do Desenho Universal para Aprendizagem. **Aleph**, p. 246-265, jul. 2019.
- VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.



17

ENSINO DE MATEMÁTICA NO LANÇAMENTO DE FOGUETE DE GARRAFA PET: EXPLORAÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA APLICADA

TEACHING MATHEMATICS IN THE LAUNCH OF A PET
BOTTLE ROCKET: EXPLORATION OF APPLIED QUADRATIC
FUNCTION

Giuliano Eduardo Batista Cutrim¹
Raimundo José Barbosa Brandão²
Raimundo Santos de Castro³
João Aranha Barros¹
Raimundo Cazuza da Silva Neto¹
Francisco das Chagas Soares¹
Jadiel Carlos Asevedo Silva¹

¹ Doutorando em Ensino, UEMA, São Luís - MA

² Doutor em Educação Matemática, UNIBAN, São Paulo - SP

³ Doutor em Educação, UFSCar, São Paulo - SP

RESUMO

O ensino da função quadrática no Ensino Médio representa um desafio para professores e estudantes, especialmente pela sua abordagem tradicional centrada na memorização de fórmulas e na resolução mecânica de exercícios. A modelagem matemática surge como objetivo para promover aprendizagem significativa, ao permitir a conexão entre teoria e prática. Este trabalho apresenta uma experiência pedagógica realizada com alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola C.E. Jerusa da Silva Rabelo, em Pindaré-Mirim (MA), utilizando o lançamento de foguetes de garrafa PET como recurso didático. A proposta envolveu oficinas de construção dos foguetes, lançamentos experimentais, coleta de dados e análise da trajetória parabólica, modelada a partir da função quadrática. A metodologia seguiu uma abordagem qualitativa, com foco na experimentação e no protagonismo estudantil. Foram aplicados conceitos de Matemática e Física, como a identificação do vértice da parábola, determinação das raízes e cálculo da altura máxima e do alcance dos foguetes. Softwares como Tracker e Scidavis foram utilizados para analisar os dados obtidos, favorecendo a transição entre linguagem algébrica, representação gráfica e interpretação física. Os resultados evidenciaram grande motivação e engajamento dos alunos, além da consolidação de conceitos abstratos por meio de experiências concretas. A pesquisa demonstrou que a modelagem matemática aplicada ao lançamento de foguetes artesanais contribui para tornar o ensino da função quadrática mais dinâmico, contextualizado e interdisciplinar. A proposta alia criatividade, sustentabilidade e ciência, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico, investigativo e colaborativo.

Palavras-chave: Função Quadrática, Modelagem Matemática, Foguete de Garrafa PET, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Teaching quadratic functions in high school represents a challenge for teachers and students, especially due to its traditional approach focused on memorizing formulas and mechanically solving problems. Mathematical modeling emerges as a way to promote meaningful learning by enabling a connection between theory and practice. This paper presents a pedagogical experiment conducted with first-year high school students at C.E. Jerusa da Silva Rabelo, in Pindaré-Mirim, Maranhão, using PET bottle rocket launches as a teaching resource. The proposal involved rocket construction workshops, experimental launches, data collection, and analysis of the parabolic trajectory, modeled based on the quadratic function. The methodology followed a qualitative approach, focusing on experimentation and student engagement. Mathematics and physics concepts were applied, such as identifying the vertex of the parabola, determining the roots, and calculating the maximum height and range of the rockets. Software such as Tracker and Scidavis were used to analyze the data, facilitating the transition between algebraic language, graphical representation, and physical interpretation. The results demonstrated high student motivation and engagement, as well as the consolidation of abstract concepts through concrete experiences. The research demonstrated that mathematical modeling applied to homemade rocket launches contributes to making the teaching of quadratic functions more dynamic, contextualized, and interdisciplinary. The approach combines creativity, sustainability, and science, encouraging the development of critical, investigative, and collaborative thinking.

Keywords: Quadratic Function, Mathematical Modeling, PET Bottle Rocket, Mathematics Teaching.

1. INTRODUÇÃO

O ensino da função quadrática no Ensino Médio constitui um ponto central do currículo de Matemática, porém sua abordagem tradicional, geralmente restrita à aplicação de fórmulas e resolução de exercícios, tem se mostrado limitada para promover uma aprendizagem efetiva e significativa. Muitos estudantes enfrentam dificuldades em compreender o comportamento gráfico e algébrico dessa função, o que compromete o desenvolvimento do raciocínio matemático e a conexão entre o conteúdo e situações reais do cotidiano. Nesse cenário, torna-se necessário repensar as práticas pedagógicas, valorizando metodologias que aproximem a teoria da realidade vivenciada pelos alunos.

A modelagem matemática, ao propor a transformação de fenômenos concretos em problemas matemáticos, surge como alternativa metodológica capaz de contextualizar o ensino e estimular a interdisciplinaridade. O lançamento de foguetes artesanais confeccionados com garrafas PET, por exemplo, representa uma atividade que possibilita a visualização prática da trajetória parabólica, permitindo relacionar conceitos da Matemática e da Física. Ao vivenciar a construção, o lançamento e a análise do movimento desses foguetes, os estudantes podem compreender de forma mais clara elementos como raízes, vértice, concavidade e domínio da função quadrática, atribuindo significado ao aprendizado.

Dessa forma, a presente pesquisa investiga a utilização da modelagem matemática aplicada ao lançamento de foguetes de garrafa PET como recurso didático para o ensino da função quadrática. A proposta busca não apenas fortalecer a compreensão conceitual, mas também despertar a motivação, promover o protagonismo estudantil e estimular competências investigativas e críticas, transformando a sala de aula em um espaço de experimentação e descoberta.

2. O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO MÉDIO

O ensino da função quadrática, enquanto componente essencial do currículo de matemática do ensino médio, exige uma abordagem metodológica que vá além da mera memorização de fórmulas e procedimentos algébricos. A aprendizagem significativa deste conteúdo requer a construção de pontes entre o saber científico e as experiências do cotidiano dos alunos, o que pode ser potencializado por metodologias como a modelagem matemática. Esta, por sua vez, permite a contextualização dos conceitos e favorece a interdisciplinaridade, especialmente entre a matemática e a física.

A função quadrática, definida como $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, como a geometria, a economia e a física, em especial no estudo de movimentos oblíquos e na descrição de trajetórias parabólicas. No contexto escolar, sua abordagem muitas vezes se restringe à aplicação de fórmulas e resolução de equações, o que dificulta a compreensão dos significados e limita o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Como destaca Lima (2013), é necessário apresentar a função quadrática em suas diversas representações algébrica, gráfica e contextual — permitindo que o estudante compreenda seus elementos constituintes, tais como raízes, vértice, concavidade e domínio.

Além disso, o uso da forma canônica da função quadrática, dada por $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, facilita a identificação dos pontos notáveis da parábola, como o vértice (x_v, y_v) , cuja localização é essencial para a análise do comportamento da função. Essa forma, conforme



Lima (2016), também permite uma transição mais fluida entre a linguagem algébrica e a representação gráfica, contribuindo para a construção do pensamento funcional nos estudantes.

Nesse sentido, a modelagem matemática surge como uma metodologia didática eficaz para aproximar o conteúdo matemático da realidade vivida pelos alunos. Segundo Bassanezi (2012), modelar é transformar situações reais em problemas matemáticos, cuja solução, por sua vez, retorna à realidade como uma ferramenta de interpretação e tomada de decisão. A modelagem, portanto, promove uma aprendizagem ativa, investigativa e significativa, ao mesmo tempo em que desenvolve a capacidade crítica e criativa dos estudantes.

De acordo com Burak (1992), a modelagem está presente desde os primórdios da humanidade, quando o homem, na tentativa de compreender os fenômenos da natureza, criou representações simbólicas para expressar relações entre grandezas observadas. No ambiente escolar, a modelagem matemática permite ao aluno vivenciar situações-problema que demandam a mobilização de diferentes saberes e habilidades, promovendo uma postura investigativa e autônoma.

Lorenzato (2010) contribui com essa visão ao afirmar que ensinar é diferente de apenas dar aulas. Ensinar envolve criar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento, o que exige planejamento, estudo e metodologias adequadas por parte do professor. A experimentação, neste contexto, desempenha papel central, pois segundo o autor, “se escuto, esqueço; se vejo, lembro; mas se faço, aprendo”. A prática experimental, como a construção e o lançamento de foguetes de garrafa PET, permite que o aluno não apenas visualize a parábola, mas vivencie-a, medindo alcances, identificando alturas máximas e aplicando conceitos de função quadrática de forma concreta.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também reconhece a importância do estudo de funções para o desenvolvimento cognitivo e para a formação cidadã dos estudantes. O documento destaca que o ensino de funções deve priorizar a compreensão das relações de variação entre grandezas, incentivando a leitura, interpretação e construção de gráficos, bem como o uso de tecnologias digitais e de abordagens interdisciplinares (BRASIL, 2015).

Além disso, Kilpatrick *et al.* (1998) e Skovsmose (2001) destacam a importância de considerar os contextos sociais e culturais dos alunos ao planejar o ensino de matemática. A aprendizagem ocorre em ambientes complexos, nos quais o estudante é influenciado por múltiplas dimensões. Assim, ao utilizar uma atividade como o lançamento de foguetes de garrafa PET, o professor estabelece conexões entre o conteúdo matemático e as vivências concretas dos discentes, favorecendo a motivação e o engajamento.

Em síntese, a função quadrática, quando trabalhada por meio da modelagem matemática, adquire um sentido prático e significativo. A interdisciplinaridade com a física, a experimentação concreta e o uso de tecnologias educacionais fortalecem o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais atrativo e eficiente. Essa perspectiva rompe com a abordagem tradicional e valoriza o protagonismo estudantil, criando condições para uma formação matemática mais crítica, reflexiva e contextualizada.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO: CAMINHOS PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A modelagem matemática vem ganhando crescente espaço como metodologia de

ensino capaz de tornar o aprendizado da matemática mais significativo, contextualizado e relevante para os estudantes. Essa proposta pedagógica rompe com o ensino tradicional, centrado na memorização de fórmulas e na resolução repetitiva de exercícios descontextualizados, e propõe uma abordagem que parte de problemas do cotidiano para a construção e compreensão dos conceitos matemáticos. No ensino da função quadrática, por exemplo, a modelagem se mostra particularmente eficaz, uma vez que permite ao aluno visualizar fenômenos concretos como a trajetória de um projétil e compreendê-los por meio da matemática.

De acordo com Bassanezi (2012), modelar é “traduzir situações do mundo real em linguagem matemática e, posteriormente, interpretar os resultados obtidos dentro do contexto original”. Esse processo, denominado ciclo da modelagem matemática, envolve as seguintes etapas: (1) observação de um fenômeno ou situação-problema; (2) formulação de hipóteses e simplificações; (3) construção de um modelo matemático; (4) resolução do modelo; (5) validação dos resultados; e (6) reformulação ou generalização. Ao conduzir os alunos por esse percurso, o professor transforma a matemática em uma ferramenta de compreensão da realidade, e não apenas em um conjunto abstrato de símbolos e regras.

Para Burak (1992), a modelagem matemática não é algo novo. Desde os tempos pré-históricos, o ser humano tenta compreender os fenômenos naturais por meio da criação de modelos que representem a realidade. Com o tempo, esses modelos passaram a utilizar a linguagem matemática para expressar relações, fazer previsões e tomar decisões. No contexto escolar, essa prática possibilita aos alunos atuarem como investigadores e construtores de conhecimento, aproximando a matemática da vida cotidiana.

Lorenzato (2010) reforça que ensinar não é apenas “dar aula”, mas criar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento. Para isso, é essencial adotar metodologias que estimulem a autonomia, a reflexão e a experimentação. A modelagem matemática atende a essas exigências ao propor problemas reais e desafiadores, exigindo que o estudante desenvolva estratégias, formule hipóteses, valide seus raciocínios e interprete resultados.

No caso específico da experiência com foguetes de garrafa PET, relatada por Cutrim (2019), a modelagem matemática foi utilizada para descrever a trajetória parabólica de um objeto lançado obliquamente, relacionando os conceitos de função quadrática com conhecimentos de física, como velocidade, ângulo de lançamento e aceleração da gravidade. A atividade envolveu os alunos em todas as etapas do ciclo da modelagem: construção do foguete, lançamento, coleta de dados, uso de softwares como Tracker e Scidavis para análise da trajetória e, por fim, a elaboração da função que descrevia o movimento do projétil. Esse processo promoveu uma aprendizagem ativa, significativa e interdisciplinar.

Outro aspecto relevante da modelagem é sua capacidade de integrar os três pilares do ensino de matemática propostos por Lima (1999): conceituação, manipulação e aplicação. A conceituação ocorre quando o professor apresenta os fundamentos teóricos do conteúdo, como a definição e propriedades da função quadrática. A manipulação se dá nas atividades de fixação e treino das habilidades matemáticas. Já a aplicação é vivenciada plenamente na modelagem, quando o estudante utiliza os conceitos aprendidos para resolver problemas reais, como o cálculo do alcance e da altura máxima de um foguete.

Além disso, como aponta Silva (2018), a modelagem estimula o desenvolvimento de habilidades essenciais para o século XXI, como pensamento crítico, criatividade, resolução de problemas e trabalho colaborativo. Ao serem desafiados a construir, lançar e analisar o movimento de foguetes, os alunos não apenas aplicaram conteúdos matemáticos, mas também desenvolveram competências socioemocionais e científicas.



Contudo, para que a modelagem seja bem-sucedida no ambiente escolar, é necessário que o professor assuma uma postura de mediador e pesquisador de sua própria prática. Isso exige planejamento, domínio do conteúdo e abertura à experimentação. Como alerta Lorenzato (2010, p. 3): “considerando que ninguém consegue ensinar o que não sabe, decorre que ninguém aprende com aquele que dá aulas sobre o que não conhece”. Assim, a formação continuada dos docentes é condição indispensável para a implementação eficaz da modelagem no ensino de matemática.

Outro ponto importante é o papel da interdisciplinaridade. A modelagem permite articular diferentes áreas do conhecimento, como física, geografia, biologia e até história, ampliando o escopo do aprendizado e demonstrando a relevância da matemática em múltiplos contextos. No exemplo dos foguetes, o professor pode discutir desde os princípios da balística e da aerodinâmica até a história da corrida espacial, promovendo um ensino integrado e contextualizado.

Por fim, cabe ressaltar que a modelagem matemática também contribui para a valorização da cultura estudantil e dos saberes locais. Quando o professor parte de situações próximas da realidade dos alunos como atividades práticas com materiais recicláveis, ele reconhece e valida seus conhecimentos prévios, promovendo um processo de ensino-aprendizagem mais justo, inclusivo e significativo.

Em suma, a modelagem matemática representa uma alternativa metodológica potente para o ensino da matemática, especialmente em conteúdos que tradicionalmente apresentam altos índices de dificuldade e rejeição, como as funções. Ao articular teoria e prática, contexto e abstração, a modelagem transforma a sala de aula em um espaço de investigação e descoberta, no qual os alunos não apenas aprendem matemática, mas aprendem a pensar matematicamente. Para isso, é preciso que o professor esteja disposto a inovar, a experimentar e a se reinventar continuamente como educador.

4. PROJETO DE LANÇAMENTO DE FOGUETES COM GARRAFA PET NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O projeto de lançamento de foguetes com garrafas PET surge como uma proposta pedagógica inovadora que visa a integração entre teoria matemática e prática experimental. Desenvolvido com alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola C.E. Jerusa da Silva Rabelo, no município de Pindaré-Mirim (MA), o estudo busca facilitar a compreensão da função quadrática por meio da modelagem matemática de um experimento físico real: o lançamento de foguetes artesanais.

Segundo Cutrim (2019), “observou-se a grande motivação e envolvimento dos alunos no lançamento dos foguetes por eles construídos e ainda que a compreensão do conceito de função quadrática teve significado no seu cotidiano” (p. 13). O projeto também promove interdisciplinaridade entre Matemática e Física, e propicia aos estudantes o contato com noções fundamentais de geometria, cinemática e raciocínio lógico.

A pesquisa teve abordagem qualitativa, com foco interpretativo e intervenção pedagógica. Foram realizadas sete aulas de 100 minutos, com dinâmicas de grupo, oficinas, construção dos foguetes, lançamentos e atividades de análise matemática. A sequência didática foi composta por três etapas principais: (1) discussão teórica e oficina de construção; (2) lançamento e coleta de dados; (3) elaboração de relatórios e resolução de problemas.

O autor destaca que “a modelagem matemática que descreve a trajetória realizada

por um foguete construído a partir de garrafa PET facilita a aprendizagem de função quadrática” (Cutrim, 2019, p. 12). Durante o processo, utilizaram-se softwares como *Tracker* e *Scidavis* para analisar as trajetórias descritas pelos foguetes, transformando os dados empíricos em modelos matemáticos interpretáveis.

5. ASPECTOS MATEMÁTICOS E EXPERIMENTAIS

A trajetória descrita por um foguete lançado obliquamente pode ser representada por uma parábola, cujo modelo algébrico é uma função do segundo grau do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$. O ponto de altura máxima representa o vértice da parábola, e os pontos de decolagem e de aterrissagem correspondem às raízes da função. O professor utilizou ainda a forma canônica da função quadrática:

$$f(x)=a(x-x_v)^2+y_v \quad (1)$$

onde x_v é o ponto de máximo ou mínimo e y_v sua ordenada, facilitando o esboço gráfico e a interpretação física do experimento (LIMA, 2016).

Durante os lançamentos, os alunos calcularam o alcance, a altura máxima e deduziram a equação da parábola que descreve o movimento. A equipe com maior alcance horizontal foi considerada vencedora da competição. O uso da experimentação aproximou os alunos da ciência e promoveu o raciocínio crítico e matemático: “é fazendo que se aprende” (LORENZATO, 2010, p. 72).

A construção de foguetes utilizando garrafas PET é uma prática pedagógica eficaz para integrar conceitos de Física e Matemática no ensino médio. O modelo apresentado nas imagens demonstra um foguete feito com materiais simples, como balão, plástico para estabilizadores e uma garrafa PET, servindo como propulsor e estrutura.

Inicialmente, o balão é inflado e inserido no bocal da garrafa PET cortada. Ao ser liberado, o ar contido no balão é expelido rapidamente, produzindo uma força de reação que impulsiona o foguete para frente, de acordo com a Terceira Lei de Newton, que afirma: “Para toda ação, há sempre uma reação de igual intensidade e em sentido oposto” (NEWTON, 1687).

Durante o voo, o foguete descreve uma trajetória parabólica típica do movimento sob a influência da gravidade. Essa trajetória pode ser modelada por uma função quadrática do tipo:

O estudo das funções é muito vasto e sua aplicabilidade é muito importante em nosso cotidiano, por isso é de extrema importância aproximar o conteúdo apresentado em sala de aula e no cotidiano dos alunos, tornando o estudo mais dinâmico e interessante. Por isso modelou-se esse estudo através do lançamento dos foguetes.

6. METODOLOGIA

Neste contexto de aplicação deste trabalho, foram ministradas aulas com alunos do 1º ano da escola CE Jerusa da Silva Rabelo, localizado no Bairro Pitombeira na cidade de Pindaré-Mirim, MA, como trabalho final de uma dissertação, que seguiu como protótipos de trabalho, tendo como objetivo proporcionar aquisição de mais conhecimento de função quadrática e orientação para a construção dos foguetes feitos de garrafas PET.

As aulas referentes ao conteúdo de função polinomial de 2º grau e os princípios de

construção e lançamento de foguetes. Durante o semestre letivo foram trabalhados conceito, construção de gráficos e resolução de problemas envolvendo função quadrática abordando sobre lançamento de foguetes e dos materiais necessários para construção de foguete com garrafas PET. Seguindo a sequência dos conteúdos programáticos realizou-se uma oficina de construção de foguetes. Para a construção dos foguetes foi necessário os seguintes materiais, figura 1:

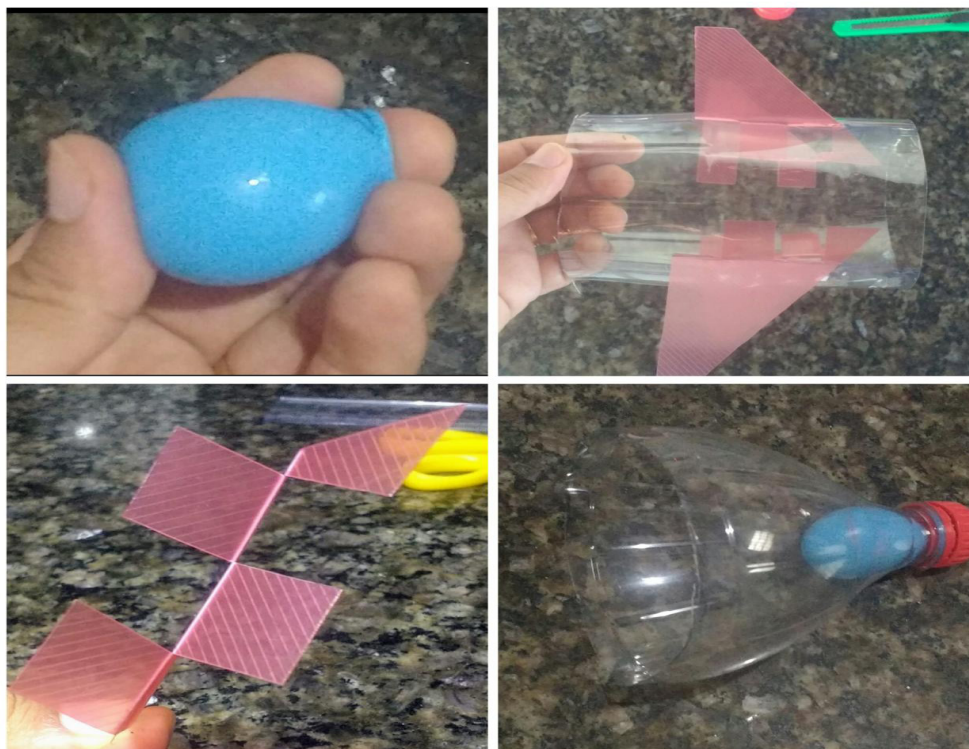


Figura 1. Materiais usados para construção dos foguetes

Fonte: Autores (2025)

6.1. Balão azul

O balão azul com areia funciona como lastro do foguete de garrafa PET. Ele é colocado na parte frontal (nariz) do foguete para dar peso e estabilidade durante o voo. Sem esse peso adicional, o foguete ficaria muito leve na ponta e tenderia a girar ou perder a trajetória.

6.2. As garrafas pet recicláveis

Servem como matéria-prima acessível e sustentável para a construção do foguete caseiro. Elas desempenham múltiplas funções: atuam como o corpo principal do foguete, proporcionando a estrutura onde são fixadas as aletas e o bico; funcionam como câmara de pressão quando o foguete é lançado com água e ar comprimido; além de contribuir para a educação ambiental, ao incentivar o reaproveitamento de materiais que seriam descartados no lixo.

6.3. O plástico rígido ou a cartolina plastificada rosa

É utilizado para confeccionar as asas e aletas do foguete. Essas partes funcionam como superfícies de estabilização, ajudando a manter o foguete em linha reta durante o voo. Sem elas, o foguete poderia girar de forma descontrolada, perder direção ou até cair antes de atingir uma boa altura/distância.

6.4. O canudo ou haste plástica

Serve como suporte estrutural para as aletas do foguete. Ele garante que as aletas fiquem bem alinhadas e firmes em torno do corpo do foguete, distribuídas de maneira simétrica. Essa fixação correta é fundamental para que as aletas cumpram sua função de estabilizar o voo, reduzindo rotações indesejadas e mantendo a trajetória retilínea.

Na construção do foguete de garrafa PET, diversos materiais recicláveis e de baixo custo foram utilizados de forma criativa e pedagógica. O corpo principal foi confeccionado com garrafas PET recicláveis, que além de estruturar o foguete, contribuem para a conscientização ambiental. Para a ponta, utilizou-se um balão preenchido com areia, que funciona como lastro, deslocando o centro de massa para a parte frontal e garantindo maior estabilidade no voo. As asas e aletas, feitas de plástico rígido ou cartolina plastificada, tiveram a função de direcionar e estabilizar aerodinamicamente o foguete, sendo fixadas com o auxílio de um canudo ou haste plástica, que assegurou o alinhamento simétrico das peças.

Além desses materiais estruturais, foi indispensável o uso de tesoura ou estilete, que permitiram realizar os cortes necessários nas garrafas PET e no material das aletas, garantindo medidas adequadas e precisão na montagem. Do mesmo modo, a utilização de cola e fita adesiva foi fundamental para unir e reforçar as partes do foguete, proporcionando firmeza à estrutura e resistência durante o lançamento.

Assim, o conjunto de materiais e ferramentas possibilitou a elaboração de um protótipo funcional, que alia práticas de sustentabilidade, baixo custo e aplicabilidade no ensino de Física, favorecendo a aprendizagem significativa por meio da experimentação.

O dispositivo apresentado na imagem 2 trata-se de um lançador de foguetes artesanais construído com tubos e conexões de PVC, adaptado para práticas experimentais no ensino de Física. Sua estrutura é composta por uma base estável, formada por conexões em “T” e cotovelos, que sustentam o sistema de acoplamento destinado à fixação da garrafa PET. Esse mecanismo é complementado por um fio condutor, utilizado como gatilho de disparo a distância, garantindo segurança ao usuário durante o lançamento. O baixo custo dos materiais e a facilidade de montagem fazem desse protótipo um recurso acessível e versátil para o ambiente escolar.

Do ponto de vista pedagógico, o funcionamento baseia-se na pressurização da garrafa com ar, acumulando energia potencial que, ao ser liberada, converte-se em energia cinética e promove o movimento do foguete. Esse processo possibilita a exploração de conceitos centrais da Física, como a Terceira Lei de Newton, o estudo da pressão e dinâmica dos fluidos, além da análise do movimento parabólico descrito durante o voo. A atividade experimental proporciona ao estudante contato direto com fenômenos físicos normalmente abordados apenas de forma abstrata nos livros didáticos.

Assim, a utilização de um lançador artesanal de foguetes de garrafa PET representa uma estratégia didática eficaz para aproximar teoria e prática no ensino de Ciências. Além

de favorecer a aprendizagem significativa, estimula a motivação dos alunos e promove a interdisciplinaridade, envolvendo também conteúdos de Matemática e Química. Ao unir criatividade, sustentabilidade e ciência, esse recurso contribui para a construção do conhecimento científico de forma crítica e investigativa, fortalecendo o papel da experimentação no processo educativo.



Figura 2. Lançador de Foguetes construído de canos PVC

Fonte: Autor (2025).

O objeto representado na figura 3, corresponde a um foguete artesanal confeccionado a partir de uma garrafa PET reciclada, adaptada com aletas laterais de material plástico rígido e um bico de balão acoplado à tampa. Esse tipo de construção caracteriza-se por ser um recurso de baixo custo e fácil execução, frequentemente empregado em atividades experimentais de Física e Astronomia, visando despertar o interesse dos estudantes para os fenômenos relacionados ao movimento, à pressão dos gases e às leis de Newton.

A estrutura do foguete evidencia princípios fundamentais da aerodinâmica. As aletas fixadas na parte traseira funcionam como estabilizadores durante o voo, reduzindo oscilações e garantindo uma trajetória mais retilínea. O balão na extremidade dianteira pode ser utilizado como reservatório de ar ou como reforço de vedação, contribuindo para a eficiência da pressurização interna da garrafa. Essa configuração, embora simples, é suficiente para simular o funcionamento de foguetes reais em escala reduzida, permitindo a observação prática de conceitos científicos abstratos.

Do ponto de vista didático, a utilização do foguete de garrafa PET possibilita a aplicação de metodologias ativas no ensino de Ciências, promovendo a aprendizagem significativa por meio da experimentação. Os alunos podem relacionar a construção e o lançamento do foguete com conteúdo como energia potencial e cinética, terceira lei de Newton, conservação da quantidade de movimento e movimento parabólico. Além disso, a prática contribui para a conscientização ambiental, ao incentivar a reutilização de materiais plásticos descartáveis em experimentos científicos.



Figura 3. Foguete artesanal construído com garrafas Pet

Fonte: Autor (2025).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

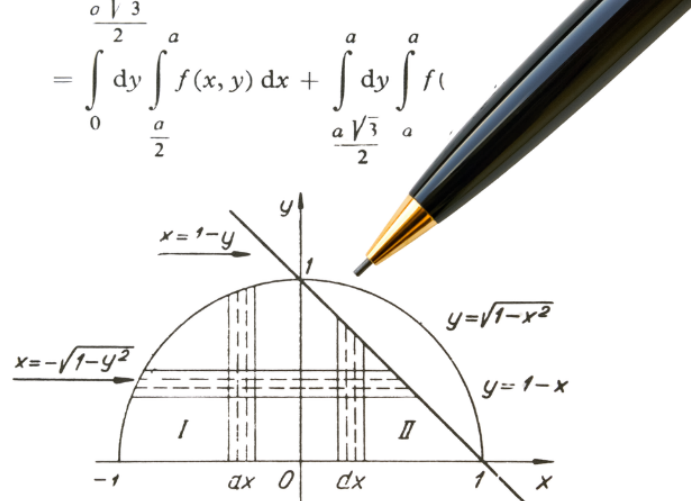
O projeto contribuiu para tornar o ensino da Matemática mais significativo e atrativo. A utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino revelou-se eficaz na aprendizagem de conteúdos abstratos, como a função quadrática, pois parte do concreto para o simbólico e envolve o aluno em todas as etapas da construção do conhecimento.

Segundo Bassanezi (2012), “a modelagem matemática permite fazer provisões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em modificações” (apud CUTRIM, 2019, p. 14). A proposta pedagógica apresentada por Cutrim alia ensino de qualidade com atividades práticas e demonstra que é possível transformar o ambiente escolar em um espaço de descobertas e motivação.

Referências

- CUTRIM, Giuliano Eduardo Batista. **Função quadrática na modelagem matemática no lançamento de foguete de garrafa PET com alunos do 1º ano do Ensino Médio**. 2019. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2019.
- LIMA, Elon Lages. **Temas e Métodos em Matemática**. IMPA, 2016.
- LORENZATO, Sérgio. **O ensino e a aprendizagem de matemática: fundamentos e metodologias**. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.
- MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 8. ed. São Paulo: Hucitec, 2001.
- BASSANEZI, Rodrigo. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2012.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Volume 2. São Paulo: Ática, 2012.
- IEZZI, Gelson et al. **Matemática: volume único**. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2008.
- ALFONSI, Luiz Márcio. **Funções do 2º grau: teoria e aplicações**. São Paulo: FTD, 2011.





18

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: INVESTIGANDO SABERES, EXPERIÊNCIAS E DESAFIOS EM UMA ESCOLA RURAL QUILOMBOLA

TEACHER EDUCATION AND PEDAGOGICAL PRACTICES IN MATHEMATICS TEACHING: INVESTIGATING KNOWLEDGE, EXPERIENCES AND CHALLENGES IN A RURAL QUILOMBOLA SCHOOL

João Aranha Barros¹

Elvys Wagner Ferreira da Silva¹

Raimundo Santos de Castro²

Waléria de Jesus Barbosa Soares³

Jarlisse Nina Beserra da Silva⁴

Raimundo Cazuzza da Silva Neto¹

Jadiel Carlos Asevedo Silva¹

Giuliano Eduardo Batista Cutrim¹

Lindalva do Remedio Oliveira Cerqueira⁴

George Ramos da Silva Junior⁵

1 Doutorando em Ensino, São Luís - MA

2 Doutor em Educação, UFSCar, São Paulo - SP

3 Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UEMA, São Luís - MA

4 Doutoranda em Ensino, UEMA, São Luís - MA

5 Mestre em Ensino de Física, UNIVASF, Juazeiro - BA

RESUMO

A formação de professores e as práticas pedagógicas no ensino de Matemática constituem dimensões indissociáveis para a promoção de aprendizagens significativas, sobretudo em contextos marcados pela diversidade cultural, como as escolas quilombolas. Este artigo discute os saberes, experiências e desafios enfrentados por docentes em uma escola rural quilombola localizada no município de Cururupu/MA, com ênfase na relação entre formação docente e práticas pedagógicas. A investigação ancora-se em referenciais da Educação Matemática e da Etnomatemática, destacando autores como Freire, Tardif, D'Ambrosio, Zeichner, Darling-Hammond e Ponte, que compreendem a docência como um processo de constante reflexão crítica, em diálogo com as realidades culturais e sociais dos sujeitos. O estudo, de natureza qualitativa e abordagem de estudo de caso, envolve levantamento bibliográfico, análise documental, entrevistas semiestruturadas e observações participantes. Os resultados esperados incluem a identificação de lacunas na formação docente, o reconhecimento das práticas já existentes e a proposição de estratégias pedagógicas que dialoguem com os saberes comunitários. Pretende-se contribuir para o debate acadêmico e político sobre a formação docente e o ensino de Matemática em contextos historicamente marginalizados, reafirmando a importância da valorização das identidades quilombolas e do fortalecimento de uma educação matemática antirracista e emancipatória.

Palavras-chave: Formação de professores, Práticas pedagógicas, Ensino de Matemática, Etnomatemática.

ABSTRACT

Teacher education and pedagogical practices in Mathematics teaching are inseparable dimensions for promoting meaningful learning, especially in culturally diverse contexts such as quilombola schools. This article discusses the knowledge, experiences, and challenges faced by teachers in a rural quilombola school located in the municipality of Cururupu/MA, with emphasis on the relationship between teacher education and pedagogical practices. The investigation is grounded in the frameworks of Mathematics Education and Ethnomathematics, highlighting authors such as Freire, Tardif, D'Ambrosio, Zeichner, Darling-Hammond, and Ponte, who understand teaching as a process of continuous critical reflection in dialogue with the cultural and social realities of the subjects. The study, qualitative in nature and designed as a case study, involves literature review, document analysis, semi-structured interviews, and participant observation. Expected results include the identification of gaps in teacher training, recognition of existing practices, and the proposal of pedagogical strategies that engage with community knowledge. The aim is to contribute to academic and political debate on teacher education and Mathematics teaching in historically marginalized contexts, reaffirming the importance of valuing quilombola identities and strengthening an anti-racist and emancipatory Mathematics education.

Keywords: Teacher education, Pedagogical practices, Mathematics teaching, Ethnomathematics.



1. INTRODUÇÃO

A discussão sobre formação de professores e práticas pedagógicas no ensino de Matemática ocupa um espaço central no debate educacional brasileiro. No caso das escolas quilombolas, esse debate ganha contornos ainda mais desafiadores, pois envolve não apenas questões didáticas e metodológicas, mas também a afirmação de identidades culturais e o enfrentamento das desigualdades raciais e sociais que historicamente marginalizaram essas comunidades.

O interesse em investigar a temática formação docente e o ensino de Matemática em contexto quilombola está alicerçada em uma dupla motivação: científica e social. Do ponto de vista científico, a literatura sobre Educação Matemática ainda carece de estudos que articulem os saberes docentes com os contextos de diversidade cultural. À luz desse contexto, a Etnomatemática, enquanto campo de investigação inaugurado por Ubiratan D'Ambrosio (2009), já apontava para a necessidade de reconhecer a pluralidade dos saberes matemáticos, mas tal perspectiva ainda não encontrou ampla ressonância nas práticas pedagógicas cotidianas das escolas.

Do ponto de vista social, as comunidades quilombolas enfrentam condições históricas de exclusão, que se refletem nos indicadores educacionais. Pesquisas apontam que estudantes quilombolas apresentam menores índices de rendimento em Matemática, resultado que não pode ser interpretado como incapacidade cognitiva, mas como consequência de um ensino que frequentemente ignora sua cultura, suas práticas e sua identidade (Santos; Silva, 2016).

Diante das questões pertinentes as práticas docentes vinculadas ao contexto do ensino de Matemática, Freire (1996) lembra que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a produção e construção do saber. Quando essa reflexão é transportada para o ensino de Matemática em escolas quilombolas, observa-se a urgência de práticas que transcendam a abordagem tradicional, marcada pela memorização e pelo distanciamento da realidade dos alunos. Ao contrário, o desafio é tornar o ensino de Matemática significativo, estabelecendo vínculos entre os conteúdos formais e os saberes construídos na comunidade.

Tardif (2001) afirma que os saberes docentes não se reduzem ao conhecimento teórico adquirido na universidade, mas são tecidos nas interações entre formação, prática e experiência. Afirma ainda que a prática pedagógica contempla diferentes saberes, uma vez que o saber é plural, oriundo da formação profissional, dos saberes disciplinares, curriculares e experienciais. Essa perspectiva é fundamental para pensar o professor quilombola ou aquele que atua em escolas quilombolas, pois sua prática é atravessada por múltiplas dimensões: o currículo oficial, a realidade sociocultural dos alunos e a formação que recebeu, muitas vezes pouco sensível à diversidade cultural.

Em face do exposto, investigar os saberes, experiências e desafios dos professores de Matemática em escolas quilombolas não é apenas um exercício acadêmico, mas também um compromisso político e ético com a construção de uma educação que respeite e valorize a diversidade.

Nesse sentido, este artigo busca analisar como a formação inicial e continuada de professores influencia as práticas pedagógicas no ensino de Matemática em uma escola quilombola de Cururupu/MA. Mais do que compreender as dificuldades, o estudo pretende evidenciar as possibilidades de uma prática pedagógica que se constitua como espaço de

diálogo, de valorização da cultura local e de promoção de aprendizagens emancipatórias.

2. ALGUNS ASPECTOS ACERCA DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A formação de professores e suas práticas pedagógicas têm sido objeto de debate entre diversos estudiosos. Freire (1996) defende que a prática educativa deve ser orientada pela ética, pelo diálogo e pela criticidade, elementos que se mostram imprescindíveis quando se trata do ensino em comunidades quilombolas.

Tardif (2001) entende os saberes docentes como um mosaico constituído de saberes acadêmicos, experienciais e curriculares, sobretudo, dos saberes advindos da formação profissional. Essa concepção amplia a compreensão sobre a prática docente, pois reconhece que o professor constrói seu fazer pedagógico em constante articulação com o contexto em que atua.

No campo da Educação Matemática, Ponte (2012) argumenta que a prática pedagógica do professor deve buscar a compreensão profunda dos conteúdos matemáticos e, simultaneamente, criar oportunidades de aprendizagem contextualizadas, que façam sentido para os alunos. Isso se torna ainda mais relevante em ambientes onde a Matemática da vida cotidiana dialoga com práticas culturais específicas, como ocorre nas comunidades quilombolas.

A Etnomatemática, conforme D'Ambrosio (2009), aponta que toda cultura desenvolve formas próprias de raciocínio e de resolução de problemas, que também constituem saberes matemáticos. Ao reconhecer essas práticas, o professor pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, aproximando o conhecimento escolar da realidade vivida pelos estudantes.

2.1 Formação docente e saberes profissionais

A formação de professores tem sido amplamente discutida no campo educacional como um processo que não se limita à aquisição de conteúdos acadêmicos, mas que envolve dimensões éticas, sociais e culturais. Para Freire (1996), educar é um ato político e ético, no qual o professor assume a tarefa de promover uma prática pedagógica crítica, libertadora e comprometida com a transformação da realidade. Esse entendimento coloca a formação docente como um espaço de construção permanente, no qual a prática se torna o locus da reflexão e da reinvenção.

Tardif (2001) amplia essa concepção ao propor que os saberes docentes constituem um “mosaico” composto por diferentes fontes: os saberes da formação inicial, os saberes curriculares e os saberes experienciais, estes últimos forjados no cotidiano da escola e na interação com os alunos. Em contextos de diversidade cultural, como as escolas quilombolas, esse mosaico torna-se ainda mais complexo, exigindo do professor uma capacidade de articular os conhecimentos teóricos com as práticas locais e os saberes da comunidade.

Autores como Zeichner (2010) e Darling-Hammond (2017) ressaltam a necessidade de que a formação docente seja contínua e situada, de modo a articular teoria e prática em um movimento dialógico. Essa perspectiva rompe com a visão fragmentada e tecnicista da docência, propondo um modelo reflexivo no qual o professor se reconhece como pesquisador da própria prática. No ensino de Matemática, esse aspecto é central, pois a dificuldade de conectar o conhecimento científico com a realidade dos estudantes frequentemente resulta em aprendizagens pouco significativas.



Nessa direção, Shulman (1986) faz algumas reflexões a respeito do tema, ampliando as discussões para uma base de conhecimentos, compreensões, habilidades e disposições indispensáveis à atuação docente em qualquer situação de ensino, tendo como direcionamento atingir os objetivos à aprendizagem e, bem como a formação do aluno.

Assim, pensar a formação docente para o ensino de Matemática em comunidades quilombolas implica reconhecer que a docência é construída a partir de múltiplos saberes, mas que precisa ser fortalecida por políticas públicas de formação inicial e continuada que valorizem a diversidade cultural e enfrentem as desigualdades históricas.

2.2 Educação Matemática, Etnomatemática e práticas pedagógicas em contexto quilombola

No campo específico da Educação Matemática, há um consenso de que o ensino deve ir além da transmissão de algoritmos e fórmulas, buscando promover aprendizagens contextualizadas e críticas. Ponte (2012) defende que ensinar Matemática é criar oportunidades para que os alunos construam significados a partir de situações que façam sentido em suas vidas, perspectiva que se mostra particularmente relevante em comunidades quilombolas, onde a cultura local se manifesta em práticas de contagem, medidas, organização do trabalho agrícola e trocas comerciais.

A Etnomatemática, proposta por D'Ambrosio (2009), oferece um referencial fundamental para compreender e valorizar tais práticas. Segundo o autor, todas as culturas desenvolvem formas próprias de pensamento lógico e de resolução de problemas, e reconhecer esses saberes é essencial para que a Matemática escolar deixe de ser um conhecimento alheio e distante. Ao articular a Matemática acadêmica com os saberes culturais, a Etnomatemática possibilita que os estudantes se vejam representados no currículo, fortalecendo sua identidade e ampliando o sentido do aprendizado.

Além de D'Ambrosio, autores como Knijnik (1996) e Gerdes (2007) também evidenciam que a Etnomatemática tem um caráter político, ao desafiar a hegemonia de uma Matemática única e universal. Em comunidades quilombolas, esse debate ganha força, pois trata de romper com práticas escolares que frequentemente desconsideram a história, a cultura e os modos de vida da população negra. Nesse sentido, o ensino de Matemática pode contribuir tanto para o fortalecimento da identidade cultural quanto para a promoção de uma educação antirracista.

Ademais, pesquisas como a de Santos e Silva (2016) mostram que práticas pedagógicas que dialogam com a realidade quilombola não apenas aumentam o interesse dos alunos pela Matemática, mas também melhoram os índices de aprendizagem. Essa constatação reforça a tese de que uma Educação Matemática crítica e contextualizada é capaz de transformar o processo educativo, aproximando-o das necessidades reais dos estudantes e da comunidade.

Portanto, refletir sobre a prática pedagógica em escolas quilombolas exige compreender a Matemática como saber plural, que transita entre o acadêmico e o cultural. Cabe ao professor mediar esse processo, criando pontes entre os diferentes sistemas de conhecimento e promovendo aprendizagens que valorizem a diversidade, a identidade e a emancipação dos sujeitos.

3. INVESTIGANDO SABERES, EXPERIÊNCIAS E DESAFIOS EM UMA ESCOLA RURAL QUILOMBOLA

A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, fundamentada no paradigma interpretativo, e configura-se como estudo de caso (GIL, 2021). O lócus da investigação é a Unidade Escolar Manoel Ribeiro da Cruz, situada na comunidade quilombola de Aliança, no município de Cururupu/MA.

Os procedimentos metodológicos incluem:

- Levantamento bibliográfico em bases nacionais e internacionais (CAPES, SciELO), a fim de mapear os estudos já produzidos sobre formação docente, Educação Matemática e Etnomatemática;
- Análise documental de planos de ensino, relatórios escolares e documentos institucionais;
- Entrevistas semiestruturadas com professores, coordenadores e gestores escolares;
- Observação participante em sala de aula e nos espaços da comunidade escolar, registrando interações e práticas.

A análise dos dados será orientada pela técnica de análise de conteúdo (Bardin, 1997), buscando identificar categorias emergentes relacionadas aos saberes docentes, às experiências formativas e aos desafios enfrentados no cotidiano escolar.

A análise realizada na Unidade Escolar Manoel Ribeiro da Cruz revelou que a formação inicial dos professores que atuam no ensino de Matemática em contexto quilombola apresenta fragilidades significativas. Dos docentes entrevistados, apenas uma minoria possui licenciatura plena em Matemática. Destaca-se também, a maioria dos professores é formada em áreas afins ou mesmo em cursos não diretamente ligados à disciplina, o que evidencia lacunas de base na preparação específica. Essa realidade corrobora o que Tardif (2001) já destacava ao afirmar que a prática docente se constrói a partir de um mosaico de saberes, mas que sem uma sólida formação inicial o professor tende a apoiar-se quase exclusivamente na experiência, muitas vezes de forma improvisada.

As entrevistas evidenciaram ainda que a formação continuada oferecida pela rede municipal constitui-se insuficiente e pouco conectada à realidade da comunidade quilombola. A maior parte dos cursos tem caráter genérico e não considera as particularidades culturais e sociais dos estudantes. Esse dado reforça a crítica de Zeichner (2010), para quem a formação continuada precisa ser situada, contextualizada e construída em diálogo com os sujeitos, caso contrário perde o potencial de transformação das práticas.

Por outro lado, observou-se que os professores desenvolvem estratégias criativas para aproximar a Matemática da realidade dos alunos. Nas observações em sala de aula, foi possível perceber que práticas como o uso de medidas tradicionais da comunidade, a contagem ligada às atividades agrícolas e a organização de feiras escolares funcionam como recursos pedagógicos que mobilizam a atenção dos estudantes. Tais iniciativas dialogam diretamente com os princípios da Etnomatemática propostos por D'Ambrosio (2009), ao reconhecer que a Matemática não se restringe ao campo acadêmico, mas emerge de práticas culturais cotidianas.

Entretanto, as observações também apontaram desafios persistentes. O uso de materiais didáticos padronizados, alheios ao contexto local, muitas vezes inviabiliza o estabelecimento de conexões significativas. Professores relataram dificuldades em adaptar o



conteúdo do livro didático às experiências vividas pelos alunos, o que provoca desmotivação e, em alguns casos, resistência em aprender Matemática. Esse aspecto dialoga com a crítica de Freire (1996), segundo a qual a educação bancária desconsidera o universo cultural do educando, inviabilizando a aprendizagem significativa.

Outro dado importante refere-se à percepção dos professores sobre a identidade quilombola dos alunos. Embora reconheçam a riqueza cultural da comunidade, muitos docentes ainda não conseguem transformar esse reconhecimento em práticas pedagógicas consistentes. Essa distância entre discurso e prática mostra a necessidade de formações que promovam não apenas sensibilização, mas também ferramentas concretas para o trabalho pedagógico.

Os resultados também evidenciaram um paradoxo: enquanto os professores apontam como desafio a ausência de formação adequada, a própria experiência no cotidiano quilombola acaba produzindo saberes docentes singulares, os quais precisam ser valorizados. Tais saberes, descritos por Tardif (2001) como experienciais, constituem uma base legítima da docência e podem ser potencializados quando articulados ao conhecimento científico.

Em síntese, os dados apontam que a formação docente em escolas quilombolas exige um duplo movimento: por um lado, garantir o acesso a uma sólida formação científica e metodológica; por outro, reconhecer e valorizar os saberes locais como parte integrante do ensino de Matemática. Essa articulação é o caminho para construir uma prática pedagógica mais humanizada, dialógica e transformadora, capaz de enfrentar as desigualdades e de reafirmar as identidades culturais dos estudantes.

4. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A análise evidencia que a formação docente e as práticas pedagógicas constituem dimensões complementares e indissociáveis no ensino de Matemática em escolas quilombolas. O reconhecimento dos saberes locais, a valorização da cultura comunitária e o investimento em formação continuada são elementos centrais para a construção de uma prática pedagógica mais justa, inclusiva e transformadora.

Ao problematizar os desafios e apontar caminhos para a melhoria da formação docente, este estudo busca contribuir não apenas para a Educação Matemática, mas também para o fortalecimento da luta por equidade racial e social no Brasil. Reafirma-se, assim, a necessidade de políticas públicas comprometidas com a diversidade e a justiça social, bem como de práticas pedagógicas que unam teoria e prática, escola e comunidade, Matemática e cultura.

Referências

- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1997.
- BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: liberando o potencial dos alunos por meio da matemática criativa. Jossey-Bass, 2015.
- D'AMBROSIO, U. O programa etnomatemática: uma síntese. **Acta Scientiae**, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2009.
- DARLING-HAMMOND, L. Teacher education around the world: What can we learn from international practice? **European Journal of Teacher Education**, v. 40, n. 3, p. 291-309, 2017.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

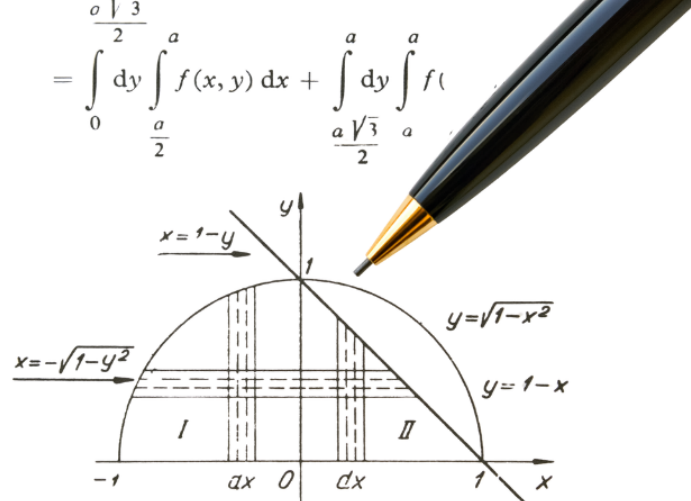
PONTE, J. P. **Professores e Matemática: Crenças e Práticas em Sala de Aula**. Springer, 2012.

SANTOS, J. G.; SILVA, J. D. A influência da cultura local no ensino de Matemática em comunidade quilombola. **Bolema**, v. 30, n. 56, p. 975-992, 2016.

TARDIF, M. Saberes docentes e formação profissional. **Educação & Sociedade**, v. 22, n. 74, p. 11-26, 2001.

ZEICHNER, K. M. Repensando as conexões entre teoria e prática na formação de professores. **Journal of Teacher Education**, v. 61, n. 1-2, p. 89-99, 2010.





19

O USO DO GEOGEBRA NA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA O ENSINO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS NO PROFMAT

THE USE OF GEOGEBRA IN THE MOBILIZATION OF
SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS FOR TEACHING
CONICS AND QUADRICS IN PROFMAT

Jadiel Carlos Asevedo Silva¹

Waléria de Jesus Barbosa Soares²

João Aranha Barros¹

Giuliano Eduardo Batista Cutrim¹

Francisco das Chagas Soares¹

Raimundo Cazuza da Silva Neto¹

¹ Doutorando em Ensino, UEMA, São Luís - MA

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UEMA, São Luís - MA

RESUMO

Este artigo discute o uso do software GeoGebra como ferramenta mediadora para favorecer a mobilização de registros de representação semiótica no ensino de cônicas e quádras no contexto do PROFMAT. Fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2005), que destaca a importância das conversões entre registros algébrico, geométrico e gráfico para a compreensão conceitual em Matemática. O estudo identifica dificuldades persistentes na articulação entre álgebra e geometria analítica, mesmo entre professores em formação continuada, e defende que a exploração dinâmica e interativa proporcionada pelo GeoGebra potencializa a visualização e a interpretação global desses conteúdos. A pesquisa evidencia impactos pedagógicos que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio visual, da autonomia intelectual e da prática reflexiva, fortalecendo a formação de professores mais críticos, capazes de transpor barreiras conceituais e planejar intervenções didáticas mais eficazes. Assim, a integração entre teoria e tecnologia aponta caminhos para tornar o ensino de conceitos matemáticos tradicionalmente áridos em experiências de aprendizagem mais significativas.

Palavras-chave: GeoGebra, Representações Semióticas, Cônicas, Quádras, Formação de Professores.

ABSTRACT

This article discusses the use of GeoGebra software as a mediating tool to facilitate the mobilization of semiotic representation registers in the teaching of conics and quadrics in the context of PROFMAT. It is based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (2005), which highlights the importance of conversions between algebraic, geometric, and graphic registers for conceptual understanding in Mathematics. The study identifies persistent difficulties in the articulation between algebra and analytic geometry, even among teachers in continuing education, and argues that the dynamic and interactive exploration provided by GeoGebra enhances the visualization and global interpretation of these contents. The research highlights pedagogical impacts that contribute to the development of visual reasoning, intellectual autonomy, and reflective practice, strengthening the training of more critical teachers, capable of overcoming conceptual barriers and planning more effective didactic interventions. Thus, the integration of theory and technology points to ways to transform the teaching of traditionally dry mathematical concepts into more meaningful learning experiences.

Keywords: GeoGebra, Semiotic Representations, Conics, Quadrics, Teacher Training.



1. INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática no nível superior, em especial em programas de formação continuada como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), apresenta desafios persistentes quando se trata da aprendizagem de conteúdos que articulam álgebra e geometria, como é o caso das cônicas e quádricas. Esses tópicos, embora fundamentais na Geometria Analítica, são frequentemente tratados de forma fragmentada, dificultando uma compreensão integrada de suas propriedades algébricas e geométricas.

Pesquisas como as de Dos Anjos-Secafim (2018) apontam que muitos estudantes carregam dificuldades acumuladas desde a educação básica, que se manifestam na pouca habilidade de transitar entre diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Nesse contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval oferece um referencial potente para compreender como a mobilização de registros algébrico, geométrico, gráfico e numérico é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Diante dessas limitações, o uso de tecnologias digitais vem sendo cada vez mais explorado como estratégia de mediação pedagógica. O GeoGebra, por integrar recursos de álgebra, geometria e gráficos em um ambiente dinâmico, permite que os estudantes visualizem e manipulem diferentes registros de forma interativa, favorecendo a compreensão global das curvas cônicas e superfícies quádricas. Autores como Borba - Villarreal (2005) defendem que o uso de ferramentas digitais não apenas amplia as possibilidades de representação e exploração dos objetos matemáticos, como também modifica o próprio modo de produção do conhecimento.

Assim, este artigo tem como objetivo analisar de que forma o uso do GeoGebra contribui para a mobilização de registros de representação semiótica no ensino de cônicas e quádricas no PROFMAT, visando superar dificuldades persistentes e promover práticas pedagógicas mais significativas. Para isso, são discutidos o diagnóstico das principais barreiras conceituais, a fundamentação teórica baseada nos registros de representação, o papel mediador do GeoGebra e os impactos pedagógicos observados para a formação continuada de professores de Matemática.

2. DIAGNÓSTICO DE DIFICULDADES NA COMPREENSÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS

O estudo das cônicas, circunferência, elipse, parábola, hipérbole e das quádricas, no contexto do ensino superior, particularmente em programas de formação continuada como o PROFMAT, revela-se um campo fértil para identificar lacunas conceituais e dificuldades persistentes na aprendizagem. Conforme enfatizam Dos Anjos-Secafim (2018) a dificuldade dos estudantes em aprender matemática é uma realidade muito presente em sua trajetória educacional, estendendo-se da educação básica até níveis mais avançados.

Observa-se que essas dificuldades estão fortemente relacionadas à limitação dos estudantes em transitar entre diferentes representações semióticas dos mesmos objetos matemáticos. Para Duval (2005), a apreensão de conceitos matemáticos depende, essencialmente, da mobilização de registros de representação e da capacidade de realizar tratamentos e conversões entre eles. Assim, quando os alunos não conseguem relacionar

adequadamente a expressão algébrica de uma parábola, por exemplo, com sua representação geométrica ou gráfica, a compreensão permanece superficial, restrita a procedimentos mecânicos.

Além disso, como destacam Peyrerol e Alves (2021), as cônicas, embora sejam objetos com ampla aplicação em áreas como física, engenharia e tecnologia, geralmente são apresentadas de forma fragmentada, dificultando a construção de significados integrados. Essa abordagem desarticulada limita o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que impede o aluno de perceber as relações entre as propriedades algébricas e as características geométricas das curvas.

Essa lacuna torna-se ainda mais evidente quando se considera o perfil dos professores-alunos do PROFMAT. Apesar de serem profissionais da educação matemática, muitos deles demonstram fragilidades na articulação entre álgebra e geometria analítica, como aponta que investigou a aprendizagem de geometria analítica com foco em conversões de registros de representação. Azevedo (2018) afirma que “os objetos matemáticos não se tornam imediatamente acessíveis aos alunos, mas apenas por meio de suas representações semióticas”. Isso reforça a ideia de que não basta dominar procedimentos isolados; é necessário compreender o objeto matemático em sua totalidade, transpondo as barreiras impostas por registros estanques.

Para além disso, estudos como o de Da Silva e Moretti (2018) enfatizam que o ensino tradicional tende a negligenciar o potencial de interpretação global das superfícies quádricas, limitando-se a cálculos algébricos sem conexão significativa com a visualização espacial. Essa abordagem pode comprometer a compreensão das propriedades geométricas fundamentais, como vértices, focos, diretrizes e eixos de simetria.

Nesse sentido, o diagnóstico das dificuldades precisa considerar não apenas os erros procedimentais, mas também as barreiras cognitivas que dificultam o trânsito entre registros de representação semiótica. Duval (2003, p. 14) afirma que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação”, sendo as conversões entre registros um indicativo de compreensão conceitual aprofundada. Logo, a ausência dessa mobilização revela-se um indicador essencial para o diagnóstico.

Um exemplo prático é a dificuldade observada em tarefas de conversão: muitos professores-alunos conseguem resolver uma equação de uma cônica, mas apresentam limitações ao interpretar o significado geométrico de seus coeficientes ou ao esboçar a curva correspondente no plano cartesiano. Essa limitação, como enfatiza Cury (2004), pode ser esclarecida por meio da análise de erros, que “revela lacunas profundas na estrutura cognitiva dos estudantes, permitindo ao professor reorientar sua prática didática”.

Portanto, diagnosticar essas dificuldades implica não apenas levantar os conceitos com maior índice de erro, mas também compreender as barreiras cognitivas relacionadas à passagem de um registro para outro. Essa etapa diagnóstica é fundamental para o planejamento de intervenções didáticas mais eficazes, capazes de promover o raciocínio visual, a autonomia e a compreensão conceitual, superando o ensino mecânico e fragmentado.

Nessa perspectiva, a utilização de recursos como o GeoGebra surge como um suporte estratégico. Segundo Lopes e Junior (2019), ao permitir a manipulação interativa de representações algébricas, gráficas e geométricas, o software “contribui para a formação de professores mais críticos e reflexivos, ampliando sua capacidade de análise e resolução de problemas complexos”. Assim, o diagnóstico de dificuldades, aliado à mediação tecnológica, viabiliza práticas pedagógicas mais significativas e potencializa a aprendizagem.



Como reforçam Dos Anjos e Secafim (2018), entender as dificuldades de aprendizagem é o ponto de partida para a construção de práticas pedagógicas que façam sentido para os estudantes e fortaleçam sua formação”. Portanto, mapear essas fragilidades e dialogar com teorias como a dos registros de representação semiótica é um passo essencial para transformar o ensino de conteúdos tradicionalmente áridos em experiências de aprendizagem mais ricas, integradas e contextualizadas.

3. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA COMO REFERENCIAL DIDÁTICO

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, sistematizada por Raymond Duval a partir da década de 1990, consolidou-se como um dos principais referenciais para compreender os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Matemática. De acordo com Duval (2003), o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas, já que os objetos em si são abstratos e não se apresentam de forma direta ao sujeito que aprende. Assim, o domínio conceitual não pode ser reduzido à memorização de fórmulas ou procedimentos, mas exige a capacidade de reconhecer, tratar e converter diferentes formas de representação.

Nesse sentido, a teoria estabelece dois tipos fundamentais de transformações: o tratamento, que ocorre dentro do mesmo registro de representação, e a conversão, que implica transitar de um registro para outro. Por exemplo, ao resolver um problema envolvendo uma parábola, o estudante pode manipular a equação quadrática (tratamento algébrico) e, em seguida, relacioná-la a seu gráfico no plano cartesiano (conversão algébrico-gráfica). É justamente essa mobilidade entre registros que caracteriza a atividade matemática genuína, pois possibilita interpretações múltiplas de um mesmo objeto.

No entanto, como alerta Duval (2012), muitos estudantes e até professores em formação continuada apresentam fragilidades quando precisam operar essas conversões. O risco, segundo o autor, é confundir o objeto com sua representação, comprometendo a compreensão conceitual. Esse paradoxo é evidente na prática docente, sobretudo no ensino de conteúdos mais complexos, como as cônicas e quádras, que exigem uma articulação constante entre álgebra, geometria e visualização gráfica.

A relevância da Teoria dos Registros de Representação Semiótica se confirma também quando se considera o ensino de Matemática no contexto atual, permeado por tecnologias digitais. Como destacam Lopes e Junior (2019), a integração de recursos como o GeoGebra torna possível explorar, em um único ambiente, múltiplos registros simultaneamente algébrico, geométrico e numérico, potencializando as possibilidades de conversão e, conseqüentemente, de aprendizagem. Nessa perspectiva, o GeoGebra atua como mediador didático que materializa os princípios da teoria de Duval em situações reais de ensino.

Além disso, Duval (2005) enfatiza que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação”. Portanto, é papel do professor criar condições didáticas para que os alunos desenvolvam essa competência, rompendo com abordagens que privilegiam apenas um tipo de representação. Para Cury (2004), ao analisar erros recorrentes em tarefas de conversão, fica evidente que a ausência de articulação entre registros gera lacunas cognitivas profundas. Assim, a análise de erros, à luz da teoria, torna-se uma ferramenta potente para redimensionar as práticas pedagógicas.

Outro aspecto importante diz respeito à flexibilidade cognitiva que o referencial de Duval promove. De acordo com Da Silva e Moretti (2018), a abordagem multirrepresentacional permite ao estudante explorar diferentes perspectivas de um mesmo conceito, favorecendo a construção de significados mais consistentes. Essa habilidade é particularmente relevante para professores-alunos do PROFMAT, que precisam não apenas dominar os conceitos, mas também refletir sobre como ensiná-los de forma clara e articulada.

Portanto, utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica como base didática significa compreender a Matemática como uma linguagem plural, em que representações discursivas e não discursivas se complementam. Esse olhar teórico possibilita planejar intervenções didáticas mais eficazes, estimular o raciocínio visual, promover a autonomia e, sobretudo, enfrentar as dificuldades históricas de transposição de registros, tão frequentes no ensino de cônicas e quádras.

Assim, o presente estudo defende que, ao articular teoria e prática, aliando o referencial de Duval a ferramentas como o GeoGebra, é possível criar ambientes de aprendizagem mais dinâmicos, investigativos e significativos, alinhados às necessidades da formação docente contemporânea.

4. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA COMO REFERENCIAL DIDÁTICO

No contexto do ensino superior, especialmente em programas de formação continuada como o PROFMAT, o uso de tecnologias digitais tem se mostrado um caminho promissor para superar dificuldades históricas no ensino de conteúdos matemáticos abstratos. O software GeoGebra, por sua natureza dinâmica e interativa, destaca-se como uma das ferramentas mais eficazes para viabilizar a mobilização de registros de representação semiótica, conforme propõe a teoria de Duval (2005).

De acordo com Borba e Villarreal (2005), a incorporação de tecnologias digitais no ensino de Matemática não apenas amplia as possibilidades de representação e exploração dos objetos matemáticos, como também modifica o próprio modo de produção do conhecimento. Nesse sentido, o GeoGebra torna-se um recurso estratégico para o ensino de cônicas e quádras, pois possibilita aos alunos visualizar, manipular e relacionar diferentes registros algébrico, geométrico, gráfico e numérico em tempo real.

Como apontam Lopes e Junior (2019), o ambiente do GeoGebra permite que o estudante explore propriedades de curvas e superfícies de forma investigativa, alterando parâmetros e observando, instantaneamente, os impactos dessas mudanças em representações gráficas e algébricas. Essa abordagem favorece a compreensão conceitual ao romper com práticas de ensino meramente procedimentais, ainda tão comuns na disciplina de Geometria Analítica.

Assim, ao trabalhar com o GeoGebra, o aluno é levado a interpretar uma equação quadrática (registro algébrico), a esboçar sua curva correspondente (registro gráfico) e a relacionar essas informações com propriedades geométricas, como vértices, focos, diretrizes e excentricidade. Essa articulação amplia a capacidade de análise e fortalece o pensamento matemático.

Para Da Silva e Moretti (2018), o ensino das superfícies quádras demanda uma abordagem que integre a interpretação global das formas geométricas com sua descrição algébrica. Nesse ponto, o GeoGebra atua como mediador essencial, pois proporciona condições para que os alunos façam conexões significativas entre as representações. Essa



integração é ainda mais relevante no PROFMAT, onde os participantes, na condição de professores em formação continuada, precisam consolidar saberes matemáticos para reverter as dificuldades encontradas em suas próprias práticas docentes.

Além disso, a flexibilidade do GeoGebra favorece o protagonismo do estudante, permitindo-lhe assumir uma postura ativa no processo de aprendizagem. Silva (2018) ressalta que o programa combina diversos recursos geometria, álgebra, tabelas, gráficos e estatística em um único ambiente, ampliando as possibilidades didáticas em sala de aula. Essa característica potencializa práticas exploratórias e investigativas, alinhadas às demandas de um ensino que valorize a construção de significados.

Outro ponto relevante é que o uso do GeoGebra, aliado à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, contribui para a formação de professores mais críticos e reflexivos. Segundo Almeida (2020), a prática com softwares de geometria dinâmica no ensino superior desenvolve competências voltadas para a análise, representação e resolução de problemas matemáticos complexos, elementos essenciais na formação de docentes capazes de promover aprendizagens mais significativas em seus contextos escolares.

Dessa forma, o GeoGebra não é apenas uma ferramenta tecnológica complementar, mas um instrumento didático potente que operacionaliza, na prática, princípios centrais da teoria de Duval. Sua utilização, no ensino de cônicas e quádras, representa um avanço em direção a práticas pedagógicas mais inovadoras, capazes de articular teoria e prática, promover a mobilização de registros e estimular o raciocínio visual e a autonomia intelectual dos professores-alunos do PROFMAT.

5. IMPACTOS PEDAGÓGICOS E REFLEXÕES PARA A FORMAÇÃO CONTINUADA

A utilização da Teoria dos Registros de Representação Semiótica como referencial didático, aliada ao uso de ferramentas como o GeoGebra, revela impactos pedagógicos significativos para a formação continuada de professores de Matemática. No contexto do PROFMAT, esse movimento não se limita ao domínio técnico dos conteúdos de Geometria Analítica, mas se estende à resignificação das práticas de ensino, reforçando a articulação entre teoria e prática.

De acordo com Duval (2005), a atividade matemática genuína exige a mobilização simultânea de diferentes registros de representação e a habilidade de realizar conversões entre eles. Nesse sentido, o domínio dessa competência reflete diretamente na qualidade das intervenções pedagógicas planejadas pelos professores em sala de aula.

Nesse contexto, o GeoGebra emerge como um suporte didático que potencializa o trabalho com múltiplos registros. Para Lopes e Junior (2019), o uso de tecnologias de geometria dinâmica contribui para “a formação de professores mais críticos e criativos”, na medida em que viabiliza práticas de exploração, análise e verificação de hipóteses matemáticas. A manipulação interativa de representações algébricas, gráficas e geométricas amplia a percepção conceitual, rompendo com abordagens restritas a procedimentos mecânicos.

Além disso, a pesquisa de Azevedo (2018) reforça que o trabalho com conversões de registros, apoiado por softwares como o GeoGebra, promove uma aprendizagem mais significativa, pois possibilita que os estudantes visualizem, testem e discutam propriedades matemáticas em tempo real. Essa experiência, quando vivenciada por professores em formação continuada, amplia sua capacidade de refletir criticamente sobre suas próprias

práticas de ensino, inspirando mudanças metodológicas que podem ser aplicadas em turmas da educação básica.

Outro impacto pedagógico relevante é o fortalecimento da autonomia docente. Conforme salientam Dos Anjos e Secafim (2018), compreender as dificuldades de aprendizagem e as lacunas conceituais é um passo essencial para propor intervenções mais assertivas. Quando professores-alunos vivenciam atividades didáticas fundamentadas em teorias consolidadas, como a de Duval, e exploram recursos tecnológicos que favorecem a transição entre registros, eles se tornam mais preparados para planejar sequências didáticas que dialoguem com as necessidades reais de seus estudantes.

Além disso, estudos como o de Da Silva e Moretti (2018) apontam que a abordagem multirrepresentacional favorece a interpretação global de superfícies quádricas, o que rompe com o ensino compartimentalizado ainda frequente na Matemática. Esse ganho didático fortalece a visão de que o ensino deve estimular a compreensão integrada de conceitos, promovendo o desenvolvimento do raciocínio matemático e da flexibilidade cognitiva.

No âmbito da formação continuada, esse processo contribui para consolidar uma postura investigativa e reflexiva, como propõe Zabala (2010), ao enfatizar que práticas educativas inovadoras surgem quando o professor é capaz de analisar sua ação, compreender os desafios de aprendizagem de seus alunos e buscar estratégias pedagógicas mais eficazes.

Portanto, os impactos pedagógicos evidenciados pelo uso do GeoGebra como mediador de registros de representação semiótica vão além da compreensão técnica de cônicas e quádricas. Eles indicam um caminho promissor para o desenvolvimento de práticas mais significativas, que estimulem a participação ativa dos alunos, fortaleçam a construção de conceitos e contribuam para a formação de professores mais autônomos, críticos e criativos capazes de transformar suas salas de aula em espaços de aprendizagem verdadeiramente investigativos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo reforça a importância de integrar teoria e prática no ensino de conteúdos matemáticos que historicamente apresentam altos índices de dificuldade, como as cônicas e quádricas, mesmo entre professores em formação continuada. A análise evidenciou que grande parte das barreiras conceituais está relacionada à limitação dos estudantes em mobilizar e converter registros de representação semiótica, o que confirma o pressuposto de Duval (2005) de que a atividade matemática se sustenta na articulação entre múltiplos registros.

Nesse cenário, a utilização do GeoGebra mostrou-se uma ferramenta mediadora eficaz, capaz de favorecer o trânsito entre representações algébricas, gráficas, geométricas e numéricas de forma dinâmica e interativa. A exploração de atividades com apoio tecnológico contribuiu não apenas para a compreensão mais profunda das propriedades das curvas e superfícies, mas também para o desenvolvimento de competências investigativas e reflexivas nos professores-alunos do PROFMAT.

Além disso, o estudo aponta para impactos pedagógicos relevantes, como o fortalecimento do raciocínio visual, a superação do ensino mecânico e a valorização de práticas didáticas que estimulam a autonomia docente e a análise crítica de erros e dificuldades. Esses aspectos são fundamentais para que professores em formação continuada possam reconfigurar suas práticas em sala de aula, propondo sequências didáticas que dialoguem

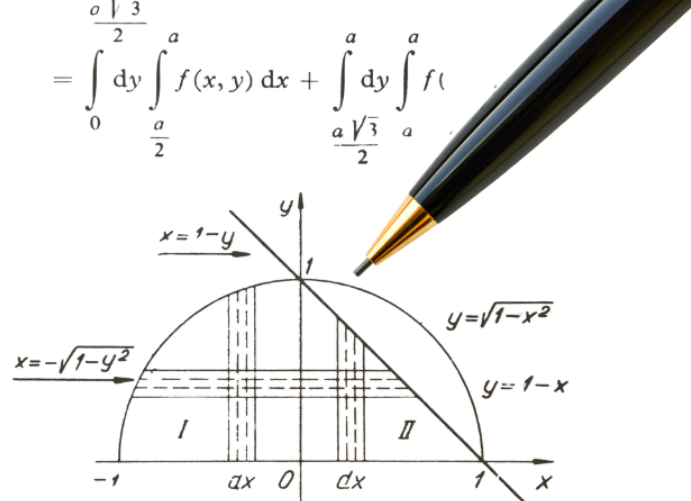


com as reais necessidades de aprendizagem de seus alunos.

Assim, conclui-se que o trabalho com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aliado ao uso de tecnologias como o GeoGebra, configura um caminho promissor para tornar o ensino de tópicos complexos mais significativo, contextualizado e interdisciplinar. Recomenda-se, portanto, que novas pesquisas aprofundem essa abordagem em outros contextos e níveis de ensino, ampliando o repertório de estratégias para a formação de professores de Matemática críticos, criativos e comprometidos com a melhoria da qualidade do ensino.

Referências

- ALMEIDA, Antonio Carlos Pereira. Contribuições do GeoGebra para o Ensino de Funções: o que revelam algumas pesquisas brasileiras. **Revista de Iniciação à Docência**, v. 8, n. 1, p. e11945-18, 2020.
- AZEVEDO, Alysson Roberto Garcia. **Aprendizagem de Geometria Analítica a partir de Conversões de Registros de Representação Semiótica com Exploração dos Temas: Ponto, Reta e Circunferência com o uso do GeoGebra no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.
- BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mônica E. **Educação Matemática e Tecnologias Digitais: Uma Rede de Significações**. Porto Alegre: Artmed, 2005.
- CURY, Helena Noronha. “Professora, eu só erreí um sinal!”: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 111–138.
- DA SILVA, Sérgio Florentino; MORETTI, Mércles Thadeu. A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 243–266, 2018.
- DOS ANJOS, Cristine Moraes; SECAFIM, Mariana Figueira. Dificuldades com a Aprendizagem de Matemática na Educação Superior. **ColInspiração — Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, v. 1, n. 1, p. 78–91, 2018.
- DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento**. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. REVEMAT, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 37–64, 2012.
- DUVAL, Raymond. **Semiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels**. Berna: Peter Lang, 2005.
- LOPES, Erika Maria Chioca; JUNIOR, Arlindo José Souza. Ensinar e aprender Geometria Analítica com Tecnologias Digitais por meio de um trabalho colaborativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática — RENCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 66–79, 2019.
- PEYREROL, Marc Santos; ALVES, Fábio José da Costa. **Cônica Parábola: dificuldades de ensino e aprendizagem**. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 7, n. 7, p. 71616–71630, 2021.
- SILVA, Bárbara Chagas da; BRAYNER, Conceição; BORRALHO, António Manuel Águas. Avaliação em matemática com uso de tecnologias no ensino médio na perspectiva de professores. In: **V CONAVE – Congresso Nacional de Avaliação em Educação**, Bauru, 2018.
- ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: Como Ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2010.



20

CONGRUÊNCIAS NO DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

CONGRUENCES IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS
LEARNING IN ELEMENTARY EDUCATION

João Coelho Filho¹
Roberto Amorim Silva²
Sergio Nolêto Turibus³

¹ Doutor, Departamento de Matemática e Informática – DEMATI-UEMA, São Luís-MA

² Mestre, Secretaria de Educação do Maranhão – SEDUC-MA

³ Doutor, Universidade Estadual do Maranhão, Balsas-MA

Resumo

A pesquisa de dissertação que fundamenta este artigo utiliza a Teoria das Congruências, expondo seus fundamentos e diversidade de aplicações no cotidiano e propondo o ensino nas séries finais do ensino fundamental por sua relevância teórico-prática para o desenvolvimento do ensino de Matemática. A metodologia da pesquisa utiliza artigos desenvolvidos no PROFMAT-UEMA e literaturas atualizadas de Teoria dos Números para fundamentar os tópicos de Congruências e Classes Residuais. Além disso, são apresentadas aplicações de Congruências em calendários, sistemas de identificação e criptografia bem como as propriedades que auxiliam na resolução mais célere de problemas. E realiza-se aplicação com alunos da rede pública de São Luís para verificar as hipóteses referentes às contribuições da Teoria das Congruências para essa etapa do ensino.

Palavras-chave: Congruência; Aplicações de Congruência, Congruência no Ensino Fundamental.

Abstract

The dissertation research that underpins this article uses the theory of Congruences, explaining its fundamentals and diverse applications in everyday life and proposing its teaching in the final years of elementary school due to its theoretical and practical relevance for the development of mathematics education. The research methodology uses dissertations and articles developed at PROFMAT-UEMA and updated literature on Number Theory to support the topics of Congruences and Residue Classes. Furthermore, applications of Congruences in calendars, identification systems, and cryptography are presented, as well as the properties that assist in the faster resolution of problems. An application with students from the public school system in São Luís is also carried out to verify the hypotheses regarding the contributions of congruence theory to this stage of education.

Keywords: Congruence; Applications of Congruence, Congruence in Elementary Education.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números é a Matemática dos números inteiros e suas propriedades e operações: a área que estuda a Aritmética. É uma parte da matemática utilizada frequentemente em tarefas do cotidiano científico e espontâneo.

O estudo da Aritmética é parte do currículo obrigatório do ensino fundamental brasileiro onde são trabalhadas as operações básicas, realizando fundamentação teórica e o desenvolvimento de habilidades para a vida social e escolar. O trabalho compreende uma atenção à divisão de números inteiros e seus respectivos restos, visando destacar uma das vertentes da Teoria dos Números conhecida como Aritmética Modular. Esta por sua vez, somente explorada em programas científicos, projetos de pesquisas e cursos de graduação e de pós-graduações das ciências exatas.

Existe um declínio no desenvolvimento do ensino e aprendizagem de Matemática na etapa final do ensino fundamental. Apenas 65% dos alunos que ingressam no ensino fundamental concluem o ensino médio e com o agravante de apenas 7% possuírem aprendizagem adequada em Matemática [10]. Significando que a grande maioria dos alunos não compreende os conceitos básicos de matemática em sua formação inicial e alerta para a necessidade de melhoria de eficácia do ensino de matemática, pois os conhecimentos da base, em particular os de aritmética, são indispensáveis para a aprendizagem de outros conteúdos e desenvolvimento na disciplina. Uma exposição do baixo desempenho foi o que ocorreu no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, que é obrigatória em alguns países.

Estes dados e fatos justificam a escolha do tema deste trabalho, pois os conceitos de congruência têm muitas contribuições para o ensino e aprendizagem de matemática, com diversas aplicações e contextualizações no cotidiano e estão presentes no uso de tecnologias.

Destaca-se ainda a celeridade na resolução de problemas de repetições periódicas, os quais às vezes tornam-se inviáveis com a utilização dos conteúdos pertencentes ao currículo do ensino fundamental.

Neste trabalho, são tratados os conceitos e propriedades da aritmética modular evidenciando a pertinência que o conhecimento do tema possui nos anos finais do ensino fundamental e na dinâmica da vida moderna. Tal fato é consolidado no objetivo de investigar na teoria de congruência como ferramentas para o desenvolvimento do ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental. Destaca-se as aplicações da Congruência nos sistemas de identificação do ISBN, códigos de barras, CPF, CNPJ, relógios, calendários e outros.

2. FUNDAMENTOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

O Algoritmo da Divisão Euclidiana é um dos resultados mais importantes da Teoria dos Números e de fácil entendimento e aplicável. É estudado desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio e chegando no Ensino Superior onde é abordado de forma mais geral, [6], [8] e [13]. Esse resultado é atribuído ao Euclides e aparece no livro VII dos Elementos de Euclides, escrito por volta do ano 300 a.C.

Teorema 1 [Algoritmo da Divisão de Euclides]. *Dados dois inteiros a e b , com $b \neq 0$, então existem únicos inteiros q e r tais que:*

$$a = q \cdot b + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$



Os inteiros q e r são chamados respectivamente de quociente e resto e $r = 0$ se, e somente se, b é divisor de a , ou seja, b divide a , em símbolo: $b \mid a$.

Definição 1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Diz-se que b divide a ou b é divisor de a ou que a é um múltiplo de b , em símbolos $a \mid b$, se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$.

Teorema 2 [Sistema de Numeração]. Seja $b \in \mathbb{Z}$, com $b > 1$. Então para todo $a \in \mathbb{N}$ existem únicos $n, r_i \in \mathbb{Z}$, tais que

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b^1 + r_0 b^0 = (r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0)_b,$$

com $r_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ e $n = \lfloor \log_b a \rfloor$.

No caso particular de $b = 10$, tem-se o sistema de base 10,

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10^1 + r_0 = (r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0)_{10},$$

denominado de sistema decimal.

Definição 2. Sejam a e b dois inteiros não nulos. O máximo divisor comum de a e b é o inteiro positivo d que satisfaz às seguintes condições:

1. d divide a e d divide b , em símbolo: $d \mid a$ e $d \mid b$;
2. Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \leq d$.

O máximo divisor comum de a e b é indicado por: $d = \text{mdc}(a, b)$ e é imediato que o $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$.

Definição 3 [Congruência]. Dois inteiros a e b são denominado congruente módulo n , $1 < n \in \mathbb{N}$, se os restos de a e b quando dividido por n são iguais. Em símbolo,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Teorema 3. Considere a e b inteiros. Então,

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se, e somente se, n divide $a - b$. Em símbolo $n \mid (a - b)$.

Justificativa: Suponha que a e b são congruentes módulo n . Pela definição de Congruência e pelo Algoritmo da Divisão, existem q_1, q_2 e r tais que

$$a = q_1 \cdot n + r \text{ e } b = q_2 \cdot n + r.$$

Subtraindo as equações, tem-se que:

$$a - b = n \cdot (q_1 - q_2).$$

Assim, $n \mid (a - b)$.

Reciprocamente, suponha que n divide $a - b$. Pela Divisão Euclidiana, tem-se que

$$a = q_1 \cdot n + r_1 \text{ e } b = q_2 \cdot n + r_2,$$

com $0 \leq r_1 < n$ e $0 \leq r_2 < n$. Subtraindo as equações, tem-se que

$$a - b = n \cdot (q_1 - q_2) - (r_1 - r_2).$$

Como $n \mid (a - b)$ e $n \mid n \cdot (q_1 - q_2)$, tem-se que $n \mid (r_1 - r_2)$. Além disso, $r_1 < n$ e $r_2 < n$, o que implica em

$$|r_1 - r_2| < n.$$

O único inteiro não negativo que é menor que n e divide n é o zero. Logo, $|r_1 - r_2| = 0$. Portanto, $r_1 = r_2$, isto é,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Propriedades das Congruências:

- **P1:** $a \equiv a \pmod{n}$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$;
- **P2:** $a \equiv b \pmod{n}$ implica que $b \equiv a \pmod{n}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$;
- **P3:** $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ implica que $a \equiv c \pmod{n}$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$;
- **P4:** $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ implica que $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$ para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;
- **P5:** $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ implica que $ac \equiv bd \pmod{n}$ para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;
- **P6:** $a \equiv b \pmod{n}$ implica que $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$.

3. APLICAÇÕES DAS CONGRUÊNCIAS AOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADES

Nessa seção é mencionado alguns critérios de divisibilidade utilizando as definições, propriedades e resultados de congruência. O objetivo é mostrar os critérios de divisibilidade e formular e estabelecer regra que permita determinar se um número inteiro, é ou não divisível por outro número inteiro n , a um custo menor do que efetuar a divisão, [1], [5], [7] e [12].

Divisibilidade por 2, 4 e 8:

Considere um número natural

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0,$$

na base 10. Utilizando a definição e as propriedades de congruência, obtem-se que:

$$10 \equiv 0 \pmod{2} \text{ o que implica em } 10^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

e assim

$$10^i \equiv 0 \pmod{2}.$$

Logo,

$$r_i 10^i \equiv 0 \pmod{2},$$

para $i \geq 1$ e para $i = 0$, tem-se que $r_0 \equiv r_0 \pmod{2}$.

Logo, dado um número a na base 10, tem-se que:

$$a = (r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10^1 + r_0) \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + r_0 \equiv r_0 \pmod{2},$$

Portanto, $a \equiv r_0 \pmod{2}$.

Concluindo que um número a é divisível por 2 se, e somente se, r_0 é divisível por 2, ou seja, se r_0 é um algarismo par.



De maneira análoga, tem-se a divisibilidade por 4:

$$10 \equiv 2 \pmod{4} \text{ o que implica em } 10^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

e assim

$$10^i \equiv 0 \pmod{4},$$

para $i \geq 2$ e para $i = 1$, tem-se que $10r_1 \equiv 2r_1 \pmod{4}$ e $i = 0$, tem-se que $r_0 \equiv r_0 \pmod{4}$.

Logo,

$$a = (r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv 0 + 0 + \dots + 10r_1 + r_0 \equiv 2r_1 + r_0 \pmod{4}.$$

Portanto, um número a é divisível por 4 se, e somente se, $2r_1 + r_0$ é divisível por 4, ou seja, se $2r_1 + r_0$ é múltiplo de 4.

Aplicações do critério de divisibilidade por 4:

O número 315.476 é divisível por 4, pois

$$315.476 \equiv (2 \cdot 7 + 6) \equiv 20 \equiv 0 \pmod{4}.$$

O número 12.365 deixa resto 1 quando dividido por 4, pois

$$12.365 \equiv (2 \cdot 6 + 5) \equiv 17 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Consequentemente, um número a é divisível por 8 se, e somente se, $4r_2 + 2r_1 + r_0$ é múltiplo de 4, ou seja, 8 divide $4r_2 + 2r_1 + r_0$.

Aplicações do critério de divisibilidade por 8:

O número 175.432 é divisível por 8, pois

$$175.432 \equiv (4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2) \equiv 24 \equiv 0 \pmod{8}.$$

O número 12.361 deixa resto 1 quando dividido por 8, pois

$$12.361 \equiv (3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1) \equiv 25 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Divisibilidade por 5 e 10:

Pelo Teorema 3,

$$10 \equiv 0 \pmod{5} \text{ o que implica em } 10^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

e assim

$$10^i \equiv 0 \pmod{5},$$

para $i \geq 1$ e para $i = 0$, tem-se que $r_0 \equiv r_0 \pmod{5}$, obtendo que

$$r_i 10^i \equiv 0 \pmod{5},$$

para $i \geq 1$. Logo,

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0 \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + r_0 \equiv r_0 \pmod{5}.$$

Portanto, $a \equiv r_0 \pmod{5}$.

Concluindo que um número a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é divisível por 5, ou seja, se r_0 é o algarismo 0 ou 5.

De maneira análoga, tem-se a divisibilidade por 10:

$$10 \equiv 0 \pmod{10} \text{ implicando que } 10^i \equiv 0 \pmod{10},$$

para $i \geq 1$ e para $i = 0$, tem-se que $r_0 \equiv r_0 \pmod{10}$. Logo,

$$a = (r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv 0 + \dots + 0 + r_0 \equiv r_0 \pmod{10}.$$

Portanto, $a \equiv r_0 \pmod{10}$.

Concluindo que um número a é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10, ou seja, se r_0 é o algarismo 0.

Divisibilidade por 3 e 9:

Pelo Teorema 3,

$$10 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } 10^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ o que implica em } 10^i \equiv 1 \pmod{3},$$

e assim

$$r_i 10^i \equiv r_i \pmod{3},$$

para todo i . Logo,

$$a = (r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) \pmod{3},$$

Portanto, $a \equiv (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) \pmod{3}$.

Concluindo que um número a é divisível por 3 se, e somente se, $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ é divisível por 3, ou seja, a soma dos algarismos $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ é múltiplo de 3.

Aplicações do critério de divisibilidade por 3:

O resto da divisão de 375.420 por 3 é 0, pois

$$375.420 \equiv (3 + 7 + 5 + 4 + 2 + 0) \equiv 21 \equiv 0 \pmod{3}.$$

O resto da divisão de 3.708.541 por 3 é 1, pois

$$3.708.541 \equiv (3 + 7 + 0 + 8 + 5 + 4 + 1) \equiv 28 \equiv 1 \pmod{3}.$$

De maneira análoga, tem-se a divisibilidade por 9:

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \text{ e } 10^2 \equiv 1 \pmod{9} \text{ implicando em } 10^i \equiv 1 \pmod{9},$$

e assim

$$r_i 10^i \equiv r_i \pmod{9},$$

para todo i . Logo,

$$a = (r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) \pmod{9},$$

Portanto, $a \equiv (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) \pmod{9}$.

Concluindo que um número a é divisível por 9 se, e somente se, $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ é divisível por 9, ou seja, a soma dos algarismos é um múltiplo de 9.

Aplicações do critério de divisibilidade por 9:

O número 53.424 é divisível por 9, pois

$$53.424 \equiv (5 + 3 + 4 + 2 + 4) \equiv 18 \equiv 0 \pmod{9}.$$



O resto da divisão de 3.708.541 por 9 é 1, pois

$$3.708.541 \equiv (3 + 7 + 0 + 8 + 5 + 4 + 1) \equiv 28 \equiv 1 \pmod{9}.$$

Observação: Um número inteiro a é divisível por 6, se é divisível, simultaneamente, por 2 e por 3.

Divisibilidade por 7:

Pelas propriedades de congruências, obtem-se que:

		$r_0 \equiv r_0 \pmod{7}$
$10 \equiv 3 \pmod{7}$	implicando em	$r_1 10 \equiv 3r_1 \pmod{7}$
$10^2 \equiv 2 \pmod{7}$	implicando em	$r_2 10^2 \equiv 2r_2 \pmod{7}$
$10^3 \equiv -1 \pmod{7}$	implicando em	$r_3 10^3 \equiv -r_3 \pmod{7}$
$10^4 \equiv -3 \pmod{7}$	implicando em	$r_4 10^4 \equiv -3r_4 \pmod{7}$
$10^5 \equiv -2 \pmod{7}$	implicando em	$r_5 10^5 \equiv -2r_5 \pmod{7}$
$10^6 \equiv 1 \pmod{7}$	implicando em	$r_6 10^6 \equiv r_6 \pmod{7}$
$10^7 \equiv 3 \pmod{7}$	implicando em	$r_7 10^7 \equiv 3r_7 \pmod{7}$
$\vdots$		$\vdots$

O desenvolvimento da congruência módulo 7 mostra que a cada ciclo de 6 o processo é repetido e a cada ciclo de 3 divergem, mas coincide em módulo. Assim, somando todas as congruências, tem-se que

$$a = (r_n 10^n + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv [\dots - (2r_5 + 3r_4 + r_3) + (2r_2 + 3r_1 + r_0)] \pmod{7}.$$

Portanto, $a \equiv [\dots - (2r_5 + 3r_4 + r_3) + (2r_2 + 3r_1 + r_0)] \pmod{7}$.

Concluindo que um número a é divisível por 7 se, e somente se, $\dots - (2r_5 + 3r_4 + r_3) + (2r_2 + 3r_1 + r_0)$ é divisível por 7, ou seja, a expressão

$$\dots - (2r_5 + 3r_4 + r_3) + (2r_2 + 3r_1 + r_0)$$

é um múltiplo de 7.

Aplicações do critério de divisibilidade por 7:

O número 532 é divisível por 7, pois

$$532 \equiv (2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2) \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}.$$

O resto da divisão de 2.657 por 7 é 1, pois

$$2.657 \equiv (2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 7) \equiv 36 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Divisibilidade por 11:

Pelas propriedades de congruências, obtem-se que:

$$\begin{array}{lll}
 & & r_0 \equiv r_0 \pmod{11} \\
 10 \equiv -1 \pmod{11} & \text{implicando em} & r_1 10 \equiv -r_1 \pmod{11} \\
 10^2 \equiv 1 \pmod{11} & \text{implicando em} & r_2 10^2 \equiv r_2 \pmod{11} \\
 10^3 \equiv -1 \pmod{11} & \text{implicando em} & r_3 10^3 \equiv -r_3 \pmod{11} \\
 10^4 \equiv 1 \pmod{11} & \text{implicando em} & r_4 10^4 \equiv r_4 \pmod{11} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

O desenvolvimento da congruência módulo 11 mostra que a cada ciclo de 2 o processo é repetido e coincide em módulo. Assim, somando todas as congruências, tem-se que

$$10^i \equiv (-1)^i \pmod{11},$$

Para i par, $10^i \equiv 1 \pmod{11}$ e para i ímpar $10^i \equiv -1 \pmod{11}$. Logo

$$a = (r_n 10^n + \dots + r_1 10 + r_0) \equiv [(\dots + r_4 + r_2 + r_0) - (\dots + r_5 + r_3 + r_1)] \pmod{11}.$$

Portanto, $a \equiv [\dots - (\dots + r_4 + r_2 + r_0) - (\dots + r_5 + r_3 + r_1)] \pmod{11}$.

Concluindo que um número a é divisível por 11 se, e somente se,

$$\dots (\dots + r_4 + r_2 + r_0) - (\dots + r_5 + r_3 + r_1)$$

é divisível por 11, ou seja, a expressão:

$$(\dots + r_4 + r_2 + r_0) - (\dots + r_5 + r_3 + r_1) \text{ é um múltiplo de 11.}$$

Aplicações do critério de divisibilidade por 11:

O número 2.541 é divisível por 11, pois

$$2.541 \equiv [(5 + 1) - (4 + 2)] \equiv 0 \pmod{11}.$$

O número 571.857 é divisível por 11, pois

$$571.857 \equiv [(5 + 1 + 5) - (7 + 8 + 7)] \equiv -11 \equiv 0 \pmod{11}.$$

4. APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIA NO COTIDIANO

Nesta seção são apresentadas aplicações de congruência no cotidiano, contendo as potencialidades da teoria, bem como aparece para a sociedade, em particular, na tecnologia de sistema de verificação de dígito de documentos.

Detectar um erro de ortografia em um texto é simples, pois existem somente duas possibilidades: a palavra não existe no idioma ou não faz sentido no contexto. No entanto, se ocorre a troca de algarismos de um número ou mesmo de um código de identificação, a verificação do erro não é uma tarefa fácil. Para evitar fraudes, foram criados os dígitos de controle ou de verificação que são baseados na noção de congruência.

O código de barras EAN-13 consiste numa sequência de 13 dígitos traduzidos para barras de cores preta ou branca de espessuras variadas. Na verdade, são quatro as espessuras possíveis para as barras: finas, médias, grossas ou muito grossas.

A Figura 1 ilustra um código de barras e representa uma série de números aos quais



são firmados espaços de espessura fixa, que corresponde sempre a uma sequência de 7 dígitos iguais a 0 ou a 1. E estabelecido que o símbolo 0 represente uma listra branca fina, o símbolo 00 uma listra branca média, 000 uma listra grossa e 0000 uma listra muito grossa. Do mesmo modo, o símbolo 1 representaria uma listra preta fina e, 11, 111 e 1111, listras média, grossa e muito grossa. Essas sequências de 0 e 1 podem ser convertidas em números de 0 a 9. Como por exemplo, o número 7, o primeiro do código na Figura 1 é representado pela sequência 0101011. O particionamento do código indica que os três primeiros números é o país de produção, o segundo bloco de números identifica a empresa que fabricou o produto (varia de 4 a 7 dígitos), o terceiro bloco identifica o produto (considera tipo, quantidade, embalagem, peso, tamanho) e por fim tem-se o dígito verificador obtido com operações sobre os números anteriores.

Figura 1: Código de Barras



Fonte: GS1

Para verificar se ocorreu algum erro de digitação no código EAN-13, é atribuído o dígito de verificação, o qual será denotado por x . Considere o código $a_1 a_2 \dots a_{12} x$ de um produto cadastrado no EAN-13. Como os 12 primeiros dígitos contêm informações sobre país de cadastro, empresa fabricante e produto, eles são naturalmente determinados por um método padrão pertencente a autoridade classificadora do país. Fazendo

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{12}, x),$$

utilizando o vetor fixo w do sistema EAN-13,

$$w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1),$$

e calculando o produto escalar dos vetores α e w , obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot w &= (a_1, a_2, \dots, a_{12}, x) \cdot (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \\ \alpha \cdot w &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 1 + a_6 \cdot 3 + a_7 \cdot 1 + \\ &\quad a_8 \cdot 3 + a_9 \cdot 1 + a_{10} \cdot 3 + a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 3 + x \\ &= a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + a_{12} + x \end{aligned}$$

Escolhe-se x de forma que a soma seja um número múltiplo de 10, isto é,

$$\alpha \cdot w \equiv 0 \pmod{10}.$$

Se a equação não é satisfeita, então existe algum erro no código.

Exemplo 1. No código de barras da Figura 1 os dígitos conhecidos serão representados por

$$\alpha = (7, 8, 9, 8, 3, 5, 7, 4, 1, 0, 0, 1, x),$$

e deseja-se descobrir o dígito verificador x . Para isso deve-se multiplicar α por

$$w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1),$$

Obtendo

$$\alpha \cdot w = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + \\ 7 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + x \cdot 1.$$

Assim,

$$\alpha \cdot w = 105 + x.$$

Assim, para que a soma

$$(105 + x) \equiv (5 + x) \equiv 0 \pmod{10},$$

deve-se ter $x = 5$, ratificando o código de barras do exemplo.

O ISBN foi criado em 1969 devido a necessidade das editoras catalogarem livros e informatizarem o sistema de encomendas. É utilizado para catalogação de publicações monográficas como livros, artigos, apostilas, CD-Roms, publicações em braile etc. Nesse código, o último dígito é calculado através de congruências envolvendo os outros 12 dígitos e, estes sempre são fracionados em 4 partes, de tamanhos diversos, contendo informações do país, editora e livro ou publicação.

A distribuição dos números no código ISBN ocorre da seguinte forma: a primeira seção de algarismos corresponde ao código Global, a segunda indica o país ou grupo registrante, a terceira a editora, a quarta a publicação no âmbito de controle da editora e o último é o dígito de verificação. Se houver algum dígito errado ou mesmo troca de dígitos adjacentes, os erros serão detectados pelo método de verificação ISBN. O cálculo do dígito verificador no sistema ISBN é realizado nas seguintes etapas:

Multiplicar os 12 primeiros dígitos mais o 13º pela base

$$(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1);$$

Calcular a soma dos produtos de 1) e verificar qual valor $\alpha 13$ pode assumir para que essa soma seja um número múltiplo de 10.

Exemplo 2. O livro de Aritmética do PROFMAT tem ISBN 978-85-8337-105-2. O dígito de verificação é 2, pois

$$(9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ + 2 \cdot 1 = 118 + 2 \equiv 0 \pmod{10}.$$

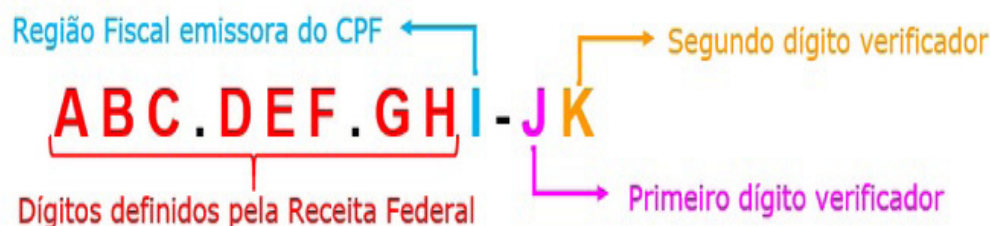
Portanto, a verificação feita é uma congruência módulo 10.

O CPF no Brasil é constituído de 11 dígitos, em que os dois últimos, assim como nos códigos de barras e ISBN, são dígitos de verificação determinados com aplicação de congruência.

A Figura 2 apresenta o significado dos dígitos que compõem o CPF no Brasil: os oito primeiros dígitos formam um número-base definido pela Receita Federal no ato da inscrição; o nono dígito define a Região Fiscal responsável pela emissão, o penúltimo dígito representado pela letra *J* é o dígito verificador dos nove primeiros e o último dígito, representado por *K*, é o dígito verificador dos outros nove anteriores.



Figura 2: Cadastro de Pessoas Físicas



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP

Para encontrar os dígitos verificadores de um CPF considere $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9)$ a sequência formada pelos nove primeiros dígitos, os quais devem ser multiplicados, nessa ordem, pela base $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ e, efetuar-se-á a soma dos produtos obtidos. O décimo dígito, a_{10} , deve ser subtraído daquela soma, tal que o resultado seja um número múltiplo de 11. Em outras palavras, denotando a soma dos produtos obtidos por S , múltiplo de 11. Em outras palavras, denotando a soma dos produtos obtidos por S ,

$$S - a_{10} \equiv 0 \pmod{11},$$

ou seja, a_{10} é o resto da divisão de S por 11. O décimo primeiro dígito é calculado de modo análogo, considerando o décimo dígito encontrado e uma base de 0 a 9. Por exemplo, se o CPF de uma pessoa tem os seguintes nove primeiros dígitos 053, 213, 743, o primeiro dígito de controle pode ser obtido como segue:

1. Escreve-se os nove primeiros dígitos e abaixo a base de 1 a 9:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

2. Efetua-se as multiplicações correspondentes e soma-se os produtos obtidos:

$$0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 158.$$

3. Dividi-se o resultado obtido na etapa (2) por 11 e toma-se o resto:

$$158 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Pelas etapas (1), (2) e (3) realizados, tem-se que o décimo dígito, primeiro dígito de controle, é 4. Resta descobrir o décimo primeiro dígito e, para isso, serão realizadas etapas análogas às anteriores, como segue:

- I. Escreve-se os dez dígitos e abaixo a base de 0 a 9;

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

- II. Efetua-se as multiplicações correspondentes, somando os produtos, tem-se que

$$0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 = 166$$

- III. Dividi-se o resultado obtido por 11 e tem-se o resto,

$$166 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Pelas etapas realizadas em (I), (II) e (III) conclui-se que o 11º dígito, segundo dígito de controle, é 1.

Portanto, o CPF procurado corresponde a **053.213.743 - 41**.

5. APLICAÇÃO DE CONGRUÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

A grande aplicabilidade das Congruências em diversas áreas, como sistemas de identificação de ISBN, de CPF, de Registro Geral, de códigos de barras, criptografia, calendários, relógios, etc é base de muitos artigos científicos e gera contribuições para o processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental. É um tema bastante atual e que pode ser trabalhado nas classes do Ensino Fundamental é gerador de excelentes oportunidades de contextualização no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

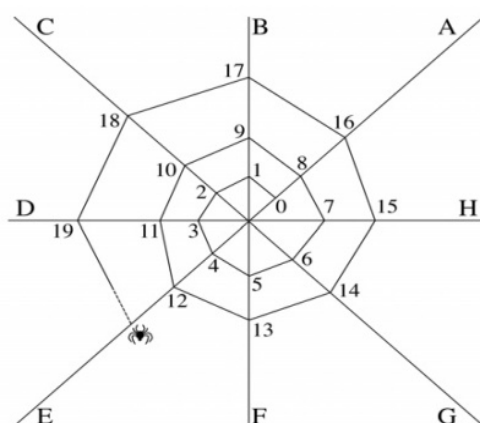
O conhecimento da teoria de Congruências pode contribuir de forma significativa para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática nos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º anos) possibilitando a aproximação de um dos objetivos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais: “saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos.” [2] e [3].

5.1 Procedimentos Didáticos Aplicados em Turma

Foi realizada uma aplicação com os alunos do ensino fundamental dos anos finais da UEB Bandeira Tribuzzi, São Luís, como forma de experimentar o objetivo proposto nesse trabalho, 11. A pesquisa de campo como experimental, consistiu em investigações empíricas com o objetivo principal de testar as hipóteses de contribuição para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos anos finais do ensino fundamental. Em todos os encontros instigou-se os alunos a pensar nos problemas utilizando os conhecimentos adquiridos durante a trajetória escolar, para assim, obter um comparativo quanto utilizar o conhecimento da teoria de congruências.

Problema Proposto 1: A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a Figura 3. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

Figura 3: Teia de Aranha



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP

Solução: Note que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Assim,

- a) sobre o fio A aparecem os números múltiplos de 8;
- b) sobre o fio B aparecem os números múltiplos de $8 + 1$;
- c) sobre o fio C aparecem os números múltiplos de $8 + 2$;

- d) sobre o fio D aparecem os números múltiplos de $8 + 3$;
- e) sobre o fio E aparecem os números múltiplos de $8 + 4$;
- f) sobre o fio F aparecem os números múltiplos de $8 + 5$;
- g) sobre o fio G aparecem os números múltiplos de $8 + 6$;
- h) sobre o fio H aparecem os números múltiplos de $8 + 7$.

Na divisão de 118 por 8, encontrou-se resto 6, o que significa que $118 = 14 \cdot 8 + 6$. Para resolver o problema por congruência utiliza-se a congruência módulo 8, ou seja,

$$118 \equiv 6 \pmod{8},$$

o que significa que o número 118 estará no mesmo fio que os números que deixam resto 6 na divisão por 8, portanto, no fio G.

Problema Proposto 2: Sabendo que o ano de 2021 iniciou em uma sexta-feira, responda:

- a) Em que dia da semana é o último dia de 2021?
- b) Em que dia da semana é o 1º dia de 2024? E o último dia?

Solução:

(a) Na Tabela 1 foram listados os primeiros 16 dias de 2021. Os múltiplos de 7 sempre estão na quinta-feira, os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão na sexta-feira, os que deixam resto 2 no sábado, e restos 3, 4, 5 e 6, domingo, segunda, terça e quarta, respectivamente. Como o ano de 2021 têm 365 dias, ao dividir 365 por 7, obtém-se quociente 52 e resto 1, pois $365 = 52 \cdot 7 + 1$. De onde, conclui-se que o último dia de 2021 é uma sexta-feira.

Tabela 1: Primeiros 16 dias de 2021

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Próprio autor

(b) Pelo item (a), o ano de 2021 encerrará numa sexta-feira. Então o ano de 2022 iniciará num sábado e, como têm 365 dias, terminará num sábado. Assim, o ano de 2023 iniciará e terminar num domingo, pois têm 365 dias. Desse modo, o ano de 2024 iniciará numa segunda-feira, mas têm 366 dias. Então, será utilizada a Tabela 2 para auxiliar na solução do problema.

A Tabela 2 mostra que os múltiplos de 7 estão no domingo e os números que deixam restos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quando divididos por 7, estão na segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado respectivamente. Efetuando a divisão de 366 por 7 obtém-se o quociente 52 e o resto 2. Portanto, o último dia de 2024 será numa terça-feira.

Tabela 2: Primeiros 20 dias de 2024

dom	Seg	ter	qua	qui	sex	sab
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

Fonte: Próprio autor

Solução Alternativa: O problema é proposto para utilizar a congruência. Para isso utiliza-se a congruência módulo 7, devido a semana ter 7 dias. Assim, no item (a) pode-se escrever que

$$365 \equiv 1 \pmod{7},$$

evidenciando que o último dia de 2021 é no mesmo dia da semana que o primeiro dia. E no item (b), pode-se escrever que

$$365 \equiv 2 \pmod{7},$$

evidenciando que o último dia de 2024 é no mesmo dia da semana do segundo dia, ou em outros termos, no dia da semana seguinte ao dia da semana do primeiro dia.

Esse problema foi oportuno para apresentar alguns resultados aos alunos. Isto é, se um ano é comum, com 365 dias, então termina no mesmo dia da semana que iniciou. Se for bissexto, com um dia a mais acrescentado no mês de fevereiro, termina no dia da semana seguinte ao dia da semana que iniciou. Assim, comentou-se que descobrir o dia da semana, fato que muitas vezes é entendido como uma espécie de magia, deve-se a utilização de um algoritmo.

Além disso, fez-se a caracterização do ano bissexto devido a sua identificação não ser tão simples. Aparentemente, os anos bissextos ocorrem sempre de 4 em 4 anos, no entanto, após a Reforma Gregoriana ao calendário Juliano, que deu início ao Calendário Gregoriano, sob orientação do astrônomo Lélío, e sob o pontificado de Gregório XIII, imposta em 1582 da era Cristã, consistiu no seguinte: os anos da era Cristã que são múltiplos de 100 (anos centenários) deixariam de ser bissextos, exceto quando são múltiplos de 400, assim retirava-se 1 dia a cada 100 anos, e adicionava-se 1 a cada 400 anos.

Pode-se então explicar a regra para anos bissextos como segue: se um ano for múltiplo de 4, então ele é bissexto. Por exemplo, 2.020 é bissexto pois seus dois últimos algarismos formam um número múltiplo de 4 e, portanto, 2020 é divisível por 4. No entanto, se um ano for, simultaneamente, múltiplo de 4 e de 100, então ele deixa de ser bissexto. Isso ficará mais evidente no ano de 2100, pois 2.100 é múltiplo de 4 e de 100. Isso ocorreu no ano de 2.000, mas passou naturalmente porque obedeceu a regra conhecida de 4 anos após 1996 que foi bissexto, [9] e [11].

A regra de anos bissextos apresentada é que a Terra leva 365 dias e aproximadamente 5 horas 49 minutos e 12 segundos para realizar seu movimento de translação. A expressão

$$365,2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$

que equivale a duração do Ano Gregoriano.

Assim, a cada 4 anos, um dia a mais é acrescentado em fevereiro, no dia 29, como forma de compensar as horas “perdidas”. Entretanto, cria-se uma defasagem ao contrário, pois ao acrescentar-se um dia a mais a cada 4 anos, há um excesso que terá relevância a cada 100 anos e, portanto, nessa oportunidade não se deve acrescentar um dia. Ao não se acrescentar um dia a cada 100 anos, com a correção anterior, novamente comete-se um erro que a cada 400 anos acumulam-se em aproximadamente um dia e, portanto, outra vez um dia deve ser acrescentado.



6. RESULTADOS DA AVALIAÇÃO

Os problemas apresentados foram importantes para o desenvolvimento do conteúdo em aula, principalmente quando abordados utilizando congruência. Os alunos apresentam um bom desempenho na disciplina de Matemática destacando na aplicação correta da teoria para a resolução de problemas ao passo que a maioria dos alunos dificulta o diagnóstico mais preciso em sala. Dessa forma, complementarmente, os questionários avaliativos com duas finalidades: (I) Verificar a aprendizagem dos alunos do conteúdo de congruências de forma mais abrangente; (II) Avaliação das aulas e do professor na perspectiva dos alunos.

A Tabela 3 ilustra os resultados do teste de avaliação em que elencou-se 6 questões relacionadas ao conteúdo de congruência modular, aplicado via formulário. Para fazer a análise do resultado utilizou-se a frequência acumulada haja vista sua utilidade na obtenção de quantidade de dados que estão abaixo ou acima de um valor determinado. A menor quantidade de acertos foi 1 questão. É possível identificar que 8 alunos acertaram 3 ou menos questões. E conseqüentemente, pela diferença, 12 alunos acertaram mais que 3 questões.

Tabela 3: Resultado do Teste de Avaliação

Números de acertos	Frequência absoluta	Frequência acumulada
0	0	0
1	1	1
2	6	7
3	1	8
4	5	3
5	1	14
6	6	20
Somatório	20	-

Fonte: Próprio autor

7. CONCLUSÃO

A experiência realizada resgatou conteúdos trabalhados nos anos finais do ensino fundamental e oportunizando novas experiências aos alunos. Buscou-se utilizar materiais e conteúdos conhecidos no ensino de Matemática, contextualizando os problemas abordados.

O trabalho contém contribuições importantes e alternativa eficiente para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, entre esta: a nova abordagem ao conteúdo de divisão presente no currículo; as muitas possibilidades de contextualizações e aplicações pela cotidianidade da teoria; a teoria de congruências está presente em tecnologias em processos de verificação de sistemas de identificação; justificar os critérios de divisibilidade que geralmente são apenas apresentados aos alunos; possibilita maior celeridade na resolução de problemas e preparar os alunos para conteúdos mais avançados em Matemática.

Foram destacadas aplicações próximas ao cotidiano, visando destacar a presença da

Matemática na vida dos discentes, dando significado ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, a teoria de congruências chega aos alunos do Ensino Fundamental seja através de projetos, sequências didáticas ou com a introdução do conteúdo nos anos finais, para que consiga desenvolver as competências e habilidades previstas para essa etapa de ensino.

Referências

ALMEIDA, Fillippe de - Aritmética modular e suas aplicações: uma experiência de atuação no Ensino Básico. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

COELHO, J. e ALMEIDA, F., Aritmética Modular Aplicada aos Critérios de Divisibilidade Mnemônicos e Não Mnemônicos, Ebook Formando Docentes Construindo Saberes PROFMAT- EMA, UEMA, São Luís- MA. 2021.

COELHO, J., Congruência: Aplicações aos Critérios de Divisibilidade, Código de Barras e Outros. Anais do EMPA V3, Campina Grande, PB. 2023.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

GUEDES, M. G. P. **Outros Critérios de Divisibilidade**. Revista do Professor de Matemática. Niterói - RJ. Sociedade Brasileira de Matemática. Volume 12, p. 24 - 27, 1º semestre de 1988.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, E. Ideb: Brasil atinge outra vez meta nas séries iniciais do ensino fundamental, mas ainda falha nos anos finais. <https://g1.com.br>, 2020. Disponível.

RELATÓRIO PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados. Rio de Janeiro, 2017.

SILVA, R. Amorim Silva, **Congruência Modular no desenvolvimento da aprendizagem de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. Dissertação, (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, São Luís- MA. 2022.

TABOAS, C. M. G.; RIBEIRO, H. S. **Sobre Critérios de Divisibilidade**. Revista do Professor de Matemática. São Carlos - SP. Sociedade Brasileira de Matemática. Volume 06. Disponível em <https://www.rpm.org.br/cdr-pm/6/5.htm>. Acesso em 02 de fevereiro de 2022.

VIEIRA, Vandenberg L. Um Curso Básico de Teoria dos Números, Livraria de Física, São Paulo, SP, 2015.



Este segundo e-book do PROFMAT/UEMA reúne artigos que evidenciam a diversidade e a relevância dos trabalhos desenvolvidos no programa ao longo dos últimos anos. A coletânea reflete o compromisso do PROFMAT em oferecer uma formação matemática sólida e aplicada à docência na Educação Básica, fortalecendo o papel do professor como agente transformador. As experiências e projetos aqui apresentados revelam contribuições significativas para a melhoria da qualidade do ensino e para o avanço da Educação Matemática no Maranhão.

ISBN: 978-65-6068-211-5

